算数・数学教育における記号について（III）

数学研究室　宮田龍雄
同　佐藤瑛一
同　稲見泰生

まえがき

算数・数学教育における目標の１つとして，「数学的な用語や記号を用いることの意義について理解させ，それらを用いて，簡潔，明確に表わしたり考えたりすることができるようにする」[1]（小学校）ことがあげられている。学校数学の中で指導される用語・記号が，導入時においてはどのような意味に使用され，それらはまた，学習が進行していく過程で，どのように内容的に変化していくかについて，先には０と自然数，等号・不等号，[2]加法・減法の２演算[3]について考察した。今回は，四則演算のうち，残る２つの演算である乗法・除法についての算数教育における取り扱いについて考察し，あわせて，これらの指導上の問題点についても指摘したい。

演算　乗法・除法（×・÷）

乗法は小学校第２学年から，また除法は第３学年から導入される。まず第２学年において，「同じ大きさの集まりに着目して，まとめて数える種々のくふうが生まれてくる。……加法によって２＋２＋…＋２としたり，３＋３＋３＋３としたりするのは不便である。このような場合の簡潔な表わし方として，乗法が用いられることを知らせることになる。この乗法では，単に表現として簡潔であるだけでなく，九九によって，その結果を容易に求められるという特徴がある。すなわち，乗法を用いると，一同じ大きさの集まり一が一いくつ一あるかをわかりやすく簡潔に表わしたり，それを求めたりすることができる。この乗法のよさを感得させることが指導にあたって重要なことである」にみられるような乗法の導入，すなわち同数累加を意味する乗法，さらに「乗法は基準にする大きさのいくつ分かにあたる大きさ，すなわち一つのものの何倍かにあたる大きさを表わすことにも用いられる」とする，単位（量）の大きさと，その数から全体（の量）を求めるとき，すなわち倍量を求めるときに用いられる乗法のように，導入段階での演算としての乗法が，どのような場に，どのような考え方で適用されるかについての基礎指導がなされる。教科書におけるいくつかの指導例をあげてみると，

“なんばいの大きさ”，“ばいのくらべかた”において，長さをくらべることなどから，倍概念を指導し，“１ふくろに６こずつはいった　みかんのふくろが　４こあります。みかんのかずは　６このなんばいですか”，“ながさが５cmのつみ木を４こつなぎました。ぜんたいのながさは，なんcmのなんばいでしょう”のような問題設定から，“６の４ばいを　６×４　とかいて　「六かける四」とよみます。６×４＝２４　上のようなけいさんを　かけざんといいます”，“ぜんたいのながさは，５

cmの４ばいです。これをしきで　５×４　とかき　「五かける四」　とよみます。５×４＝２０　のようなけいさんを　かけざんといいます”のような乗法の導入がみられ，それを表示する記号×が与えられる。またそのあとで，“４かいとんだ長さは，３cmの４ばいです。何cmとびましたか。３cm＋３cm＋３cm＋３cm；　４の３ばい ⟶ ４＋４＋４ ⟶□；　４×５ ⟶ ４＋４＋４＋４＋４＝２０　のようにして　つぎのけいさんをしなさい”として，演算としての乗法の意味と，その結果である積を求めさせている。他の教科書においてもほぼ同様で“５×４は　５の４つぶんですから，ぜんたいを　５＋５＋５＋５　でもとめることができます”，“かけざんで　しきを書きましょう。たしざんで　こたえをだしましょう。４×３＝４＋４＋４”のような扱い方である。さらに，このあとで乗法演算の基礎手段である乗法九九の指導が始まるのであるが，これについては，“２のだんの九九，５のだんの九九”から，他の段の九九へと進んでいくが，ここでも，“５×２　５＋５＝１０，５×３　５＋５＋５＝１５，……；２×２　２＋２＝４，２×３　２＋２＋２＝６，……”としたり，同じ形，同じ本数，同じ枚数のものがいくつあるからという形で積を求めさせている。なお同時にこの段階で，記号×は，演算の結果を求めるためのかけるという操作に直結しやすいと考えられる倍概念を用いて，数直線上での考察や操作とも関連させて指導されている。すなわち積を求めるにあたっては同数累加の考え，したがって乗数が自然数であるときのみに適用できる算法を基本とし，同時に長さを介した倍概念の具体的操作を併用して，この２つの概念を，記号×で積という形で融合させる姿勢がみられる。

また乗法九九をつくっていく過程で，“５人のりのじどう車が　２だいあります。何人のれるでしょうか。５人×２；　いろがみは，何まいいるでしょうか。３まい×４，３まい×５；　つぎのもんだいは，２×５，５×２　のどちらのしきが正しいでしょう”のように，記号×を用いて表わすことのできる概念の指導では，被乗数が１を除いた５以下の自然数を用いての設問が多くみられることは自然であるが，「実際の場での数量の関係に対して，それを簡潔に表わすという立場で乗法の式を考えているときは，たとえば　５×４では，５はもとにしているものの大きさ，４はそれが何個分であるかを表わす数というように，被乗数と乗数に異なる意味を対応させている」ということから，それらの指導の中に非可換な算法の概念がすでに含まれてしまっている。一方，「結果を求める計算や，その式がどんな数を表わすかという立場で考えているときは，５×４も４×５も同じ結果を表わしているといってよい」として，“八のだんの九九，九のだんの九九”の指導においては，長方形に配列されたものの図を用いて，たとえば，“たてに９こずつ７れつですから　９×７，よこに７こずつ９れつだから　７×９；　９×７と７×９　のこたえをくらべなさい”，“かけざんのこたえをくらべましょう。①３×４，４×３　②５×５，４×５”などの設問がなされた上で九九表を作成する。これは２つの（有限）集合Ａ，Ｂの直積Ａ×Ｂの要素の個数すなわち直積集合の濃度を求めることに対応し，したがって乗法を可換な演算ととらえさせていることを示唆している。また同時に，“４×５は４×４のこたえより　いくつおおいでしょう。４×５はいくつでしょう”，“６×３のこたえに６をたすと，６の何ばいになりますか”にみられるように，乗法演算の交換法則，分配法則などの法則性の素地的指導を課しているとも見なせるので，同じ式を考察させるにしても，上記いずれの意味に解する立場をとるかによって，児童に混乱をもたらさないための指導上の配慮が十分に望まれる。すなわち，導入時の対象のもつ具体を離れて，ある程度の抽象化としての乗法が指向されなければなら

ない。また“リボンを3*cm*ずつにきったら，ちょうど8つになりました。はじめのリボンのながさはなん*cm*だったでしょう”，“おはじきを4こずつ　7人にくばりました。なんこあったでしょう”などの問題を解くときにも，“3×8，4×7”のように，記号×が用いられる。ここでは，ある集合(量)が，大きさ一定の互いに素であるいくつかの部分集合(部分量)に分割可能であるとき，部分集合(部分量)の大きさと，その部分集合の個数から，全体集合(全体量)の大きさを求めるときに用いられる算法を示す記号と見なせるので，上記乗法の意味とは異った意味をもつ。乗法の導入時においては，乗法適用のさまざまな場を児童に与えることは重要ではあるが，発達段階から考えて，概念の無理な，早急な統一は避けなければなるまい。

この学年で,“1のだんの九九”を指導することを通して，1にある数をかけることや，ある数に1をかけることの意味を指導する。“2点のところには，5こはいったので，点すうは　2×5＝□です。3点のところには，1こはいったので　点すうは3点です。かけざんのしきにかきましょう。□×1＝3。1点のところは，4こはいったので　点すうは4点です。しきにかきましょう。□×4＝4”，“1＋1＋1は1のなんばいでしょう。こたえはいくつでしょう。1の1ばいをしきにかきましょう。こたえはいくつでしょう”のように，1をかけることや，1にかけることに意味をもたせようとしているが，その指導は形式的に陥りやすい危険があるように思われる。結果を求めるだけならば，乗法を用いなくても児童にも簡単に求められてしまうので，乗法の意味を意識させるために“かけざんのしきにかきましょう”という問になりがちなのであろうが，児童自らに，乗法の形式をととのえる立場から考えても，1についての乗法を考えさせること，用いることのよさを見い出させるための指導が強く望まれる。さらに，1が乗法における単位元であり，他の数と異った特別な性質をもつ数であることを理解させるねらいもあるので，この場合の記号×の意味も，他の数の場合とは概念上異なることに注意する必要がある。これと同様のことは，第3学年において指導される，数0についての乗法に関しても言える。「0や1を用いる乗法は，児童に比較的抵抗のあることが多い。乗数，被乗数が0の場合は，形式的な考えに基づいて乗法を用いることがおおいので，その意味づけにも注意して指導することが望ましい」とされているが，0についての乗法を考えることができること，考えた方がいいことの指導はほとんど強調されず，その結果を求めること，およびその求め方に重点が置かれている指導が多いように思われる。多くの教科書において，“3点のところは，0だから0点。3点のところのとく点をもとめるしきは，3×0　です。3×0＝0となることは，三のだんの九九の答えからも考えられます。0×2＝□”，“3×0の答えは，3×1の答えより　いくつ少ないでしょう。3×0＝0。0×2を，たし算のしきに書いてみましょう。また　かけ算の答えをいいましょう。0×2＝0”のような展開がみられる。

3×3＝9
3×2＝6　　3ずつへる
3×1＝3
3×0＝□

このように，0に関する乗法の真の意味は重要視されず，計算の結果を九九表から帰納させたり，0が被乗数の場合には，加法を用いて結果を求めるという形式的指導になっている。しかも“かけ算では，□の中の数がいくつでも，□×0＝0，0×□＝0　になります”，“どんな数に0をかけても，0にどんな数をかけても　答えは0になります”と0についての乗法の形式的性質だけが強調されている。したがって指導上の問題点は種々あるとしても，指導要領において，ここで用いられている記号×は，数0のもつ特性からくるもう1つの性質の指導が強調されていることと著しく相違しているといえる。

さらに，第３学年においては，乗法に関する交換法則，結合法則などの性質が指導される。これについて，「交換や結合などの法則にあたるものは，加法の場合と同じであるが，乗数が１ずつ増減したときには，積が被乗数の大きさだけ増減するということを理解させることが重要である。これは分配法則にも発展することがらである。なお，これらの性質は，計算の方法を考えたり，説明したりする中で，しだいに意識づけるようにしていくことがだいじである」とされている。教科書の扱い方をみると“かけ算のきまり”とか“計算のくふう”として，長方形状に配列されたものの図を用いて，“いくつあるでしょうか。４こずつ７れつ ⟶ ４×７，７こずつ４れつ ⟶ ７×４，４×７＝７×４，□×△＝△×□”，“４×１３としてもとめましょう。１３×４としてもとめましょう。４×１３＝１３×４，○×△＝△×○”と僅かな例題（以前にその素地的指導はあるにしても）から，一般の乗法の交換法則を結論づけさせている。結合法則に関しても同様で，“２人ずつの組が４組あります。１人に３本ずつえんぴつをくばります。えんぴつはぜんぶで何本いるでしょうか。１つの組にくばるえんぴつの数をしらべて計算しましょう。ぜんぶの人数をしらべて計算しましょう。３×２×４＝３×（２×４），□×△×○＝□×（△×○）　かけ算では，かけるじゅんじょをかえても答えは同じになります”，つみ木を直方体状に積んだ図より，“次の図で，３×５×２の計算についてしらべましょう。３つの数のかけ算では，あとの２つの数を先にかけても，答えは同じです”と乗法の一般の結合法則を指導している。３個の数の乗法の意味の指導とあわせて，結合法則自身の指導に問題点のあることは以前にも指摘[5]したが，いずれにしても児童自身がこれらの法則を含む多くの問題と遭遇し，これらについて考察する中で自然にその法則性を見い出していくようにすることへの配慮が望まれる。同様のことは，将来分配法則と関連する性質として扱われる $a(b+1)=ab+a$ の指導においても言えよう。これについても，九九表を用いて“４×２は４×１より答えはいくつ大きいでしょう。４×１０は４×９より答えはいくつ大きいでしょう。４×０は４×１より答えはいくつ小さいでしょう”，“かけ算では，かける数が１ふえると，答えはもとの数だけ大きくなり，また　かける数が１へると，答えはもとの数だけ小さくなります”のような飛躍のある扱われ方で指導されている。ここでの乗法は，その性質として，交換・結合法則の成立する演算である上に，乗法と加法の２演算を結ぶ分配法則への素地作りを重視する場であるので，それを意識した指導が望まれる。[6] いずれにしても記号×のもつ働き（加法への作用）が追加されたことになる。

また，乗法の意味を「乗数が整数でない場合にも乗法が用いられるように発展させることを予想して，この段階からも，できれば次のような意味でまとめてみられるようにすることが考えられる」として「（基準とする大きさ）×（基準の大きさを単位にして測った数）」のようにとらえさせることの指導が指示されている。一方教科書においては，これを意識した式へのまとめ方は行なわれていない。したがって第２学年における（１つ分の大きさ）×（いくつ分）＝（全体の大きさ）の意味の乗法に対する見方からの転換を通して乗法の意味を拡張する積極的な姿勢はみられない。ただ僅かながら練習問題を解く過程などでそのような見方をさせていると思われるだけである。ここでは記号×のもつ，より高度な概念を意識した指導がねらわれなければならない。

第３学年において始めて除法が指導されるが，これについて「除法が用いられる具体的な場合として，①ある数量から，一定の大きさの数量を取り去ろうとするとき，その最大の回数を求めるとき　②ある数量が，もう一方の数量の何倍であるかを求めるとき　③ある数量を等分したときにできる一つ分の大きさを求めるとき」があり「どの場合にも除法が用いられることをはっきりさせることが必

要である」としている。さらに「除法は，乗法の逆算とみられるので，乗法のまとめの式（基準とする大きさ）×（基準の大きさを単位にして測った数）に即して，そのいずれを求める場合にあたっているかをはっきりさせることがだいじである」と述べられている。除法の導入について，実際にどのように行なわれているかをみると，あるものは"１２まいのカードを，１人に４まいずつくばると，何人にわけられるかを　考えましょう。１２まいのカードから，４まいのあつまりが　いくつとれるかをしらべましょう。４×１　１２－４＝８のこる。４×２　１２－８＝４のこる。４×３　１２－１２＝０のこらない"したがって"ちょうど３人にわけられます。このことをしきで．つぎのように書き　１２÷４＝３　「１２わる４は３」と読みます"，"えんぴつ１２本を，１人に３本ずつわけます。何人にわけられるでしょうか。１２本÷３本"あるいは，"２４まいのカードを　１人に４まいずつくばると，何人にわけられるでしょう。２４÷４＝□　このもんだいは，「１人に４まいずつ□人にくばると，ぜんぶで２４まいになる」と考えられますから，４×□＝２４の□にあてはまる数が答えになります"という考え方もさせている。ここでの除法は同数累減の意味であり，したがって包含除の意味であると考えられる。一方では，除法を等分除の意味にとらえさせる指導から入る教科書もみられる。たとえば"２４まいのカードを，４人に同じ数ずつわけると，１人分は何まいになるでしょう。２４÷４＝□　このもんだいは，「１人に□まいを　４人にくばると，ぜんぶで２４まいになる」と考えられますから，□×４＝２４の□にあてはまる数が答えになります。等しい大きさにわけることを，「等分する」といいます"，"えんぴつ１２本を　３人で同じ数ずつわけます。１人分は，何本になるでしょうか。１２本を同じ数ずつ３つにわけることを，「１２本を３でわる」といいます。１２本÷３"。教科書では上のいずれかの考えによって，それぞれ除法を導入しているが，その根拠は，除法の概念を目標とした立場と，除法の形式的演算を重視する立場とで分かれるのであるが，いずれにしても２つ意味をもつ除法の形式の統一を得るまでには幾つかの困難な指導上の問題がある。

倍概念をもとにした乗法と関連させて，除法を"２４*cm*のテープから　長さ４*cm*のテープが　何本とれるでしょう；　同じ長さに４つに切ると，１本の長さは何*cm*になるでしょう"という問題を図を用いて考えさせ，"２４*cm*のテープ"は"１つぶんの長さが４*cm*のテープ"の"□ばい"である；"１つぶんの長さが□*cm*のテープ"の"４ばい"である　という考え方もみられる。除法をこのような場に適用しているときの意味は，まず一方が他方の何倍になっているかを求める一種の包含除としての算法ととらえさせておき，続いて"７２÷９＝８　の答えのたしかめかたを　考えましょう。７２÷９＝８……８×９＝７２　△÷○＝□……□×○＝△"，"２４÷６の答えの求めかたを考えましょう。□×６＝２４，６×□＝２４，　２４÷６の計算は，上の□にあてはまる数をみつけることです"に見られるように，乗法を用いて除法の結果を検算することができるという見方をさせている。この意味からすれば，除法を乗法の逆演算とも見させている立場をとるものであり，前の２つの除法の指導とは異なる立場のものであると考えられる。

上記いずれかの方法で除法を導入し，乗法，除法が互いに逆算関係にあることを指導した後で，数１，０に関する除法が指導される。数１については，"６*m*のテープから１*m*のテープは何本とれるでしょうか。６÷１＝６；６*m*÷１*m*　１×□＝６の□にあてはまる数を見つけます"などから，"どんな数を１でわっても，答えはもとの数と等しくなります"のようにただちに一般へと法則化されている。また数０については，"□×４＝０，０×４＝□"をもとに"０÷４"の結果を推測させ

たり，“０÷５の答えはいくつでしょうか。□×５＝０の□にあてはまる数を見つけます”，“０÷４はいくつになるでしょう。８÷４とくらべて考えましょう。８÷４＝2……2×４＝８　０÷４＝□……□×４＝０　０÷４＝０”などのことだけから，“０を，０でないどんな数でわっても，答えは０になります”のように，一般的な結論を与える。ここでの除法は，除数が０でないという条件のもとで考えている演算であることを意識させる指導およびこれが他の演算にくらべて，除法のみのもつ特異な性質であることを印象づける指導が重要であると言える。ここで，０による除法の不可能性について，数学性を背景とする指導は，これまでの除法の意味づけ，特に等分除からすれば，ある程度可能であると思われるが，これがみられないことは，数０の取り扱いとの関連からすれば不完全であり問題である。

除法の導入時においては，剰余が０となる場合のみが取り扱われてきたが，第３学年において剰余が０以外である場合の除法も指導される。“えんぴつが２７本あります。４人で同じ数ずつ分けると，１人分は何本になって，何本あまるでしょうか。２７÷４。**２７÷４の計算**　「四六２４」とすると３あまります。「四七２８」とすると１たりません。それでつぎのようにします。２４÷４＝６**あまり３**”，“１４このケーキを，４こずつはこに入れると，何はこできるでしょう。また何このこるでしょう。４×１　１４－４＝１０のこる，４×３　１４－１２＝２のこる，４×４　１６－１４＝２たりない。１４このケーキを，１はこに４こずつ入れると，３はこできて，２このこります。このことをしきで，つぎのように書きます。**１４÷４＝３あまり２**”として“わり算のあまりは，いつも，わる数より小さくなるようにします。”。このように，“あまりのあるわり算”における除法の意味は，“わり切れない”ときにも用いられる演算として，いままでの除法の意味とは異なっていると考えられる。ここでの指導においては，等分の意味での除法との関連とか，あまりは除数より小さくし，またそれを非負にすることについての指導には注意を要する。少くとも上の例などからは，なぜそうするのか，そのようにした方が都合がよいのかなどについての理由は不明である。また一方剰余のこのような取扱いの論理性はまったく存在しないからである。

乗法，除法では，２位数にかける，１位数でわるときの筆算形式についての指導も，この学年でなされる。そこでは，“２５×３の計算　ひっ算では，次のようにします；９６÷４のひっ算は，次のようにします”として筆算による計算方法の指導が行われるが，この段階までくると，乗法，除法は導入時におけるそれらの意味は消えてしまって，もはやそれらを数（負でない整数）に関する一種の操作であるという見方に立って，指導されていると考えられるので，その内容はより形式的一般的概念であると言えよう。同様のことは，第４学年において指導する乗数が３位数，４位数である乗法，除数が２位数，３位数である除法の筆算指導時についても言える。

第４学年において，「四則計算と計算法則」として「四則の意味と四則に関してなりたつ性質などについて理解をまとめる」ことが指導される。このとき「この学年段階では，必要によって，交換，結合および分配などのことばを用いて，簡潔に言い表わすことも考えられる。これらの法則は，単に計算について成り立つ性質であるという見方だけでなく，計算の方法を考えるとき，その基礎として用いられていることがらであるという立場からも法則の役割をしだいに理解させるようにする」。たとえば，２３×６を次のように（筆算形式に）計算する際には，次のような段階で分配法則や結合法則を根拠にして計算を進めているとみることができる」としている。教科書においても筆算形式の導

$$
\begin{aligned}
23\times 6&=(20+3)\times 6 && \text{分配を用いている}\\
&=(20\times 6)+(3\times 6) &&\\
&=(10\times 2\times 6)+(3\times 6) && \text{結合を用いている}\\
&=(10\times 12)+(3\times 6) &&\\
&=120+18 &&
\end{aligned}
$$

入時においては，たとえば，“３６５×５７３　５７３＝３＋７０＋５００とみて計算しましょう；７２÷２　７２を７０＋２とみて，計算を考えましょう”のように，被乗数や乗数，被除数などを和の形に分解しての指導はあるが，これも法則を用いての筆算の指導にまで表面化されたものとみることはできない。このときの乗法，除法は分配法則を介して加法や減法と結合してくるのでさらに豊富な性質をそなえた演算になっているとみることができる。このことは，“計算のきまり”の学習においてはじめて表面化する。問題を設定して“つぎの式はそれぞれどんな考えを使ってつくった式でしょう。６０×（１８＋１７）　６０×１８＋６０×１７　どちらもあつめるお金を表わしているので，つぎのように表わせます。６０×（１８＋１７）＝６０×１８＋６０×１７；（２＋４）×５　２×５＋４×５　どちらの式で計算してもよいわけをいいましょう；たし算とかけ算のきまり　①□×（○＋△）＝□×○＋□×△　②（○＋△）×□＝○×□＋△×□”，“上でわかったことをまとめましょう。（○＋□）÷△＝○÷△＋□÷△　（○－□）÷△＝○÷△－□÷△”。これとは別に筆算による計算を通して，さらに上のどのような性質が使われているかを見させている。この場合にも児童自らが見い出してまとめ上げていくことへの配慮があまりなく，はじめから法則として与えてしまうことや，さらに乗法の場合とちがって，除法が左分配法則を満たさないことへの配慮がみられないことも問題であろう。乗法，除法を四則演算の中では，加減法に優先させて演算するので，計算順序に関して加・減・乗・除の間に演算としての強弱関係があるという見方からすれば，これまでのそれぞれの単純な演算とは異なった乗法，除法のとらえ方もでてくる。

この学年においては，さらに，長方形，正方形，直方体，立方体の面積，体積の指導もなされる。そのとき面積，体積の公式として（たて）×（よこ），（１辺）×（１辺），（たて）×（よこ）×（高さ），（１辺）×（１辺）×（１辺）の形で示される。ここで用いられている乗法は，（単位面積）×（たての測度）×（よこの測度），（単位体積）×（たての測度）×（よこの測度）×（高さの測度）として求められることを，簡略化し，形式化して示したものととらえることができる。他の平面図形，立体図形の求積に関しても同様といえる。

乗数，除数が整数である場合の小数の乗法，除法が第４学年で，乗数，除数が小数になる場合の指導が第５学年でなされる。乗数，除数が小数のときの乗法，除法の意味は，小数の場合にも適用できるような意味に拡張されて，まとめられているので，このときの乗法，除法は，整数（負でない）の範囲におけるそれらより広い概念を包含した演算である。これについて「乗法を一基準とする大きさ（被乗数で示される）を単位として考えたときに，乗数の示す大きさに相当する大きさを求める操作である一という見方に立って考えている。それで，この考えでは，乗数が小数や分数の場合にも，適用することができることは容易にわかる。除法については，乗法の逆算として，被乗数，乗数のいずれを求める場合であるかに応じて，その意味を考えることができる。すなわち，乗法をＢ×ｐ＝Ａ（Ｂは基準とする大きさ，ｐはＢを単位にして測った数）で表わしたとき，除法は次のように，Ｂ，

pのいずれかを求める場合になる。p＝A÷B……（１），B＝A÷p……（２），（１）の場合は，AはBの何倍であるか，すなわち，AのBに対する割合を求める計算として，（２）の場合は，基準の大きさを求める場合で，これは，整数の場合には，いわゆる等分除にあたるものである。ここでは，それを一般化して，一基準または１にあたる大きさを求める一という見方に変えなければならない」と示されているが，教科書においては，乗法，除法の演算の小数の範囲における意味や，その可能性の検討をめぐる指導がなされているとは思われず，すでに演算可能な場として設定されてしまっている上での指導のように思われる。すなわち，導入時においては小数についての乗除法は整数の範囲における乗除法に帰着させた形，あるいはそれに準じた形が一応はとられている。たとえば，“１人に0.２ℓずつ配ります。６人分では何ℓいるでしょう。0.２×６……0.２ℓの６倍は，0.１ℓの何倍でしょう。0.２×６＝（0.１×２）×６＝0.１×（２×６）；１辺が4.８mの正方形のまわりの長さは何メートルでしょう。（正方形のまわりの長さ）＝（１辺）×４　4.８×４　4.８は0.１が４８　４８×４＝１９２　0.１が１９２で１9.２；1.２ℓを６人に等分した１人分は，0.１ℓの何倍でしょう。1.２＝0.１×**１２**　**１２**÷６＝２　1.２÷６＝0.２；１m８５円のリボンを2.４m買った代金を表す式をつくりましょう。８５×2.４　2.４mは0.１mの２４倍だから，0.１mの代金を求めて，それを２４倍すればよい。８５×2.４＝（８５÷１０）×２４＝8.５×２４＝２０４；１８０÷2.４＝（１８０÷２４）×１０＝7.５×１０，１８０÷2.４＝（１８０×１０）÷２４＝１８００÷２４＝７５”のような形で導入されはするのであるが，直ちに機械的な計算である筆算形式へ進んでいく。その上，たとえば，“１８０÷２４＝7.５”のように，整数の範囲の除法（第３学年）はあまりを整数で出した演算であったが，ここでは俄かに小数まで“わり進む計算”というとらえ方をさせている。

小数による乗法，除法の導入に先立って，“十進数のしくみ”について学習するが，このとき，“１4.３６の１０００倍……１4.３６×１０００＝１４３６０，１4.３６の１００倍……１4.３６×１００＝１４３６，……，１4.３６の$\frac{1}{10}$……１4.３６÷１０＝1.４３６，１4.３６の$\frac{1}{100}$……14.36÷１００＝0.１４３６，……”のように小数点の移動に１０００，１００，……をかけたり，１０，１００，……でわったりの操作が行なわれる。このときの記号×，÷は小数点を右（左）へ１桁，２桁，……移す移動としての意味をもつ演算である。

第５学年においては，約数，倍数についての指導がなされる。ここでも乗法，除法が用いられるが，“８を１，２，４，８でわると商が整数で，あまりがありません。８÷１＝８，８÷２＝４，８÷４＝２，８÷８＝１，８をわりきる整数を，８の約数といいます；５×１，５×２，５×３，……のように，５に整数をかけてできる数を，５の倍数といいます。０をのぞいて考えます”，“４，８，１２，……のように４でわって，あまりが０になる整数を４の倍数といいます；１，２，３，６のように６をわりきる整数を，６の約数といいます”と定義されている。ここでの乗法，除法は数の性質としての倍数，約数の概念，さらに，公倍数（公約数），偶数，奇数などの概念の媒体としての意味に用いられている。したがって，乗法，除法のいままでの意味とは異なった意味をもつことになる。またこの場合の数０の取り扱いについて，教科書によっては，中学校での一般的な扱い方とちがった取り扱いをしているものが相当あることをつけ加えておく。[2)]

「整数の除法と分数」では，「二つの整数a，b（bは０でない）の商が形式的に$\frac{a}{b}$という分数で表わされること，すなわち，$\frac{a}{b}$はa÷bの結果を表わすとみられることを指導することになっている。

このことによって，「どんなときでも，その商を一つの数で表わすことが可能になる。このことが，分数をつくり出す重要な考え方に連なってくる」と強調されている。ここで用いられている除法の結果は，分数と同一視されるものであるから，今までのそれと異質のものである。たとえば，“２mを３等分した１つは，１mを３等分した２つ分とみられます。$2 \div 3 = \frac{2}{3}$”，“$4 \div 7$の答えは，$\frac{1}{7}$の４倍と同じです。$8 \div 3$の答えは，$\frac{1}{3}$の８倍と同じです”とされている。そして「任意の二つの整数についての除法が，つねに可能になる（一つの分数で表わされる）」ことの指導を意味するので，これまでのあまりを出したり，わり進んで小数表示をした演算に対する見方からの著しい転換と言えよう。また，この第５学年における分数指導の中に，「同じ大きさの分数の集合」がある。「分数の集合では，次のような関係にあるものが同じ大きさの数を表わすことになる。$\frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$（$k \neq 0$）すなわち，ある一つの大きさの数の表わし方がいくとおりもできることになる」と約分したり，通分したりしてもとの分数と同値な分数をつくることが指導される。教科書においても“$\frac{2}{3}$，$\frac{4}{6}$，$\frac{8}{12}$ の分母と分子の間には，どんな関係にあるでしょう。$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2}$　$\frac{8}{12} = \frac{2}{3} = \frac{8 \div 4}{12 \div 4}$……”として，“分数の分母と分子に同じ数をかけても，分母と分子を同じ数でわっても，分数の大きさはかわりません”，“分数の分子と分母に，０でない同じ数をかけたり，同じ数でわったりしてできる分数は，もとの分数と同じ大きさです”と指導している。このように，同値な分数をつくるための乗法，除法は，以前のそれらの用い方とは明らかに異なった次元での機能をもつものと解釈される。

分数についての乗法，除法は，第５学年，６学年において指導される。第５学年においては，乗数，除数が整数（正の）の場合で，「特に，除法で，分子が除数で整除されない場合については，同じ大きさの分数で分子が整除されるものを選び出すことによって分子をわるという考えで処理できることになること，それを形式化して，分母にその整数をかける方法が考えられるということ」の指導が行なわれ，第６学年では乗数，除数が分数，小数である場合の指導が行なわれる。これらの乗法，除法は，今までの整数（負でない），有限小数の範囲で使用されていたときより，さらに広い範囲の数（負でない有理数）に適用される演算として，その包含する意味が広められてくる。これらについて教科書では，“$\frac{2}{5}$ $d\ell$ ずつ薬の入ったびんが３本あります。薬は，全体で何 $d\ell$ あるでしょうか。$\frac{2}{5} \times 3$　$\frac{2}{5}$は$\frac{1}{5}$が２こです。つぎのように考えて計算します。$\frac{2}{5} \times 3 = \frac{1}{5} \times (2 \times 3) = \frac{2 \times 3}{5} = \square\frac{\square}{\square}$；$\frac{4}{5}m$の長さのひもを３等分すると，１本の長さは何$m$になるでしょうか。$\frac{4}{5} \div 3$　$\frac{4}{5}$の分子が３でわり切れるように，$\frac{4 \times 3}{5 \times 3}$に直します。$\frac{4}{5} \div 3 = \frac{4 \times 3 \div 3}{5 \times 3} = \frac{4}{5 \times 3} = \frac{\square}{\square}$；１$\ell$の重さが$\frac{4}{5}kg$の米があります。この米$\frac{1}{3}\ell$の重さは何$kg$でしょうか。$\frac{4}{5} \times \frac{1}{3}$　１ℓの重さの $\frac{1}{3}$ …$\frac{4}{5} \div 3 = \frac{4}{5 \times 3} = \frac{\square}{\square}$，この米$\frac{2}{3}\ell$の重さは何$kg$でしょうか。$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$　$\frac{1}{3}\ell$の重さの２倍……$\frac{4}{5 \times 3} \times 2$　$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{\square}{\square}$；（長方形の面積を求めることを題材にして）いちばん小さい長方形は，１m^2の何分の何ですか。その長方形が何個でカベ新聞の面積になりますか。$\frac{1}{5 \times 3} \times 4 \times 2 = \frac{4 \times 2}{5 \times 3}$　計算は分母どうし，分子どうしをかければよいことがわかります；６mを１mずつにわけると，６本できます。また１mを$\frac{1}{3}m$ずつにわけると，何本できるでしょう。$6 \div \frac{1}{3} = 6 \times 3$；$\frac{2}{3}$は$\frac{1}{3}$の２倍ですから，$6 \div \frac{2}{3} = (6 \div \frac{1}{3}) \div 2 = 6 \times 3 \div 2 = \frac{6 \times 3}{2}$；$\frac{3}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{5} \div 2 \times 3 = \frac{3}{5 \times 2} \times 3 = \frac{3 \times 3}{5 \times 2}$”などを分数の乗除の計算の基礎として，一般の分数の計算の方法をまとめている。分数の加法，減法の指導においては，それぞれの分数が各類の代表元であることが或る意味で強調されていたが，ここで扱われている乗法，除法における分数にはそのような配慮はほとんどみられない。

以上の他に，乗法，除法は，用語を定義する際にも用いられることがある。いくつかの例をあげてみよう。円周の直径に対する割合が一定であることを，実測を通して帰納し，"円周が直径の何倍になっているかを表わす数を円周率といいます。円周と直径の関係は，つぎのように表わせます。（円周率）＝（円周）÷（直径），（円周）＝（直径）×（円周率）"とする円周率の指導，また平均については"いろいろな大きさの数があるとき，それらを同じ大きさの数になるように，ならしたものを平均といいます。……（平均）＝（合計）÷（こ数）"のように定義される。「異なった二つの量の割合で数量をとらえること」として"単位量あたりの大きさ"の指導，速さについては"速さは，単位の時間に進む道のりで表わします。（速さ）＝（道のり）÷（時間）；速さ，時間，道のりの関係は，つぎのように表わせます。（道のり）＝（速さ）×（時間）"，その他"1㎢あたりの人口を人口みつ度といいます"としての人口密度の定義，あるいは"仕事の速さ"，"単価"などの定義にも除法が用いられる。さらに分数の除法の指導を通して，逆数の概念が定義される。すなわち逆数を"$\frac{3}{5}$と$\frac{5}{3}$，$\frac{1}{3}$と3のように，2数の積が1になるとき，一方の数を他方の数の逆数といいます"と定義する。比例については，「それぞれの数量において，対応する二組みの値をとれば，どこをとっても，一方の数量についての変化の割合が，他方の数量についての変化の割合と等しくなっているということ。対応している値の比に着目すると，それがどこでも一定になっていること」，すなわち"BがAに比例するとき，A，Bの対応する値がどんな値のときでも，B÷A＝（きまった値）またはB＝（きまった値）×Aという形の式になります"とされ，反比例については「速さが$\frac{a}{b}$倍になれば，時間は$\frac{b}{a}$倍というように，その逆数倍になること。二つの数量について，対応する値をとると，その積はどこをとっても，つねに一定であること」，すなわち"BがAに反比例するとき，A，Bの対応する値がどんな値のときでも，A×B＝（きまった値）またはB＝（きまった値）÷Aという形の式になります。"のような述べ方で，比例，反比例についての概念指導が行なわれる。これらにみられる概念規定における乗法，除法は，以前の乗法，除法には見られなかった機能をもつ演算と考えることができる。

あとがき

前回に続いて，今回は四則演算のうち，乗法，除法について，その意味する内容，概念の規定が各学年段階を追って，どのように発展されていくかを，算数教育の中で考察してきた。これらの指導においては，上で述べてきたように，先の紀要でも指摘したような数学的な曖昧さを含めて，教育現場で指導上困難を生ずるおそれがあると考えられるいくつかの問題点もみられる。さらに中学校・高等学校の数学教育での諸演算および用語・記号などについては他の機会に考察を続けたい。

参 考 文 献

1) 小学校指導書　算数編，文部省，（昭和４４年５月）以下「……」は指導書よりの引用

2) 算数・数学教育における記号について(I)　茨大教育学部教育研究所紀要第８号　宮田他（1975）

3) 〃 (II) 〃 第９号 〃 （1976）

4) 小学校算数教科書（６社）以下〃……〃は教科書よりの引用

5) 算数教育の問題点(I)　茨大教育学部教育研究所紀要第３号　宮田他（1970）
〃 (II)　茨大教育学部紀要第２１号　宮田他（1971）

6) 数の概念，高木貞治，岩波書店（昭和４５年）