曲面論とREDUCEプログラム

山田　満*

（昭和61年9月8日受理）

Theory of Surfaces and REDUCE Program

Mitsuru YAMADA*

Abstract — A REDUCE program for the tensor calculation in Riemannian geometry is proposed. It is examined for the simplest nontrivial case of a two-dimensional manifold, *i.e.* a surface in three-dimensional Euclidian space. The program will remain useful for the calculation of curvature tensors in general relativity.

1. はじめに

これまでいくつかの数式処理システムが開発されて来た．Utah大学のA.C. Hearnの創始によるREDUCE，Utrecht 大学 M. Veltman により発展せられたSCHOONSHIP，MITで開発されたMACSYMA，Hawaii大学のStoutemyerが中心となって作成したパソコン用のmuMATH，Cal Tech で開発されたSMP等である。最近は我が国でも数式処理システムの諸分野への応用が盛んとなってきた。これらの応用に際し今の所，最も多く使われているのがREDUCEシステムであろう(1),(2)。

本稿ではRiemann幾何学(3)のテンソル計算にREDUCEプログラムを援用する例を示す。n次元Riemann空間の計量テンソル（g_{ij}）を与えた時，これから接続係数（$\Gamma_{ij}{}^{k}$）を計算し，その結果を使ってさらに曲率テンソル（$R_{ijk}{}^{p}$）が計算される。この時の計算の内容は，まず（g_{ij}）の逆行列（g^{ij}）を求めること，つづいていろいろな関数を座標により偏微分すること，および添字の縮約（かけ算とたし算）とから成っている。それら一つ一つの計算は難しい技法を何ら要しないものである．にもかかわらずこの時に費される労力は次元数nが増すにつれて急速に増大してゆく．この様な分野こそ計算機にやらせたらと誰しも自然に思うだろう。

そこで一般のn次元多様体に計量テンソル（g_{ij}）が与えられてからスカラー曲率（R）およびGauss 曲率（K）を計算しおわるまでのプログラムをREDUCE によって書くことにする。実例として$n=2$の曲面論の例をとる。使用するシステムは東京大学大型計算機センターに公開されているREDUCE 3.0である。

§2では微分多様体のアファイン接続の諸性質を示す。§3ではRiemann多様体のテンソル解析のあらましを述べる。§4では具体的な2次元Riemann空間を例にとってその曲率の計算をREDUCEプログラムに援けられながら実行する。

2. 微分多様体のアファイン接続

n次元C^{∞}級微分多様体MとはMの開被覆$\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$があって，各$U_\alpha$に対して同相写像（座標関数）$\phi_\alpha : U_\alpha \to R^n$が定義されていて，$U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$のときには$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$が$\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$から$\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$への$C^{\infty}$級関数になるものを言う。今後は$C^{\infty}$級微分多様体ばかりあつかうものとし$C^{\infty}$級という言葉を省くことにする。又，微分多様体$M$が$n$次元であることを示すため$M^n$と記すことにする。

微分多様体M^nがアファイン接続Γを持つとは，M^nの座標近傍による開被覆$\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$の各$U_\alpha$について$n^3$個のアファイン接続係数$\Gamma(\alpha)_{ij}{}^{k}$があたえられ

＊茨城大学工業短期大学部一般教育（日立市中成沢町）
General Education, College of Technology, Ibaraki University, Hitachi 316, Japan

$U_\alpha \cap U_\beta \fallingdotseq \phi$ ならば $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ の U_α, U_β における座標を各々 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$, $(y^1, y^2, \cdots, y^n)$ とすると次の様なアファイン接続係数の変換則が成り立つことである。

$$\Gamma(\alpha)_{ij}^{\ \ k} = \frac{\partial x^k}{\partial y^p}\left\{\frac{\partial^2 y^p}{\partial x^i \partial x^j} + \Gamma(\beta)_{qr}^{\ \ p}\frac{\partial y^q}{\partial x^i}\frac{\partial y^r}{\partial x^j}\right\}.$$

右辺の第1項があるために $\Gamma(\alpha)_{ij}^k$ は(1, 2)型のテンソル場とは異った変換をする。

さて以下の議論はある一つの U_α を選んでその中の局所的な性質を論ずることに限定するので接続係数 $\Gamma(\alpha)_{ij}^k$ も簡単に $\Gamma_{ij}^{\ \ k}$ と書くことにしよう。

接続 Γ が導入されたことによって各種のテンソルの平行移動が定義できる。例えば反変ベクトル $\xi^j(x)$ および共変ベクトル $\eta_j(x)$ を点 x に於いて dx だけ平行移動した結果生ずる変化は

$$d_{/\!/}\,\xi^j = -\Gamma_{ik}^{\ \ j}\,\xi^k\,dx^i$$
$$d_{/\!/}\,\eta_j = \Gamma_{ij}^{\ \ k}\,\eta_k\,dx^i$$

で与えられる(以下一つの項の中に2度くりかえしあらわれた添字については1から n までの和をとるものとする)。一方ベクトル場 ξ^j, η_j の $x+dx$ に於ける値と x に於ける値の差は

$$d\,\xi^j = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\xi^j\right)dx^i$$
$$d\,\eta_j = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\eta_j\right)dx^i$$

であるがこれらの量はベクトルとしての変換性をもたない。これらのベクトル場の正味の増分又は正しいベクトル場の変換性をもつ増分は,後にあげた方から最初にあげた方を各々引き算して得られる。即ち

$$\delta\,\xi^j = d\,\xi^j - d_{/\!/}\,\xi^j$$
$$\delta\,\eta_j = d\,\eta_j - d_{/\!/}\,\eta_j$$

そこで

$$\nabla_i\,\xi^j \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}\xi^j + \Gamma_{ik}^j\,\xi^k$$
$$\nabla_i\,\eta_j \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}\eta_j - \Gamma_{ij}^{\ \ k}\,\eta_k$$

とすると,これらは各々(1, 1)型と(0, 2)型のテンソル場になる。これらはベクトル場 ξ^i, η_j の共変微分と呼ばれ

$$\delta\,\xi^j = (\nabla_i\,\xi^j)\,dx^i$$
$$\delta\,\eta_j = (\nabla_i\,\eta_j)\,dx^i$$

が成りたつ。

M^n に於ける測地線は,パラメータ t に関する n 個の微分方程式系

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^{\ \ k}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = 0$$

により決まる。このときのパラメータ t をアファインパラメータと言い, c, d を任意の実定数として $t \to ct + d$ という変換の自由度がある。

接続 Γ に関する曲率テンソル $R_{ijk}^{\ \ \ \ p}$ と捩率テンソル $T_{ij}^{\ \ k}$ が次の様に定義される。

$$R_{ijk}^{\ \ \ \ p} = \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma_{jk}^{\ \ p} - \frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma_{ik}^{\ \ p} - \Gamma_{ik}^{\ \ q}\,\Gamma_{jq}^{\ \ p} + \Gamma_{jk}^{\ \ q}\,\Gamma_{iq}^{\ \ p}$$

$$T_{ij}^{\ \ k} = \Gamma_{ij}^{\ \ k} - \Gamma_{ji}^{\ \ k}.$$

両者とも添字 i, j の入れ替えに対して反対称である。

$n \times n$ 行列 $\widetilde{\Gamma}_i$, $\widetilde{R}_{ij}$ を

$$(\widetilde{\Gamma}_i)_{jk} = \Gamma_{ij}^{\ \ k}$$
$$(\widetilde{R}_{ij})_{pq} = R_{ijp}^{\ \ \ \ q}$$

で定義すると曲率テンソルの定義はいくらか覚えやすくなって

$$\widetilde{R}_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^i}\widetilde{\Gamma}_j - \frac{\partial}{\partial x^j}\widetilde{\Gamma}_i - [\widetilde{\Gamma}_i, \widetilde{\Gamma}_j]$$

となる。

3. Riemann 幾何学に於けるテンソル解析

微分多様体 M^n 上に対称かつ正定値な2階の共変テンソル場 $\mathfrak{g}$ が与えられたとき $\{M^n, \mathfrak{g}\}$ を n 次元 Riemann 空間, $\mathfrak{g}$ をその Riemann 計量という。M^n の一つの座標近傍を U, そこでの座標系を $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ とし

$$g_{ij} = \mathfrak{g}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

とおくと，M^n のRiemann 計量$\mathfrak{g}$はU上の各点で定義された$n\times n$対称正定値行列（g_{ij}）であらわされる。このことはしばしばM^nの線素dsが

$$ds^2 = g_{ij}\ dx^i\ dx^j$$

で与えられると表現される。計量$\mathfrak{g}$は（0，2）型のテンソル場であるが行列（g_{ij}）の逆行列を（g^{ij}）とすると，これはUにおける（2，0）型のテンソル場の成分を与える。

M^n に計量$\mathfrak{g}$が与えられたことによって，各点pにおける接ベクトル空間T_p（M^n）に正定値の内積が定義されたことになる。即ちX_p，$Y_p \in T_p$（M^n）に対して

$$<X_p , Y_p> = \mathfrak{g}_p\ (X_p , Y_p)$$

をそれらの内積とすればよい。M^n 上のベクトル場X，YがUに於いて

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$Y = \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

とあらわされるとき

$$\mathfrak{g}\ (X , Y) = g_{ij}\ \xi^i\ \eta^j$$

となる。

Riemann 空間（M^n，$\mathfrak{g}$）の接続Γが計量的であるとは，Γによる反変ベクトルの平行移動によって，それらの間の内積が不変である時を言う。即ち

$$\mathfrak{g}_{x+dx}\ (\xi + d_{/\!/}\xi , \eta + d_{/\!/}\eta) = \mathfrak{g}_x\ (\xi , \eta).$$

Riemann 空間上に計量的な接続は無数に与えることができるが，さらに捩率テンソルが恒等的に0であるという要請をおくと接続は次の様に一意的に決ってしまう。まずRiemann 空間のChristoffel 3添字記号〔$ij;k$〕，$\left\{ {k \atop ij} \right\}$を次の様に定義しよう。

$$[\,ij;k\,] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}\right)$$

$$\left\{ {k \atop ij} \right\} = g^{kp}\ [\,i , j ; p\,]\ .$$

計量的で捩率が0である接続では

$$\Gamma^k_{ij} = \left\{ {k \atop ij} \right\}$$

でなければならない。これをRiemann又は Levi-Civitaの接続と言う。 以下ではこの接続を仮定する。

Levi-Civitaの接続によってきまる曲率テンソル$R_{ijk}{}^p$ の種々な重要な性質をあげておこう。まずこの接続においては

$$R_{ijk}{}^p + R_{jki}{}^p + R_{kij}{}^p = 0$$

が成り立つ。

添字が4つとも下付きである曲率テンソル

$$R_{ijkp} = R_{ijk}{}^q\ g_{qp}$$

はさらなる添字対称性

$$R_{ijpq} = -R_{ijqp}$$

$$R_{ijpq} = R_{pqij}$$

を満たす。さらにベクトル場 u^k，v_k に対し

$$[\nabla_i , \nabla_j]\, u^k = R_{ijp}{}^k\ u^p$$

$$[\nabla_i , \nabla_j]\, v_k = -R_{ijk}{}^p\ v_p$$

が成り立つ。又次式はBianchi の恒等式と呼ばれる：

$$\nabla_i R_{jkpq} + \nabla_j R_{kipq} + \nabla_k R_{ijpq} = 0\ .$$

Ricci のテンソルは

$$R_{ij} = R_{pij}{}^p$$

で定義される対称テンソルである。スカラー曲率およびGauss 曲率は各々

$$R = R_i{}^i$$

$$K = \frac{1}{n(n-1)} R$$

で定義される。

最後に，$n=2$のコンパクトで向き付け可能なRiemann 曲面においては，有名なGauss－Bonnet の定理が成り立つ

$$\int_M K\sqrt{g}\ dx^1\, dx^2 = 2\pi\ \chi(M)\ .$$

上式に於いては$g \equiv \det(g_{ij})$である。又$\chi(M)$は曲面MのEuler 標数である。 それはいく通りもの同等な表し方がある。Mを三角分割した時の面，辺，頂点

の数をそれぞれα_2，α_1，α_0 とすると

$$\chi(M) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 .$$

これは三角分割のしかたに依存しない。あるいはM上のホモロジー群又はコホモロジー群がBetti数β_2，β_1，β_0 をもつとき(4)

$$\chi(M) = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2$$

である。$\chi(M)$は位相不変量であり，Gauss-Bonnetの定理は曲面の接続に依存する量(Gauss 曲率K)を面積分してしまうと，接続に依存しなくなり，大域的な位相不変量だけが残るという意味で重要である。

4. 曲面論とREDUCEプログラム

4.1　3次元Euclid 空間に埋め込まれた2次元輪環面の曲率

平面内に於いてある直線よりbだけ離れた点を中心とする半径aの円を描く．$b > a$とする。直線を軸として円を3次元Euclid空間内で回転させるとドーナッツの表面状の輪環Mを得る。Mに3次元Euclid空間より誘導せられる計量をそのまま与えるとMは2次元Riemann空間となる。座標系を$(x^1, x^2) = (\theta, \phi)$とし線素が

$$ds^2 = a^2\, d\theta^2 + (a \sin\theta + b)^2\, d\phi^2$$

となる様にできる。Mの座標近傍として次の4つを考えれば十分である。

$$U_1 = \{(\theta, \phi) \mid 0<\theta<2\pi,\ 0<\phi<2\pi\},$$
$$U_2 = \{(\theta, \phi) \mid 0<\theta<2\pi,\ -\pi<\phi<\pi\},$$
$$U_3 = \{(\theta, \phi) \mid -\pi<\theta<\pi,\ 0<\phi<2\pi\},$$
$$U_4 = \{(\theta, \phi) \mid -\pi<\theta<\pi,\ -\pi<\phi<\pi\},$$

以下これらのうちの任意の一つを選んだものとして話をすすめよう。

計量テンソルの成分は

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & (a \sin\theta + b)^2 \end{pmatrix}$$

で与えられる。まず

$$\sqrt{g} = \sqrt{\det(g_{ij})} = a(a \sin\theta + b)$$

$$(g_{ij}) = (g^{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & (a \sin\theta + b)^2 \end{pmatrix}.$$

接続係数の計算を経て曲率テンソルを求めると

$$R_{12\,12} = -a \sin\theta(a \sin\theta + b)$$

となる。R_{ijkp} の他の成分は添字の満たす置換対称性からただちにわかる。Ricci テンソルは

$$(R_{ij}) = \begin{pmatrix} \dfrac{a \sin\theta}{a \sin\theta + b} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a}(\sin\theta)(a \sin\theta + b) \end{pmatrix}.$$

スカラー曲率は

$$R = \frac{2}{a} \quad \frac{\sin\theta}{a \sin\theta + b} .$$

Gauss の全曲率はこれの半分の

$$K = \frac{\sin\theta}{a(a \sin\theta + b)}$$

となる。これからわかる様に

$$0 < \theta < \pi \quad で \quad K > 0$$
$$\pi < \theta < 2\pi \quad で \quad K < 0$$

となっている。

Gauss-Bonnet の定理を確かめてみよう。

$$\int_M K \sqrt{g}\, dx^1\, dx^2$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\sin\theta}{a(a \sin\theta + b)} \cdot a(a \sin\theta + b) = 0 .$$

確かに，MのEuler標数は0であるから，定理はなりたっている。

4.2　REDUCEプログラムの応用

第1図は，4.1 で行ったことをREDUCE に行わせるためのプログラムである。出力結果を編集したものは第2図にある。第1表はプログラム内で使われる変数とそれらの数学的な意味を一覧表にしたものである。

```
>>CREATE F(SYSIN) DS(¥A) LIST
OFF TIME¥  ON GCD;LINELENGTH(78);
MATRIX GDD,GUU;
%***********************************************************************¥
%************  RIEMANNIAN GEOMETRY OF N DIMENSIONS  *******************¥
%***********************************************************************¥
N:=2¥
%*********************************** 2-DIMENSIONAL TORUS **************¥
GDD:= MAT( ( A**2 , 0 ),(0 , ( A*(SIN X1) + B )**2 ) )¥
%***********************************************************************;
GDET:=DET(GDD)¥
GUU:=1/GDD¥
ARRAY   GDDD(N-1,N-1,N-1),    KDDU(N-1,N-1,N-1),    KDDD(N-1,N-1,N-1),
        DKDDDU(N-1,N-1,N-1,N-1),    KKDDDU(N-1,N-1,N-1,N-1),
        RDDDU(N-1,N-1,N-1,N-1),    RDDDD(N-1,N-1,N-1,N-1),RDD(N-1,N-1),
        RDU(N-1,N-1) ;
%*********************************  DIFFERENTIATION(1)  ***************¥
FOR I:=0:N-1 DO FOR J:=0:N-1 DO
BEGIN;
        GDDD(0,I,J):= DF(GDD(I+1,J+1),X1);
        GDDD(1,I,J):= DF(GDD(I+1,J+1),X2);
END;
%***********************************************************************;
FOR I:=0:N-1 DO FOR J:=0:N-1 DO FOR K:=0:N-1 DO
KDDD(I,J,K):= (GDDD(I,J,K)+GDDD(J,K,I)-GDDD(K,I,J))/2;
CLEAR GDDD;
%*********************************  CHRISTOFFEL SYMBOLS  **************¥
FOR I:=0:N-1 DO FOR J:=0:N-1 DO FOR K:=0:N-1 DO
KDDU(I,J,K):=FOR P:=0:N-1 SUM KDDD(I,J,P)*GUU(P+1,K+1);
CLEAR KDDD;
%*********************************  DIFFERENTIATION(2)  ***************¥
FOR I:=0:N-1 DO FOR J:=0:N-1 DO FOR K:=0:N-1 DO
BEGIN;
          DKDDDU(0,I,J,K):= DF(KDDU(I,J,K),X1);
          DKDDDU(1,I,J,K):= DF(KDDU(I,J,K),X2);
END;
%***********************************************************************;
FOR I:=0:N-1 DO FOR J:=0:N-1 DO FOR K:=0:N-1 DO FOR L:=0:N-1 DO
KKDDDU(I,J,K,L):=FOR P:=0:N-1 SUM KDDU(I,P,L)*KDDU(J,K,P);
%*************************  WRITING THE CHRISTOFFEL SYMBOLS  **********¥
FOR K:=0:N-1  DO FOR I:=0:N-1  DO FOR J:=I:N-1 DO
WRITE "KDDU(", I+1, ",", J+1, ";", K+1, ") = ",KDDU(I,J,K)  ;
CLEAR KDDU;
%**************************************  CURVATURE TENSORS  ***********¥
FOR I:=0:N-1 DO FOR J:=0:N-1 DO FOR K:=0:N-1 DO FOR L:=0:N-1 DO
RDDDU(I,J,K,L):= DKDDDU(I,J,K,L)-DKDDDU(J,I,K,L)
             +KKDDDU(I,J,K,L)-KKDDDU(J,I,K,L);
CLEAR DKDDDU,KKDDDU;
FOR I:=0:N-1 DO FOR J:=0:N-1 DO FOR K:=0:N-1 DO FOR L:=0:N-1 DO
RDDDD(I,J,K,L):=FOR P:=0:N-1 SUM RDDDU(I,J,K,P)*GDD(P+1,L+1);
%**************************************  REPLACEMENT OF VARIABLES  ****¥
   LET X1=THETA, X2=PHI;
%***********************************************************************;
GDD; GDET;  GUU;
%*********************************  WRITING THE CURVATURE TENSOR ******¥
FOR I:=0:N-2 DO FOR J:=I+1:N-1 DO
BEGIN;
        FOR L:=J:N-1 DO WRITE "RDDDD(",
        I+1,",",J+1,",",I+1,",",L+1,    ") = ",RDDDD(I,J,I,L);
        FOR K:=I+1:N-2 DO FOR L:=K+1:N-1 DO WRITE "RDDDD(",
        I+1,",",J+1,",",K+1,",",L+1,     ") = ",RDDDD(I,J,K,L)  ;
END;
CLEAR RDDDD;
FOR I:=0:N-1 DO FOR J:=0:N-1 DO
            RDD(I,J):=FOR P:=0:N-1 SUM RDDDU(P,I,J,P);
%*********************************  WRITING RICCI'S TENSOR  ***********¥
FOR I:=0:N-1 DO FOR J:=I:N-1 DO
        WRITE "RDD(",I+1,",",J+1, ") = ",RDD(I,J);
FOR I:=0:N-1 DO FOR J:=0:N-1 DO
          RDU(I,J):=FOR P:=0:N-1 SUM RDD(I,P)*GUU(P+1,J+1);
%*********************************  THE SCALAR CURVATURE  *************¥
RO:=FOR P:=0:N-1 SUM RDU(P,P);
CLEAR RDD;
%********************************  GAUSS' TOTAL CURVATURE  ************¥
KO:= RO/(N*(N-1));
END;
>*
```

Fig. 1 REDUCE program for two-dimensional torus.

```
>>REDUCE3

KDDU(1,1;1) = 0

KDDU(1,2;1) = 0

KDDU(2,2;1) = ( - COS(X1)*(SIN(X1)*A + B))/A

KDDU(1,1;2) = 0

KDDU(1,2;2) = (COS(X1)*A)/(SIN(X1)*A + B)

KDDU(2,2;2) = 0

%*************************************************************************;
GDET;

 2             2  2                             2
A *(SIN(THETA) *A   + 2*SIN(THETA)*A*B + B )


GUU;
                      2
MAT(1,1) := 1/A

MAT(1,2) := 0

MAT(2,1) := 0
                                2  2                        2
MAT(2,2) := 1/(SIN(THETA) *A   + 2*SIN(THETA)*A*B + B )

%*********************************  WRITING THE CURVATURE TENSOR *******¥

RDDDD(1,2,1,2) =  - (SIN(THETA)*A)*(SIN(THETA)*A + B)

%*********************************  WRITING RICCI'S TENSOR  ***********¥

RDD(1,1) = (SIN(THETA)*A)/(SIN(THETA)*A + B)

RDD(1,2) = 0

RDD(2,2) = (SIN(THETA)*(SIN(THETA)*A + B))/A

%*********************************  THE SCALAR CURVATURE  *************¥

R0 := (2*SIN(THETA))/(A*(SIN(THETA)*A + B))

%********************************  GAUSS' TOTAL CURVATURE  ************¥

K0 := SIN(THETA)/(A*(SIN(THETA)*A + B))

END;
```

Fig. 2　Result of the computation.

第1図の3行目で（g_{ij}）と（g^{ij}）をMatrix 変数GDDとGUUであらわすことを宣言する。7行目で多様体の次元が2であることを指定。9行目では計量テンソルの成分を2×2行列の形で与える。今の場合座標変数はX１，X２までである。第11行及び第12行でdet（g_{ij}）と（g^{ij}）を計算させる。13～16行でArray変数を宣言する。この様にプログラムした場合Array変数の引数は0からN－1までの整数をとることになる。Matrix 変数の引数は1から始まる整数値をとるのでこの違いに注意すべきである。18～20行において，第1回目の座標微分を実行する。その結果を使って24～26行で第2種のChristoffel 記号の値を計算，27～30行で第1種のChristoffel 記号即ち接続係数を計算する。32～36行で第2回目の座標微分を行う。38～39行は曲率テンソルの計算の一部である。41～43行で接続係数の値を書かせる。45～50行で曲率テンソル$R_{ijk}{}^{p}$，R_{ijkp}を計算する。52行で変数X１，X２にもっと読みやすいTHETA(θ)，PHI(ϕ) という名前を代入，54行で（g_{ij}），det（g_{ij}），（g^{ij}）をすべて書かせる。56～63行にかけてR_{ijkp}をすべて書かせる。64～65行でRicci テンソルR_{ij}の計算，67～68行でそれらを書かせる。69～70行は$R_{i}{}^{j}$の計算，72～73行はスカラー曲率Rの計算，75行でGauss 曲率の計算をさせて終了する。REDUCEのセンテンスは；か¥でくぎられる。¥で終るセンテンスについては結果を出力しない。図2はREDUCE が返した計算結果の出力である。また,

Table 1 Variables and their meaning.

Type	Variable	Meaning
Scalar	GDET	$g=\det(g_{ij})$
	RO	$R=R_i{}^i$
	KO	K
Matrix	GDD(i, j)	g_{ij}
	GUU(i, j)	g^{ij}
Array	GDDD($k-1$, $i-1$, $j-1$)	$\frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}$
	KDDU($i-1$, $j-1$, $k-1$)	$\Gamma_{ij}{}^k$
	KDDD($i-1$, $j-1$, $k-1$)	$[ij;k]$
	KDDDU($p-1$, $i-1$, $j-1$, $k-1$)	$\frac{\partial}{\partial x^p}\Gamma_{ij}{}^k$
	KKDDDU($i-1$, $j-1$, $k-1$, $p-1$)	$\Gamma_{iq}{}^p\Gamma_{jk}{}^q$
	RDDDU($i-1$, $j-1$, $k-1$, $p-1$)	$R_{ijk}{}^p$
	RDDDD($i-1$, $j-1$, $k-1$, $p-1$)	R_{ijkp}
	RDD($i-1$, $j-1$)	R_{ij}
	RDU($i-1$, $j-1$)	$R_i{}^j$

%で始まる行はすべて註釈行である。

さてこのプログラムは任意(n)次元のRiemaun 空間について，少しかえるだけで適用できる。そのためには図1のプログラム中，次の4箇所を変えるだけで十分である。

(1) 7～9行

7行目はN：＝n¥（nは次元数をあらわす整数）とかえる。

8行目はコメント又は表題

9行目に，（g_{ij}）の要素を座標X1，X2，…，Xnの関数として$n\times n$行列の形であたえる。

(2) 20～21行

nケの変数X1，X2，…，Xnによる微分，全部でn行になるまで書き足すこと

(3) 34～35行

同上。

(4) 52行

X1からXnまでに読みやすい慣用的な変数を代入すればよい。もっともこの行は省いてもまちがいにはならない。

5. むすび

前節の終りに示された様に，我々のプログラムによって任意次元(n)のRiemann空間の曲率計算ができる。2次元の曲面の場合曲率テンソルの独立成分は$R_{12\ 12}$だけであるし，手で計算してもさほど時間がかからない。このプログラムが威力を発揮するのは$n=3$，4… と次元数が大きくなった時である。また，Riemann計量が正定値でなくなり，いわゆるLorentz計量になっても以上の定式化と計算は全く正常に機能する。即ち，$n=4$として，計量として一般相対論の計量を与えれば，一般相対論や宇宙論の曲率計算ができる。我々のプログラムがそれらの問題にどの様に応用されるかについては，別の機会に論ずるとしよう。

最後になりましたが，著者と共にRiemann 幾何学のセミナーを持って下さった西尾克義先生ならびに，数式処理について貴重な御意見をいただいた長本良夫先生に謝意を表します。

参　考　文　献

(1) 東京大学大型計算機センター：REDUCE プログラミング資料集，第１集〜第３集

(2) A. C. Hearn：*REDUCE User's Manual, Version 3.0*，Rand Corporation（1983）

(3) 立花俊一：リーマン幾何学，朝倉書店（1967）

(4) 河田敬義・大口邦雄：位相幾何学，朝倉書店（1967）