

電算機プロッターによる線形帰還制御系の安定度判定

関山正憲

(昭和49年9月10日受理)

Stability Decision of Linear Feedback Control System by Computer Plotter

Masatoshi SEKIYAMA

Abstract:—In the feedback controlled system which are possible to be expressed by a linear differential equation, drawing a "gain-phase curve" by a computer plotter is a very advantageous means to decide the stability of the system.

The advantages are as follows.

- 1) The enormous labour in the calculation with figures is removed.
- 2) Even if the curve traces at any passage, it is clear that the system lies in a stable state or an unstable state.
- 3) We can read from the curve surplus for the stability as "the gain margin" or "the phase margin".
- 4) The curve is not expressed by the polar coordinates as in Nyquist diagram, and by two curves as in Bode plot.

1. ま え が き

線形微分方程式によって表わし得る自動制御系においては、その安定度を論ずるのに、電算機プロッターによって「ゲイン-位相曲線」を描いて調べるのが極めて有利な手段となる。これを論ずるのが本報告の主題である。

衆知¹⁾のように、帰還制御を行う一般の自動制御系は制御部分の伝達関数を $G(S)$ 、帰還部分の伝達関数を $H(S)$ として表わすと、その総合伝達関数は $\frac{G(S)}{1+G(S)\cdot H(S)}$ にて示される。この際、これの分母を零に等しいとおい

$$1 + G(S) \cdot H(S) = 0$$

は系の安定度を論ずるのに極めて重要な式であって、特性方程式 (characteristic equation) と称せられている。S を未知数とすると代数方程式となるのでその根を求めて安定度を論じ得る。すなわち、根の所は不安定、根より離れる条件ほど安定とするのである。系の条件を変えることにより根の位置が変化するが、その存在す

る境界を求めて安定度の解析を行うのである。

しかし、特性方程式がSについて3次以上となると根を求めることが困難となり、仮りに解けたとしても解くために費す労力が大き過ぎるので、よい方法とはいえない。それでは根を求めずに安定度を論ずる方法はないかという点、次記のようなものが存在する。

i) Routh-Hurwitz criterion, ii) Nyquist diagram, iii) Bode plot, iv) Loci's of Const. M and α , v) Nichol's chart, vi) Loci's of Const. $\frac{1}{M}$ and $-\alpha$

これらのうち、ii) の Nyquist diagram が最も有名で優れた方法である。

Nyquist diagram を描くには ω の値を何種かえらび、それらに対するベクトル $G(j\omega) \cdot H(j\omega)$ の大きさおよび角度を逐一計算し極座標用グラフ用紙にプロットして綴り合わせることになる。ここでいうGおよびHは特性方程式に出てくるものと同一の関数であるが、ただSの代わりに $j\omega$ を代入したものである。 $G(j\omega) \cdot H(j\omega)$

の計算には大へんな労力を要する。しかも、曲線を滑かにするには ω の種類を多数えらばねばならぬので計算量は更に増加する。したがって、筆者は電算機プロッターを利用すべきであると思い付きこれを試みたものである。結局、Nyquist diagram の計画から Bode plot へ、更に進んで、ゲイン-位相曲線にて実行すると次の諸点で有利となることがわかった。

- i) 筆算すべき莫大な労力を電子計算機で有効に肩代りできる。
- ii) 曲線が如何なる径路をたどるにせよ適確に安定、不安定がわかる。
- iii) 安定に対する余裕度が、ゲイン余有および位相余有の形で曲線より読みとれる。
- iv) 面倒な極座標による表現ではないし、また2本の曲線でもない。

2. ゲイン-位相曲線の有利性

Nyquist diagram による方法は、図1のような帰還型自動制御系を考えたとき、一巡の伝達関数 $G(S) \cdot H(S)$ の S の代わりに $j\omega$ とし、 ω を $-\infty$ から $+\infty$ まで変えたときのベクトル $G(j\omega) \cdot H(j\omega)$ の極座標軌跡が複素数平面において、点 $(-1, 0)$ を包むと不安定、包まぬと安定と判定するのである。

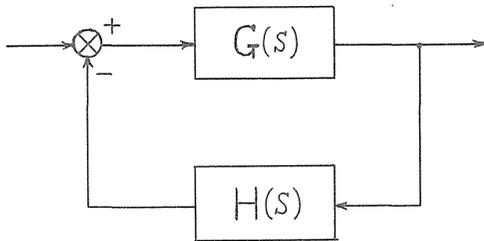


図1. 帰還制御系の基本ブロック図

The basic block diagram of feedback control system

ω の変化にしたがって描かれる軌跡が図2のように、実軸を -1 と 0 の間で切るときは安定、 -1 より左側で切るときは不安定となる。しかも、同じ安定でも軌跡が問題の点 $(-1, 0)$ より遠ざかるほど安定度は高いので、軌跡が実軸と交る $(-g, 0)$ と $(-1, 0)$ との間の距離 $|1 - g|$ は安定度を表す尺度となる。これを dB で表わした値 $\ell = 20 \log_{10} |1 - g|$ はゲイン

余有といわれている。

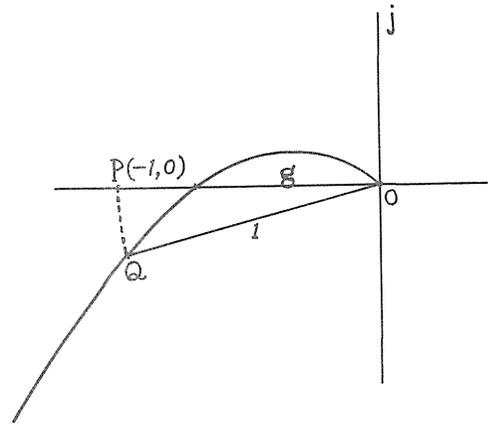


図2. ナイキスト線図
Nyquist diagram

更に、図2において問題の点 $(-1, 0)$ を P 、半径 1 の円と軌跡との交点を Q としたとき、ベクトル OQ とベクトル OP 間のはなれ具合を示す角度 $\angle QOP$ は安定度に関連し位相余有といわれる。

自動制御装置の良否はゲイン余有と位相余有とが適正値を有するか否かで一応決まる。その値で一般に通用するものを掲げると下表のようになる。

	ゲイン余有(dB)	位相余有(度)
サーボ機構	12 ~ 20	40 ~ 65
プロセス	定値制御	3 ~ 9
	追値制御	4 ~ 9
		50 以上

前にも述べたとおり、Nyquist diagram を描くには ω の値を何種かえらびそれらに対する $G(j\omega) \cdot H(j\omega)$ の大きさおよび角度を逐一計算し極座標用グラフ用紙にプロットして綴り合わさねばならぬ。しかし、その計算には大へんな労力を要する。この段階で電算機プロッターを使用するのは良い方法と思う。

しかし、実験問題として、 ω を 0 から ∞ まで変化していった場合(実在の周波数としては負はあり得ないので正の側のみを考える)、ベクトルの絶対値は $0.04 \sim 700$ というような極めて広範囲の変化を呈し軌跡全体をプロッター用紙内に収容することは困難である。問題の点 $(-1, 0)$ の附近のみグラフに取ればよいとも考えられるが、最初から如何なる ω のとき $(-1, 0)$ に近づくかわからない。また、これを包み込むか

どうかも描いて見て初めてわかることである。最初から適正な作図のできることはほとんどないので、電算機を介してプロッターに描かせ、はみ出せばそのプログラムの目盛の部分で訂正した電算機プロッターに描かせる。このような試行錯誤的方法により辛うじて問題点の附近のみが図示出来る。

これでは不便なので広範囲の変化を正確に用紙に収容する方法はないかと考え、絶対値および角度とも対数をとればよいと気が付いた。所がこの方法については既に先覚により Bode plot として実行されていることがわかった。すなわち、横軸には ω の 2π 分の 1 (これを f で示す) の対数である $\log f$ をとり、たて軸には絶対値の対数の 20 倍 (dB) および角度 (度) をプロットして出来る図 3、図 4 のようなグラフを作ることである。

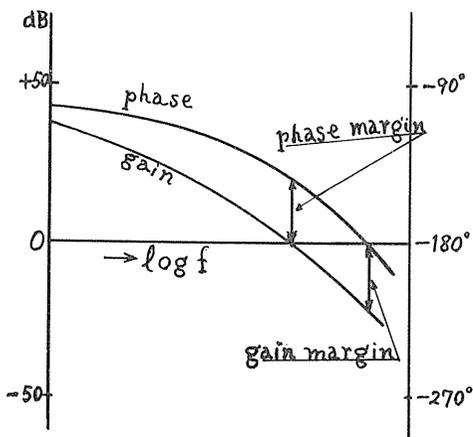


図 3. 安定状態を示すボード線図
Bode diagram in a stable state

これにおいては、dB を単位とするゲイン曲線と度を単位とする位相曲線との相対位置を、0 dB のレベルと 180° のレベルとが重なるように描き、図 3 のように位相曲線がその -180° レベルを切る点でゲインが負のときは安定、図 4 のように正のときは不安定とする。 $20 \log 1 = 0$ なる故、ゲインが負のときは絶対値は 1 より小なる場合で、 $1 > g$ となるからである。なお位相曲線が -180° の横軸を切る点からゲイン曲線までの dB 数はゲイン余有となり、ゲイン曲線が 0 dB の横軸を切る点より上の位相曲線までの度数は位相余有に当る。

しかるに、更に簡単に判別できる方法としてゲイン-位相曲線 (gain-phase curve) がある。Bode diag-

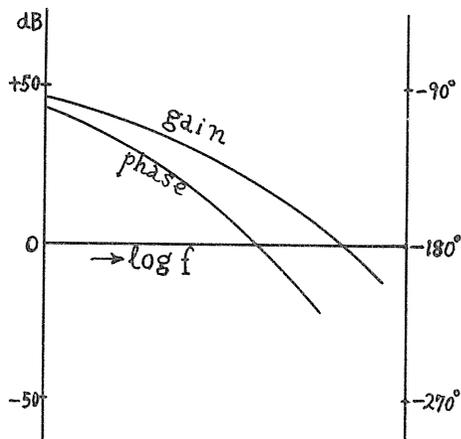


図 4. 不安定状態を示すボード線図
Bode diagram in an unstable state

ram から f を消去したものに該当し、図 5 のように横軸に角度を度で目盛り -180° の点でたて軸をひき dB で目盛る。 -180° のときのゲインが負ならば安定なので図 5 に示す実線は安定、ゲインが正の点線の場合は不安定と判定され、両軸の交点より下方の dB 数がゲイン余有、右側の度数が位相余有となる。

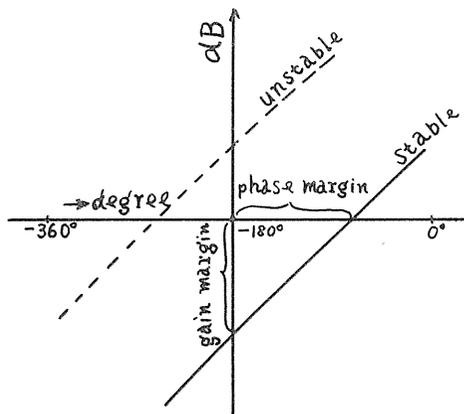


図 5. ゲイン-位相曲線
gain-phase curve

3. 電算機によるゲイン-位相曲線の作成例

$$a) G(S) \cdot H(S) = \frac{3.33}{S(1+0.03S)(1+0.027S)}$$

$S = j\omega$ として代入すると

$$G(j\omega) \cdot H(j\omega) = \frac{3.33}{j\omega(1+j0.03\omega)(1+j0.027\omega)}$$

$$= \frac{3.33}{j\omega} \cdot \frac{1}{1+j0.03\omega} \cdot \frac{1}{1+j0.027\omega}$$

となり3つのベクトルの相乗積として示されるので、その絶対値は

$$\frac{3.33}{\omega} \times \frac{1}{\sqrt{1+(0.03\omega)^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1+(0.027\omega)^2}}$$

その角度は各ベクトルの角度 $-\frac{\pi}{2}$, $-\tan^{-1} \frac{0.03\omega}{1}$,

$-\tan^{-1} \frac{0.027\omega}{1}$ をそれぞれ加え合わせたものになる。

ω を $1 \sim 10^4$ の範囲で 20 段階に変えるには $\omega = 10^{0.2 \times (21-I)}$ とおき、 I を $1, 2, 3, \dots, 21$ と 20 通りに変えることとする。

以上の関係を利用してプログラム (HARP 103 による) を組むと次のようになる。

```

DIMENSION W(21), GAIN(21), DEG(21)
DO 40 I=1, 21
W(I)=10.** (0.2*FLOATF(21-I))
GAIN(I)=20*LOGF(3.33/(W(I)*SQRTF((1+(0.03*W(I))**2)*(1+(0.027*W(I))**2))))
40 DEG(I)=180/3.14159*(-0.5*3.14159-ATANF(0.03*W(I))-ATANF(0.027*W(I)))
SET O
C0=0.
C6=6.
C8=8.
C180=-180.
SCALE DATA, C6, C8, (DEG(I), GAIN(I), I=1, 21)
CURVE 0, (DEG(I), GAIN(I), I=1, 21)
AXIS 0, C180, C0
X LABEL 41
41 FORMAT(3HDEG)
Y LABEL 42
42 FORMAT(2HDB)
END
    
```

以上のプログラムを電算機にかけプロッターに描かせたものをなぞると図6. のようになる。これよりゲイン余有は約 26 dB, 位相余有は約 80° と読みとれる。

b) $G(S) = \frac{0.4(S+0.1)}{S^2(S+1)(S^2+0.2S+1)}, H(S) = TS+1$

の場合

$$G(j\omega) \cdot H(j\omega) = \frac{0.4(j\omega+0.1)(T \cdot j\omega+1)}{-\omega^2(j\omega+1)(-\omega^2+j0.2\omega+1)}$$

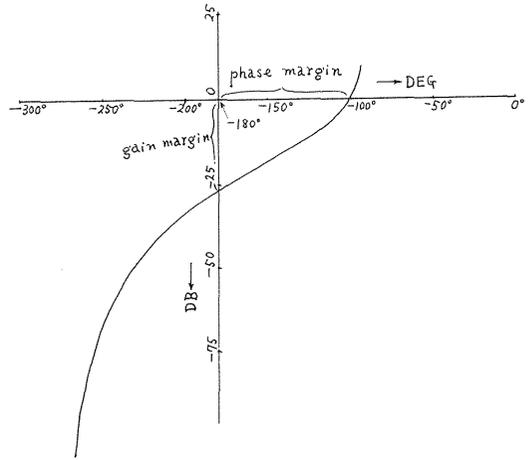


図 6. gain-phase curve of

$$G(S) \cdot H(S) = \frac{3.33}{S(1+0.03S)(1+0.027S)}$$

$$= \frac{0.4}{\omega^2} \cdot \frac{0.1+j\omega}{1+j\omega} \cdot \frac{1+jT\omega}{\omega^2-1-j0.2\omega}$$

このベクトルの絶対値は

$$\frac{0.4}{\omega^2} \times \sqrt{\frac{0.01+\omega^2}{1+\omega^2}} \times \sqrt{\frac{1+(T\omega)^2}{(1-\omega^2)^2+(0.2\omega)^2}}$$

その角度は度数で

$$\frac{180}{\pi} \left[-\pi + \left(\tan^{-1} \frac{\omega}{0.1} - \tan^{-1} \frac{\omega}{1} \right) + \left(\tan^{-1} \frac{T\omega}{1} - \tan^{-1} \frac{-0.2\omega}{\omega^2-1} \right) \right]$$

したがって、プログラムは

```

DIMENSION T(10), W(21), GAIN(10, 21)
DEG(10, 21)
P=3.14159
DO 16 I=1, 10
T(J)=10.** (0.2*FLOATF(22-I))
GAIN(J, I)=20*LOGF(0.4/W(I)**2*SQRTF(((0.01+W(I))**2)/(1+W(I)**2))*SQRTF(((1-(T(J)*W(I))**2)/(1-W(I)**2)**2+(0.2*W(I))**2)))
16 DEG(J, I)=180/P*(-P*ATANF(10*W(I))-ATANF(W(I))+ATANF(T(J)*W(I))-ATANF(-0.2*W(I))/(W(I)**2-1.))
SET O
C0=0.
C6=6.
C8=8.
C180=-180.
SCALE DATA, C6, C8, ((DEG(J, I), GAIN(J, I),
    
```

```

I=1, 21), J=1, 10)
DO 40 J=1, 10
40 CURVE 0, (DEG(J, I), GAIN(J, I), I=1, 21)
  AXIS 0, C180, C0
  X=LABEL 100
100 FORMAT(3H DEG)
  Y LABEL 101
101 FORMAT(2H DB)
END
    
```

以上のプログラムを電算機にかけプロッターに描かせたものをなぞると図7のようになる。その場合Tが0.0001から 10^5 と変わっても何れの場合でも安定である。

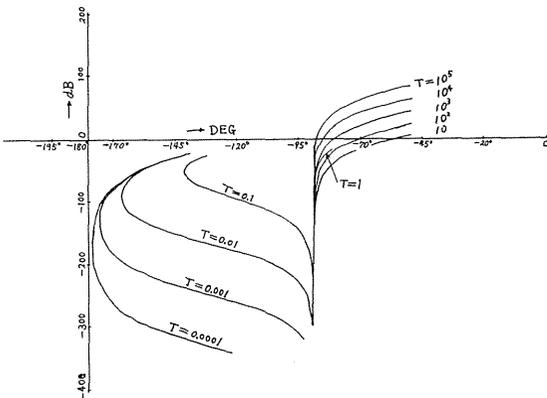


図7. Gain-Phase curve of $G(S) \cdot H(S) = \frac{0.4(0.1+S)(1+TS)}{S^2(1+S)(1+0.2S+S^2)}$

c) 図8に示す系の場合

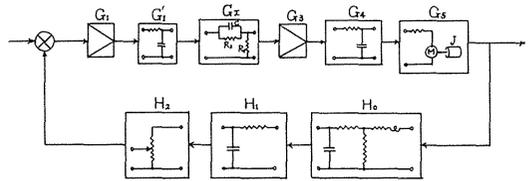


図8. 電動機の回転数を自動制御する系の例
A Sample of motor speed feedback control system

図8は電動機の回転数を自動制御する系の例で、各ブロックの伝達関数は次のようになる。

$$G_1=5, \quad G_1'=\frac{1}{1+1.32S}, \quad G_x=\frac{R_1}{R_1+R_2} \cdot \frac{1+CR_2S}{1+\frac{CR_1R_2}{R_1+R_2}S}$$

ただし $R_1=20 \text{ k}\Omega$
 $R_2=5, 10, 20, 40 \text{ k}\Omega, \quad G_3=363,$

$$G_4=\frac{1}{1+0.5 \times 10^{-3}S}, \quad G_5=\frac{6.2}{1+0.021S}$$

$$H_0=\frac{1}{(1+9 \times 10^{-6}S)(1+3.3 \times 10^{-3}S)},$$

$$H_1=\frac{1}{1+6.6 \times 10^{-3}S}, \quad H_2=0.5$$

以上の関係からベクトル $G_1 \cdot G_1'(S) \cdot G_x(S) \cdot G_3 \cdot G_4(S) \cdot G_5(S) \cdot H_0(S) \cdot H_1(S) \cdot H_2$ のゲイン一位相曲線を描くために作成したプログラムを示すと図9のようになる。

```

* GAIN-PHASE CURVE OF 18Pr-3 47.1.26.
DIMENSION R2(4),W(21),G0(21),Gx(21),HD(21),H1(21),GAIN(21),A0(21),AX(21),A5(21),
A0(21),A1(21),DEG(21,4),G5(21)
R1=20,E=3
G1=5,
C0=.5E=6
G3=363,
G4=1,
H2=0,5
DO 40 K=1,4
R2(1)=5,*,2,*(1-1)*1,E+3
DO 40 K=1,21
W(K)=10,*(0.2*FLOAT(F(21-K)))
G0(K)=1,/SQRTF(1,*(1.32*W(K)))**2)
GX(K)=R1/(R1+R2(1))*SQRTF(1,*(R2(1)*C*W(K)))**2)/SQRTF(1,*(R1+R2(1))/(R1+R2(1))*C*W(K))**2)
G5(K)=6.2/SQRTF(1,*(0.021*W(K)))**2)
HD(K)=1,/SQRTF(1,*(9,E=6*W(K)))**2)/SQRTF(1,*(3.3E=6*W(K)))**2)
H1(K)=1,/SQRTF(1,*(6.6E=3*W(K)))**2)
GAIN(K,1)=20,*,LOGF(G1*G0(K)*GX(K)*G3*G4*G5(K)*H0(K)*H1(K)*H2)
A0(K)=ATANF(1,32*W(K))
A1(K)=ATANF(R2(1)*C*W(K))-ATANF(R1+R2(1)/(R1+R2(1))*C*W(K))
A5(K)=ATANF(0.021*W(K))
A0(K)=ATANF(9,E=6*W(K))-ATANF(3.3E=6*W(K))
A1(K)=ATANF(6.6E=3*W(K))
40 DEG(K,1)=180./3.14159*(A0(K)+AX(K)+A5(K)+A0(K)+A1(K))
SET 0
C0=0,
C6=6,
C8=8,
C180=180,
SCALE DATA,C6,C8,((DEG(K,1),GAIN(K,1)),K=1,21),1=1,4)
DO 41 I=1,4
41 CURVE 0,(DEG(K,1),GAIN(K,1),K=1,21)
  AXIS 0,C180,C0
  X=LABEL 100
100 FORMAT(3HDEG)
  Y LABEL 101
101 FORMAT(2HDB)
END
    
```

図9. 図8に示す系のゲイン一位相曲線を描くためのプログラム

The program to draw the gain-phase curve of the system which showed by Fig. 8.

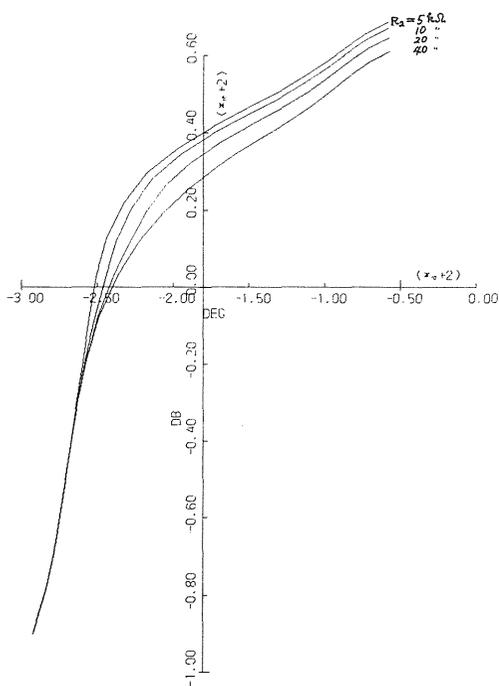


図 10. プログラム図9により得たゲイン一位相曲線
The gain-phase curve from the program Fig. 9.

これによる結果は図 10 に示すものとなる。4 本の曲線は左から順に R_2 が 5, 10, 20, 40 k Ω に対するものであるが、何れも直交軸より見て左上の第 2 象限を過ぎるので不安定状態にあることを意味する。安定に動作させるためには $R_2 = 40$ k Ω の場合でも 30 dB は増巾度を下げねばならない。図において、両軸ともその目盛の係数が $\times 10^{-2}$ と示されているがこれはプロッタの表現法の一つで $\times 10^2$ と同じく 100 倍の意味である。

参 考 文 献

- 1) : たとえば Stanley M. Shinnars: - Control System Design P. 104 ~ P. 214