単位区間上の微分。II

芳賀義則*

（昭和62年8月31日受理）

Derivations on the Unit Interval. II

Yoshinori HAGA*

Abstract — We continue the investigation on measure valued derivations. Decomposing such a derivation into three parts --- absolutely continuous part, continuous singular part and discrete part --- we study in the present paper mainly the discrete part. Especially we show that any discrete part cannot be a closed derivation. Finally, it is shown that our standard derivation, a natural closed extension of the derivation $\frac{d}{dt}$, has no more any closed extension.

1. 単位区間 I＝［0, 1］上の連続関数全体に一様収束ノルムを与えたC^*環を C(I) で表し，C(I) 上の連続線形汎関数すなわちＩ上のRadon測度全体（Ｉ上の有界正則なBorel測度といってもよい）の全体を M(I) で表す。関数や測度はすべて実数値とする。このとき M(I) は半開区間（0, 1］で右連続かつ $f(0)=0$ なる有界変動関数 f 全体の空間と M(I) $\ni f \longleftrightarrow df$ によって同一視できる。M(I) はノルム $\|\mu\|=\sup\{|\mu(\varphi)|:\|\varphi\|=1\}$ によってBanach空間であり，$\alpha\in$ C(I) と $\mu\in$ M(I) との積 $\alpha\mu\in$ M(I) を

$$
\begin{aligned}
(\alpha\mu)(\varphi) &= \mu(\alpha\varphi) \\
&= \int \alpha(t)\varphi(t)\mu(dt) \qquad (\varphi\in \mathrm{C(I)})
\end{aligned}
$$

によって定義すれば，M(I) は環 C(I) 上のBanach加群（$\|\alpha\mu\| \leqq \|\alpha\|\|\mu\|$）である。従って線形写像 δ : C(I)→M(I) について微分律

$$
\delta(\alpha\beta) = \beta\delta(\alpha)+\alpha\delta(\beta) \qquad (\alpha,\ \beta\in \mathrm{C(I)})
$$

は M(I) における等式として意味をもつ。［7］においてこのような δ をＩ上の微分とよぶことにした。Banach環 $\mathcal{A}$ から$\mathcal{A}$ー加群への微分については［2］,［3］,［4］などにも幾つかの結果が示されている。なお，δ の定義域 $\mathcal{D}(\delta)$ が C(I) の稠密な部分環であることと定数関数を含むことは仮定する。［7］においては［6］に倣って閉微分の幾つかの性質を示したが，さらに考察を続けることにする。

Ｉ上のLebesgue測度を m で表す。$\mu\in$ M(I) はすべての１点集合 E に対して $\mu(E)=0$ となるとき連続であるという。また $m(E)=0$ なる集合Eに対して常に $\mu(E)=0$ となるとき μ は絶対連続であるという。μ が $m(E_0)=0$ なる或る集合 E_0 の上に集中しているときは特異であるといい，特に E_0 が高々可算集合であるときは μ は離散的であるという。任意の測度 $\mu\in$ M(I) は

$$
\mu(E)=A(E)+S(E)+D(E) \qquad (E：m\text{可測集合})
$$

の形に一意に表すことができる。ただし，A は絶対連続，S は連続かつ特異，D は離散的な測度である（［8］)。いまＩ上の微分 δ に対し測度 $\delta(\alpha)$（$\alpha\in\mathcal{D}(\delta)$）を絶対連続部分 $A(\alpha)$，連続特異部分 $S(\alpha)$，離散部分 $D(\alpha)$ に分ければ，α にこれら3種の測度を対応させる作用素 A，S，D は明らかに線形であり，しかも微分律を満た

＊茨城大学工学部共通講座（応用数学）（日立市中成沢町）
Common Chairs (Applied Mathematics), Faculty of Engineering, Ibaraki University, Hitachi 316, Japan

す。実際 δ の微分律により，α，$\beta\in\mathcal{D}(\delta)$ に対し

$$\begin{aligned}&A(\alpha\beta)+S(\alpha\beta)+D(\alpha\beta)\\&=\beta(A\alpha+S\alpha+D\alpha)+\alpha(A\beta+S\beta+D\beta)\end{aligned}$$

であり，絶対連続，連続特異，離散的の各性質は連続関数を乗じても変わらない（測度0はどの性質も持つとする）から，両辺の各部分を比較することによってそれぞれの微分律が得られる。従って以下において δ を3つの部分 A，S，D に分けて考えることにし，今回は主として D を考察する。

2. 先ず離散測度値の部分 D を考察する。簡単のため，測度 μ の1点 $\{a\}$ に対する値 $\mu(\{a\})$ を $\mu\{a\}$ と略記することにする。

定理1. （[6]1.2.1）$\mathcal{D}(D)=\mathrm{C}(\mathrm{I})$ ならば D は恒等的に0である。

証明．$\alpha\in\mathrm{C}(\mathrm{I})$ と任意の $a\in\mathrm{I}$ に対し

$$\alpha-\alpha(a)1=\xi-\eta$$

を $\xi\eta=0$ なる正の関数 ξ，η へのいわゆるJordan分解とする。

$$\xi(a)-\eta(a)=\{\alpha-\alpha(a)1\}(a)=0$$

だから $\xi(a)=\eta(a)=0$ である。そして $\mathrm{D}(1)=0$ であるから

$$\begin{aligned}D(\alpha)&=D(\alpha-\alpha(a)1)\\&=D(\sqrt{\xi}^2-\sqrt{\eta}^2)\\&=2\{\sqrt{\xi}D(\sqrt{\xi})-\sqrt{\eta}D(\sqrt{\eta})\}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}D(\alpha)\{a\}=2[&\sqrt{\xi(a)}D(\sqrt{\xi})\{a\}\\&-\sqrt{\eta(a)}D(\sqrt{\eta})\{a\}]=0\end{aligned}$$

従って $D(\alpha)=0$，すなわち $D\equiv0$ である。

この証明は[6]などと同じroutineなものであるが，[3],[2]によればC*－環 $\mathcal{A}$ 全体からBanach $\mathcal{A}$－加群への微分は常に連続であるから，後述の定理4によっても上の定理は得られる。

離散測度値の微分の典型的な例は[7]の定理4に関連して述べたものがある。すなわち1点 $a\in\mathrm{I}$ における Dirac測度を εa として

$$D(\alpha)=\alpha'(a)\,\varepsilon a\quad(\alpha\in\mathrm{C}^1(\mathrm{I}))$$

によって定義される微分 D である。ただし[7]でこの D を閉微分の例としたが，D は閉ではない。例えば

$$\alpha_n(t)=\frac{1}{n}\sin nt,\quad a=0$$

とすれば，$n\to\infty$ のとき $\alpha_n\to0$，$D(\alpha_n)\to\varepsilon_0\neq D(0)$ だからであり，D は可閉ですらない。実はこれはどの離散測度値微分に対しても成り立つことである（定理4）。

離散値微分 D に対し $D(\alpha)\{a\}\neq0$ なる $\alpha\in\mathcal{D}(D)$ が存在するような点 a の集合を A_D で表すことにする。

定理2. 離散測度値微分 D は $\mathcal{D}(D)=\mathrm{C}^1(\mathrm{I})$ でかつ条件

$$\alpha'(a)=0\quad ならば\quad D(\alpha)\{a\}=0 \tag{1}$$

を満たすならば

$$D(\alpha)=\textstyle\sum_n C_n\,\alpha'(a_n)\,\varepsilon a_n\quad(\alpha\in\mathrm{C}^1(\mathrm{I})) \tag{2}$$

の形に表せる。ここで $\mathrm{A}_D=\{a_n: n=1,2,3,\cdots\}$ は I の高々可算個の点，$\{C_n: n=1,2,3,\cdots\}$ は0を含まない $\sum_n|C_n|<\infty$ なる実数列である。

証明．$\{a_n\}$，$\{C_n\}$ が定理の条件を満たすならば，$\alpha\in\mathrm{C}^1(\mathrm{I})$ に対して α' も有界な関数だから(2)の右辺は有界測度を表し，D が微分律を満たすことは明らかだから(2)は $\mathcal{D}(D)=\mathrm{C}^1(\mathrm{I})$ の離散測度値微分 D を定義し(1)も成り立つ。

逆に $\mathcal{D}(D)=\mathrm{C}^1(\mathrm{I})$ でかつ(1)を満たす離散測度値微分を $D\neq0$ として，A_D から1点 a を選ぶ。条件(1)によって任意の $\alpha\in\mathrm{C}^1(\mathrm{I})$ に対し

$$D(\alpha)\{a\}=C_\alpha\,\alpha'(a)\,\varepsilon a \tag{3}$$

とおける（$\alpha'(a)=0$ なら C_α は任意でよい）。いま $\alpha'(a)\neq0$，$\beta'(a)\neq0$ なる任意の2つの関数 α，$\beta\in\mathrm{C}^1(\mathrm{I})$ に対し $\alpha'(a)=k\beta'(a)$（k は定数）とすれば，D の線形性により

$$D(\alpha-k\beta)\{a\}=C_\alpha\alpha'(a)\,\varepsilon a-C_\beta\,k\beta'(a)\,\varepsilon a$$

$$=(C_\alpha - C_\beta)\,\alpha'(a)\,\varepsilon a$$

(1)により左辺は0だから $C_\alpha = C_\beta$ である。よって(3)の C_α は α に無関係な定数であり，右辺は微分律を満たす。(2)は(3)の $a \in \mathrm{A}_D$ 全体に関する1次結合であるが，特に関数 $\alpha(t)=t$ を考えれば $D\alpha = \sum_n C_n\,\varepsilon a_n$ となり，これが有界測度であるためには $\{a_n\}$ は高々可算個で $\sum_n C_n$ は絶対収束でなければならない。

この定理の条件(1)は不要かも知れない。上の証明には D の微分律を用いていない。D が閉微分ならば(1)が不要であることは[7]の定理4によって分かるが，下の定理4で示すように D は閉微分では有り得ない。簡単のため $a=0$ として，$\alpha \in \mathrm{C}^1(\mathrm{I})$，$\alpha(0)=\alpha'(0)=0$ のとき $\sqrt{\alpha} \in \mathrm{C}^1(\mathrm{I})$ となるならば，定理1の証明と同様にして(1)が成り立つことが示せるが，それには反例 $\alpha(t)=t^4\sin^2(1/t)\,(t \neq 0)$，$\alpha(0)=0$ がある。[5]のProp. 1.1も値域が $\mathrm{C}(\mathrm{I})$ でない上の定理には適用できない。なお，$\mathrm{C}^1(\mathrm{I})$ はノルム $\|\alpha\|_d = \|\alpha\| + \|\alpha'\|$ でSilov環になるから，α が点 a の近傍で0ならば $D(\alpha)\{a\}=0$ になる([7]定理3の証明参照)。また $\lim_{t\to 0}\alpha(t)/t^2=0$ ならば $D(\alpha)\{a\}=0$ となることが分かる。

定理2で $\mathcal{D}(D)=\mathrm{C}^1(\mathrm{I})$ としたが，(2)は関数 α が各点 a_n で有限な右(または左)片側微係数を持てば定義できるし，そのような連続関数全体を定義域としても D が微分になることは明らかである。

また離散測度値微分の中には点 $a \in \mathrm{A}_D$ で片側微分可能ですらない関数でも定義域に含む D がある。いま τ を I の同相写像とし $\alpha_\tau \in \mathrm{C}(\mathrm{I})$ を

$$\alpha_\tau(t) = a(\tau(t))$$

で定義し

$$\mathrm{C}^1{}_\tau(\mathrm{I}) = \{\alpha_\tau : \alpha \in \mathrm{C}^1(\mathrm{I})\}$$

とすれば，一般にはその中には或る点で片側微分可能ですらない関数も含み得る(例えば $\tau(t)=\sqrt{t}$，$\alpha(t)=t$ とすれば $\alpha_\tau(t)=\sqrt{t}$ は $t=0$ で有限な微係数を持たない)。ところが $a \in \mathrm{I}$ に対して $\tau(a)=a$ ならば

$$D(\alpha_\tau)\{a\} = C\,\alpha'(a)\,\varepsilon a \qquad (\mathrm{C}\text{は定数})$$

で定義される D は $\mathcal{D}(D)=\mathrm{C}^1{}_\tau(\mathrm{I})$ となる微分である。実際 $\mathcal{D}(D)$ の $\mathrm{C}(\mathrm{I})$ における稠密性と D の線形性は明らかであるし，微分律は

$$\begin{aligned} D(\alpha_\tau\beta_\tau)\{a\} &= D(\alpha\beta)_\tau\{a\} \\ &= (\alpha\beta)'(a) \\ &= \alpha(a)\beta'(a)\,\varepsilon a + \beta(a)\alpha'(a)\,\varepsilon a \\ &= \alpha_\tau(a)D(\beta_\tau)\{a\} + \beta_\tau(a)D(\alpha_\tau)\{a\} \end{aligned}$$

によって確かめられる。

この手法を用いて $\mathrm{C}(\mathrm{I})$ の任意の関数が或る自明でない微分の定義域に含まれることを示そう。

定理3. 任意の $\alpha_0 \in \mathrm{C}(\mathrm{I})$ に対して $\alpha_0 \in \mathcal{D}(D)$ なる恒等的には0でない離散測度値微分 D が存在する。

証明．定数関数を加えることによって $\alpha_0(0)=0$ としてよいし，また D は0における離散測度値の微分としてよい。

$$M(t) = \max\{|\alpha_0(s)| : 0 \leqq s \leqq t\} + t$$

は狭義単調増加関数だから逆関数 $M^{-1}(t)$ が存在してそれも狭義単調増加であり，従って $M^{-1}(t^2)$ は $M^{-1}(t_0^2)<1$ なる或る $t_0 \in \mathrm{I}$ に対して区間 $[0, t_0]$ と $[0, M^{-1}(t_0^2)]$ の間の同相写像である。それを $\mathrm{I}\to\mathrm{I}$ の同相写像 τ に拡張しておく。任意の $\alpha \in \mathrm{C}(\mathrm{I})$ に対して

$$\alpha_\tau(t) = \alpha(\tau(t))$$

と定義すれば，特に $\alpha_{0\tau}$ に対しては $t \leqq t_0$ ならば

$$|\alpha_{0\tau}(t)| = |\alpha_0(M^{-1}(t^2))| \leqq M(M^{-1}(t^2)) = t^2$$

であるから

$$0 \leqq \lim_{t\to+0} \frac{|\alpha_{0\tau}(t)|}{t} \leqq \lim_{t\to+0} t = 0$$

すなわち $\alpha_{0\tau}$ は点0において右側微係数0をもつ。そこで

$$\mathcal{D}(D) = \{\alpha \in \mathrm{C}(\mathrm{I}) : \alpha_\tau \text{は0で右側微分可能}\}$$

として

$$D(\alpha)\{0\} = \alpha_\tau'(0)\,\varepsilon_0$$

によって D を定義すれば，特に $\alpha_0 \in \mathcal{D}(D)$ である。また関数 $\alpha(t)=\sqrt{M(t)}$ に対しては0の近傍で $\alpha_\tau(t)=t$ となるから $D(\alpha)\{0\}=\varepsilon_0$，すなわち D は恒等的には0でない。

定理4. 0以外の離散測度値微分 D は可閉微分であり得ない。

証明. $a \in A_D$ とし, $\alpha_0 \in \mathcal{D}(D)$ に対して $D(\alpha_0)\{a\} \neq 0$ とする。 $\alpha_0(a)=0$ としてよい。 $n=1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$U_n = \left(a - \frac{1}{n},\ a + \frac{1}{n} \right) \cap \mathrm{I}$$

$$F_n = \left[a - \frac{1}{n+1},\ a + \frac{1}{n+1} \right] \cap \mathrm{I}$$

とすると, D が閉ならば [7]の定理2によって各 n に対して

$$\beta_n \mid U_n^C = 0\,,\ \beta_n \mid F_n = 1\,,\ 0 \leqq \beta_n \leqq 1$$

なる $\beta_n \in \mathcal{D}(D)$が存在する。このとき

$$\alpha_0 \beta_n \mid F_n = \alpha_0 \mid F_n\,,\ \alpha_0 \beta_n \mid U_n^C = 0\,,$$
$$|\, \alpha_0 \beta_n \,|\, | \, U_n \leqq |\, \alpha_0 \,|\, | \, U_n$$

であるから, $n \to \infty$ のとき $\alpha_0 \beta_n \to 0$ である。一方 [7]の定理3によって $D(\alpha_0)\{a\}$ はaの近傍におけるα_0によって決まるから

$$D(\alpha_0 \beta_n)\{a\} = D(\alpha_0)\{a\} \neq 0$$

となる。よって D は可閉であり得ない。

微分の理論の中で興味があるのは閉微分であり, この定理によって閉微分には離散測度値の部分は含まれないことになるから, 離散測度値微分の考察はこれで終えることにする。

3. [7]で述べたように測度値微分の標準的な例は連続な有界変動関数 α にStieltjes測度 $d\alpha$ を対応させる作用素 d である。すなわち I 上の連続な有界変動関数の全体 CV(I) は C(I) の稠密な部分環であって, $\alpha \in \mathrm{CV(I)}$ に対応するStieltjes測度 $d\alpha$ とは

$$d\alpha([a,\ b]) = \alpha(b) - \alpha(a) \quad ([a,\ b] \subset \mathrm{I})$$

によって生成される測度であるが, このときの作用素d : CV(I)→M(I) は閉微分である。$\alpha \in C^1(\mathrm{I})$ ならば $d\alpha = \alpha'(t)\,dt$ となるから, dはC^1(I) を定義域とする微分 $\dfrac{d}{dt}$: C(I)→C(I) の自然な閉拡張である。ただし d の値域 M(I) におけるノルムと $\dfrac{d}{dt}$ の値域である C(I) における一様ノルムとは異なることは注意を要する。

dは閉微分であるが, 一般に閉微分 δ については定理4により離散測度値の部分を含まない。従ってその値 $\delta\alpha$ に対応する有異変動関数は連続となる。すなわち $\alpha \in \mathcal{D}(\delta)$ に対して $\delta\alpha = \alpha\beta$ となるような $\beta \in \mathrm{CV(I)}$ が定数の差を除いて唯一つ定まる。

[7]において標準的な微分 d について, その閉拡張が存在するか, という問題を提起した。C(I)→C(I) の閉微分の閉拡張は常に一般Cantor 関数をその閉微分の核 $\mathcal{K}(\delta)$ に付け加えるものであることと, d については一般Cantor関数が $\mathcal{D}(d)=\mathrm{CV(I)}$ にすべて含まれてしまうことから, d には閉拡張は存在しないだろうと推定されるが, d の値域が M(I) であることや M(I) と C(I) の位相とが異なることからもそれは自明とはいえない。

定理5. 標準的な閉微分 d は閉拡張を持たない。

証明. δ を d の閉拡張であるとする。$\alpha \in \mathcal{D}(\delta)$ に対し上に注意したように $\delta\alpha = d\beta$ となる $\alpha \in \mathrm{CV(I)}$ が存在し

$$\delta(\alpha - \beta) = \delta(\alpha) - \delta(\beta) = d\beta - d\beta = 0$$

となるから $\alpha - \beta \in \mathcal{K}(\delta)$。よって

$$\mathcal{D}(\delta) = \mathrm{CV(I)} + \mathcal{K}(\delta)$$

となるから, d の閉拡張はあるとしてもその核 $\mathcal{K}(\delta)$ が広がるだけである。δ が閉であるから $\mathcal{K}(\delta)$ は C(I) の閉部分環であり, そのスペクトルを X とすれば連続な全射 Φ : I→X で $\mathcal{K}(\delta) = \Phi^0(C(X))$ となるものが存在する。ここで Φ^0:C(X)→C(I) は $f \in C(X)$に対して $(\Phi^0 f)(t) = f(\Phi(t))$ によって定義される。従って, $x \in X$ に対してIの2点 $a,\ b$ が $\Phi^{-1}(x)$ に属するならば, $\alpha \in \mathcal{K}(\delta)$ に対しては常に $\alpha(a) = \alpha(b)$ となる。$a < b$ とするとさらに $\alpha \in \mathcal{K}(\delta)$ は区間 $[a,\ b]$ で定数値をとることを示そう。定数関数を加えることによって $\alpha(a) = \alpha(b) = 0$ としてよい。任意の $\beta \in C^1(\mathrm{I})$ に対して

$$\gamma(t) = -\alpha(t)\beta(t) + \int_0^t \alpha(t)\beta'(t)\,dt$$

とおけば, C^1(I)では$\delta = d$であるから

$$\delta(\gamma)=-\delta(\alpha)\beta-\alpha\delta(\beta)+\delta\left(\int_0^t \alpha\beta' dt\right)$$
$$=-0\cdot\beta-\alpha d\beta+\alpha\beta' dt=0$$

すなわち $\gamma\in\mathcal{K}(\delta)$ であるから

$$\int_a^b \alpha\beta' dt=\{\gamma(b)+\alpha(b)\beta(b)\}-\{\gamma(a)+\alpha(a)\beta(a)\}$$
$$=\gamma(b)-\gamma(a)=0$$

となる。これは α が区間 $[a,\ b]$ 上の任意の連続関数と直交していることを示しているから，α は $[a,\ b]$ 上で常に0である。

結局各 $\alpha\in\mathcal{K}(\delta)$ は任意の実数 t に対して $\alpha^{-1}(t)$ が I の連結集合（空集合を含む）になるような連続関数となるから単調関数であり，よって $\alpha\in CV(I)$ である。従って $\mathcal{D}(\delta)=CV(I)$ となり $\delta=d$ である。

上の $\alpha\in\mathcal{K}(\delta)$ が実は一般Cantor関数になることは[1]の（2.1.3），[6]の（2.1.3）と同様にして示すことができ，実際は定数になる。

参　考　文　献

(1) F. M. Goodman：Closed derivations in commutative C*-algebras, J. Funct. Anal., 39 (1980), 308－346.

(2) R. J. Kadison－J. R. Ringrose：Fundamentals of the theory of operator algebras. I, Academic Press, (1983).

(3) R. Longo：Automatic relative boundedness of derivations in C*-algebras, J. Funct. Anal., 34 (1979), 21－28.

(4) J. R. Ringrose：Automatic continuity of derivations of operator algebras, J. London Math. Soc. (2) 5 (1972), 432－438.

(5) S. Sakai：The theory of unbounded derivations in C*-algebras, Lecture notes in Copenhagen Univ. and Univ. of Newcastle upon Tyne, (1977).

(6) J. Tomiyama：The theory of closed derivations in the algebra of continuous functions on the unit interval, Lecture at National Tsing Hua Univ., Taiwan, (1983).

(7) 芳賀：単位区間上の微分．I，茨城大学工学部研究集報，34 (1986)，171－174.

(8) シーロフ・グーレヴィチ：積分・測度・導関数，東京図書，(1968).