多相交流による2次元電界

荒又光夫，皆川信也*，寺門龍一

On the Two-Dimensional Electric Field by Polyphase Alternating Current

Mitsuo ARAMATA, Shinya MINAKAWA and Ryûiti TERAKADO

Abstract: — There have already appeared various reports on the electrostatic field. However, in this report, the equipotential lines in the form of the effective value and the equiphase lines are described, after the electric fields produced by polyphase alternating current are discussed. The experimental results suggest that an A. C. potentiometer may be successfully devised by simple apparatus.

1. まえがき

2次元的な空間に多相交流電圧を加えた場合，その電界の等電圧実効値線を求めてみた。

静電界と電流界との間には，よく知られているように類似性があるので，実験は抵抗を有する2次元的な領域に電極を設けて交流を加えた電流場について行った。この方法で，2次元的な抵抗板上にえられる等電圧実効値線，等位相線を求め，理論的な考察と，えられた実験結果の図形より2次元交流ポテンショメータとしての利用を見いだした。

2. 原　理

適当な形の固体または液体の抵抗体を考え，それに加える多相交流の相数に応じた電極を任意の位置に配置する。いま電極に多相交流電圧を加えると，その形は簡単に推測できないとしても，かならず等電位実効値線と等位相線は存在する。ここでは抵抗板の形状を円形とし，その周辺に対称電極を配置し多相交流電圧を加える場合につき考えを進める。

一般に無限2次元空間に，正3角形の頂点になるように配置された3つの点電極に3相交流電圧を加えた場合，空間内の任意の点Pの電位は

$$v(r,\theta)=\frac{I_m\Re}{2\pi}\left\{sin\ \omega t\cdot log\frac{1}{s_1}+sin\left(\omega t-\frac{2}{3}\pi\right)\cdot log\frac{1}{s_2}+sin\left(\omega t-\frac{4}{3}\pi\right)\cdot log\frac{1}{s_3}\right\}$$

* 水戸工業高校

ここで　I_m：電極から流出する電流の最大値

　　　　$\mathfrak{R}$：面抵抗率

実効値および位相計算のために変形すると，実効値 $V(r,\theta)$ は

$$|V(r,\theta)|^2=\left(\frac{I_m\mathfrak{R}}{4\pi}\right)^2\left[\log\frac{\sqrt{\left\{1+r^2-2r\cos\left(\theta-\frac{2}{3}\pi\right)\right\}\cdot\left\{1+r^2-2r\cos\left(\theta-\frac{4}{3}\pi\right)\right\}}}{1+r^2-2r\cos\theta}\right]^2$$

$$+\left(\frac{I_m\mathfrak{R}}{4\pi}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log\frac{1+r^2-2r\cos\left(\theta-\frac{4}{3}\pi\right)}{1+r^2-2r\cos\left(\theta-\frac{2}{3}\pi\right)}\right)^2$$

この式で r を $1/r$ とおいてみると全く同形の式がえられる。これは電極を配置した半径1の円の内側の電界と，外側の電界とが全く反転の関係にあることを示している。すなわち，この式は無限平面領域における一般式であるが，領域を有限な対称3電極を通る円内と限定しても成り立つことを示している。[1]

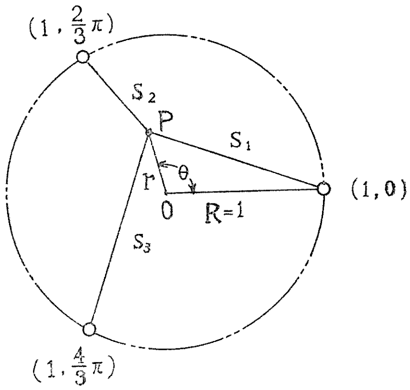

図　1

このことより，無限平面の場合と同じ電界を得るためには，電極を配置した正3角形より十分広い領域を与えることによっても近似的に可能であるが，むしろ，領域を電極をおいた3点を通る円内に限れば，円内の電界は無限平面の場合と全く相等しくなるので，その方が簡単である。しかし，電極の数が多い等の理由で同一円周上に配置することができない場合には，この方法は利用できない。そのときは次のような方法がある。

いま図2のように，一端が直線であるような曲線を回転して得られる回転閉曲面抵抗薄膜の平面の部分に電極を配置すれば，平面部分の電流界は無限平面のそれと全く一致するのである。[2][3]

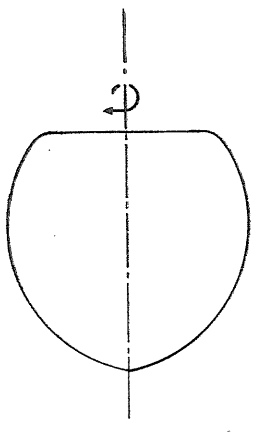

図　2

さて線状電極を円形抵抗板の外周に配置した場合について考えてみる。

いま半径1の円を考え，その周上の点 $(1,\Theta)$ における電位が $U(\Theta)$ となるような，円内の電位分布 $v(r,\theta)$ は Poisson の積分

$$v(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(\Theta)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\Theta-\theta)+r^2}d\Theta$$

で示される。[4] 抵抗板の円周を3等分して，そのおのおのに，円周にそって導体を密着させて3つの電極をつくり，これに3相交流電圧を加えると，周上の電位 $U(\Theta)$ は

$0<\Theta<\frac{2}{3}\pi$ では $U(\Theta)=V_m sin\,\omega t$

$\frac{2}{3}\pi<\Theta<\frac{4}{3}\pi$ では $U(\Theta)=V_m sin\left(\omega t-\frac{2}{3}\pi\right)$

$\frac{4}{3}\pi<\Theta<2\pi$ では $U(\Theta)=V_m sin\left(\omega t-\frac{4}{3}\pi\right)$

V_m は電圧の最大値

となる，これを Poisson の積分に代入すると，任意の点の電位の瞬時値がえられ，実効値 $V(r,\theta)$ は次式のようになる。

$$|V(r,\theta)|^2=\left(\frac{V_m}{\pi}\right)^2\left(\frac{3}{2}\left[tan^{-1}\left\{\frac{1+r}{1-r}tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)\right\}-tan^{-1}\left\{\frac{1+r}{1-r}tan\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right\}\right]\right)^2$$
$$+\left(\frac{V_m}{\pi}\right)^2\left(\sqrt{3}\,tan^{-1}\left\{\frac{1+r}{1-r}tan\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\theta}{2}\right)\right\}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left[tan^{-1}\left\{\frac{1+r}{1-r}tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)\right\}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\,tan^{-1}\left\{\frac{1+r}{1-r}tan\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right\}\right]\right)^2$$

3. 測 定 方 法

<3.1> 等電位線の測定

同一円周上に対称に配置された点電極，線状電極に，3相または6相交流電圧を加え，実効値指示形真空管電圧計を用い，探針法によって等電位の点を求めた。（図4，5，6）

<3.2> 等位相線の測定

位相測定法としては，次のような方法が考えられる。

(a) ブラウン管上にリサジュー図形を描かせる方法

この方法は高調波の影響を受けた場合に，比較するのが困難となる。

(b) 2現象ブラウン管オシロスコープを用い直視する方法

(c) 直流または単相交流を利用し，3相交流の任意瞬時における電圧分担の状態を作り測定する方法

この方法は各位相時の電圧瞬時値に等しい電圧を外部で作り，対応する電極に加え，その瞬時における位相の点を等電位線上に求める方法である。

本実験では，この3方法を適宜併用して測定した。

4. 測 定 結 果

<4.1> 3相交流電圧を正3角形に配置された3つの電極に加えた場合の等電位線

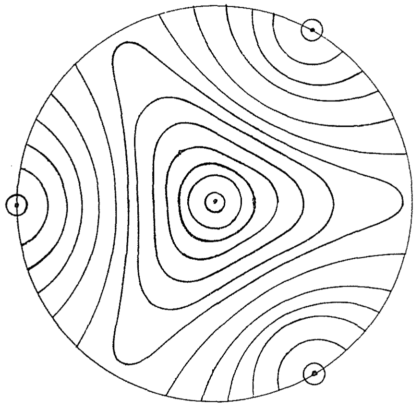

図 3　計 算 値

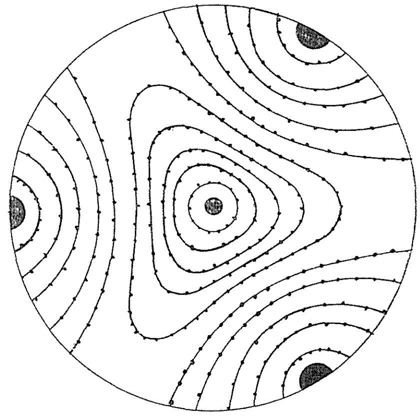

図 4　実 測 値

〈4.2〉 3相交流電圧と6相交流電圧を線状電極に加えた場合の等電位線，等位相線実測値

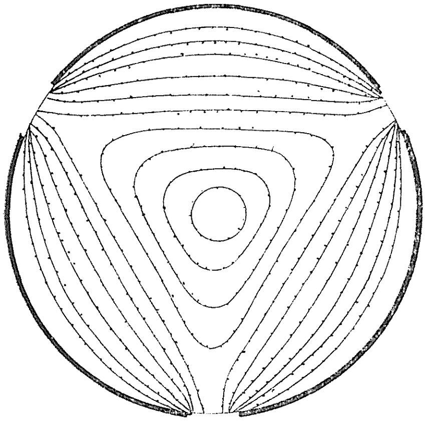

図 5　3相交流の場合

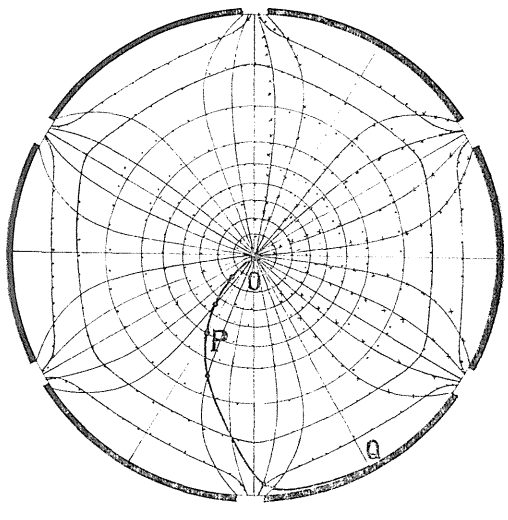

図 6　6相交流の場合

5. 結果についての考察

実験と計算はよく一致し，分圧される電圧は電源の波形と全く同一であり，インダクタンスが小さいので相当の周波数まで正確に分圧が可能である。3相と6相の場合を比較すると，円内における等電位線の形は相数が多い程円に近くなる。たとえば，3相の場合ほぼ円形と見られる等電位線は直径の0.2程度までであるが，6相の場合は直径の0.6程度までほぼ円形と見なし得る。さらに相数を増加させればこの比率は増加する。しかし，中点を零電位となし得るものは対称多相交流であり，かつ実際的に簡単に作り得る相数は，

3, 4, 6, 12, 相程度までであるので，本実験では3,6相の場合について実験してみた。この閉曲線となる等電位線上には，すべての位相を含むので，まえもって等電位線，等位相線を実測し図形に描いておくと，任意の値，任意の位相の電圧をとりだすことができる。

このことは，この面上の一点を探り，その点と中点（重心）との間の電圧をとりだすことにより未知の電圧と比較する，いわゆる交流ポテンショメータとしての利用が考えられる。

つぎに，等電位線と等位相線の交点 P（図6）について考えてみる。たとえば，P 点を $\frac{1}{2}V$ の等電位線と 60° の等位相線との交点，Q点を基準とした電極上の一点，とすると

$$\overline{OP}=V\cos\theta,\ \overline{PQ}=V\sin\theta,\ \overline{OQ}=V$$

とあらわされる。いま，実測によってえられた等電位線と等位相線より，まえもって $\widehat{OPQ}$ なる曲線をえたとすると，$\widehat{OPQ}$ 曲線上の任意の点 P は

$$V_P=V\cos\theta+V\sin\theta$$

を満足しているので，この曲線の利用も考えられる。

6. むすび

均一材質抵抗体と定電圧装置を組み合わせることにより，実験室において簡単に実用的な交流ポテンショメータを作ることができる。さらに，実験の結果得られた図形は，3相送電線の作る電界の状況を推測するのに役立つことと思う。

本実験を行うに当って種種ご協力をいただいた本学秋山助教授，卒業生の指出義之君，ならびに図面作成にお手伝いいただいた笠原英司君，名野隆夫君にお礼申し上げます。

（昭和41年9月7日投稿）

文　献

(1) 荒又，寺門： 茨城大学工学部研究集報，第14巻（昭42）p. 11
(2) 荒又，寺門，皆川： 茨城大学工学部研究集報，第14巻（昭42）p. 27
(3) L. Malavard: L'onde électrique, 36 (1956) p. 832
(4) PH Band 16: Elektrische Felder und Wellen, Springer-Verlag (1958) p. 54