

種々の形の抵抗板の周辺につけた任意の  
2 電極間の抵抗値の計算

荒 又 光 夫, 寺 門 龍 一

**Calculation of the Resistance Value between two  
Electrodes attached on the Periphery  
of a Resistance Plate**

MITSUO ARAMATA and RYUICHI TERAKADO

**Abstract:**— A study is made of the calculating methods of the resistance value between two electrodes, which have any sizes and are attached on any places of the periphery of a resistance plate with various shapes, by means of the principle of conformal representation. The methods are described mainly in regard to particular shapes; circle, half-plane and rectangle. Every other shape can also be calculated in case the mapping function is found, which leads conformal correspondence from the shape to a half-plane. Moreover, even the resistance value of arbitrary shape whose mapping function is unknown can be obtained by experimental method which is proposed as follows. It is made a correspondence between curvilinear rectangular coordinates, which consist of current lines and equipotential lines determined by using any one set electrodes attached on the periphery of the plate, and cartesian coordinates on a rectangle. Then every other set of electrodes can correspond to electrodes on the periphery of the rectangle. Therefore the resistance to be obtained can be immediately calculated by fore-going method.

---

1. ま え が き

厚さと抵抗率の一樣な平板抵抗体の周辺に, 2つの電極を密着させたときの2電極間の抵抗値を, 等角写像の考えによって, 計算によって求めることを, いくらか独特な導き方で進めてみた。等角写像は電流界だけでなく, 静電界, 電磁界 (TEM 波), 水流あるい

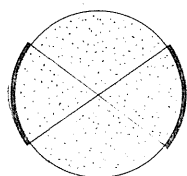
は熱流などの研究に、古くから活用されており、これらは互いに類推的に取り扱い得るものであるから、これら他分野の研究で、抵抗計算に利用できるものは数多くある。しかしながら、ある特定の抵抗体の周辺に固定した電極間の抵抗というように、限られた範囲内の流れの条件を与えて、その流れに対する抵抗に着目した取り扱いはあまりなされていない。筆者らはその点を取り上げ、最も基本的な図形である円、半平面、長方形を中心に、抵抗計算法を示している。その抵抗板の形の領域が、Schwarz-Christoffel 変換によって、半平面に等角に写像する関係がすでに求められているものは、いずれも容易に、この方法で表題の目的が達成される。おわりに、そのような関数が求められていない形の、あるいはかつてな形の抵抗板に、その板の周辺に任意につけた電極間の抵抗の計算について言及している。

2. この方法に適用される等角写像の性質

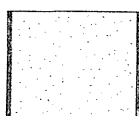
ある写像関数によって、一つの数平面上に与えられた図形と、他の数平面上に与えられた図形との間に、等角写像関係が得られたとすると、一方の図形内のある定まった微小部分は、他の図形内のある特定の微小部分に等角に写像され、一方の図形内の直交曲線群が与えられれば、他の図形内の直交曲線群も定まることになる。たとえば、ある形をした平板抵抗体のへりに、2つの電極をつけて、抵抗体上に等電位線、電流線を描けば直交曲線群が得られる。これを今考えている写像関数によって写像すれば、他の図形上に等電位線、電流線からなる直交曲線群が得られ、電極の位置もまた定まる。この場合、電流線、等電位線を、それぞれ単位電流、単位電位差ごとに1本ずつひいて直交曲線群をつくれれば、他の図形上にも全く同じ本数の直交曲線群が得られることになる。すなわち、両図形とも、電極から出てゆく電流線の数と、電極間にはさまれる等電位線の数は等しくなるのである。これは、両方の図形における2電極間の抵抗値は、抵抗率と厚さが同じなら、全く等しいことを示すものである。もし、2つの図形の間で写像に、他の写像関数を用いたとすれば、電極は全く別の位置に写像されるであろうが、その場合でも、2電極間の抵抗値は等しいのである。したがって、以下においては、各図形間の写像によって、抵抗値を等しく保つ電極の位置が、どのように移るかを検討してゆくのである。もし図形の内部にまで着目してゆけば、2電極間の電流線の状態も究明されるのであるが、ここでは、抵抗値すなわち図形の周辺のみに着目して考えを進める。

3. 考えの進め方

長方形抵抗体があり、その辺の長さを  $a, b$ 、厚さ  $d$ 、抵抗率  $\rho$  とすれば、相対する長さ  $a$  の2辺に導体を密着させたときの導体間の抵抗は、



(a)



(b)

$$R = \rho \frac{b}{ad} \dots\dots\dots (1)$$

として得られる。 $\rho, d$  が一定ならば、抵抗値は  $b/a$  によって決まり、当然のことながら相似形では抵抗値は等しくなる。

いま図1 (a) のように、

図 1

円板抵抗体の周辺に等長な2電極(図の太い線)をつけたものを考えると, これと抵抗率, 厚さの同じ長方形抵抗体で, 等しい抵抗値を持つ図1(b)が必ず定まる。なぜなら, 円板抵抗体で, その等長2電極の大きさすなわち中心角を $\pi$ から0まで変化させると, 抵抗値は0から $\infty$ まで連続に変わる。また長方形抵抗体でも, その辺の比 $b/a$ を0から $\infty$ へ変化させると, 抵抗値は0から $\infty$ まで連続に変わる。すなわち, 円板抵抗体の対向等長2電極の中心角と, 長方形抵抗体の辺の比とは, 抵抗値という観点で1対1に対応する。したがって, (a)と等しい抵抗値を持つ(b)は必ず存在し, その辺の比は定まるのである。ゆえに, (a)の抵抗値は, (b)の抵抗値を求める式(1)によって計算できることになる。

また, 図2(a)のように, 円板抵抗体の周辺の任意の位置に任意の大きさの2電極を配置した場合でも, 図2(b)のような対向等長2電極で, (a)と等しい抵抗値を持つものは必ず存在してその中心角は定まり, 抵抗値は求め得るのである。ところが, 図1で述べた円と長方形との対応は, その関係を一挙に求めることは困難で, 実際には, 図3のように, 円を半平面に写像して円のとときと全く抵抗値の等しい半平面のへりにつけた等長な2電極長とその間隙長を求め, 次にこれと抵抗値の等しい長方形を求めるという方法をとるのである。その際, 図2(a)のように全く任意の位置に電極を配置したものでは, これと抵抗値の等しい半平面の電極配置は, 一般には図4(a)のように相異なる電極長

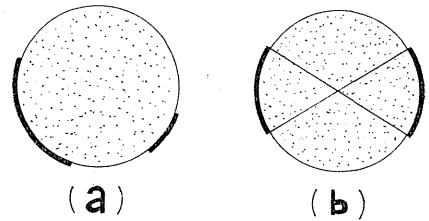


図 2

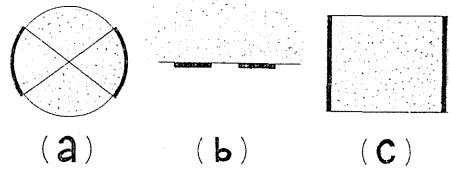


図 3

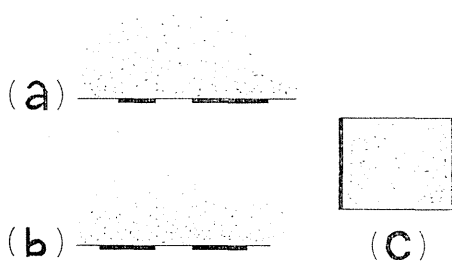


図 4

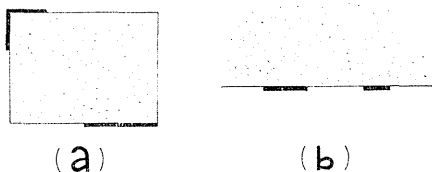


図 5

となるが, これと等しい抵抗値を持つ相等的電極長図4(b)も必ず存在するので, これを図4(c)へ写像して抵抗値を求めることが可能となるのである。

次に, 図5(a)のように, 長方形の周辺に任意に2個の電極をつけた場合の抵抗値は, これを半平面に写像すると, 電極は図5(b)のように一般には不等長となるが, これを図4のように変換することによって求め得るのである。

以上のような考え方によって, 円, 長方形, 半平面のへりにつけた任意の2電極間の抵抗値を求めることができるのであるが, その計算式は, すでによく知られている写像関数を利用することによって可能となるのである。

4. 円と半平面との間の写像

一般に、上半平面を単位円の内部に写像する写像関数は無限に存在する。等角写像の原理から考えて、どの写像関数を用いて計算を進めてもよいわけであるが、ここでは簡単のため次の関数を用いる。

$$w = \frac{i-z}{i+z} \dots\dots\dots (2)$$

あるいは、これを逆に解いて

$$z = \frac{1-w}{1+w} i \dots\dots\dots (3)$$

この関数によって、図6のように、 $w$  平面の単位円の中心  $O$  および周上の点  $A, B, C, D$  は、 $z$  平面の  $O', A', B', D'$  に対応する。ただし、 $C'$  は  $x$  軸上無限遠点となる。もちろん、 $w$  平面の単位円周は、 $z$  平面上半面の境界線すなわち  $x$  軸に写像される。今問題になるのは、電極を配置する周辺であるから、 $w$  平面の単位円

$$u^2 + v^2 = 1$$

について考え、これに

$$u = \cos\theta, v = \sin\theta$$

を代入し、(2) (3) 式の関係を用いてこれ

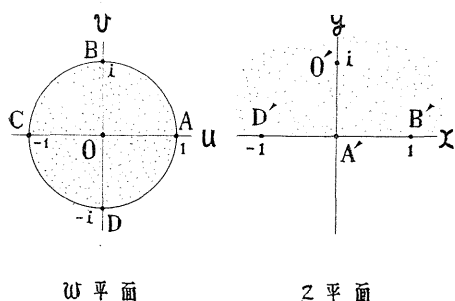


図 6

を  $x$  について解くと

$$x = \tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}} \dots\dots\dots (4)$$

あるいは

$$\cos\theta = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \dots\dots\dots (5)$$

が得られる。

< 4. 1 > 対向等長電極の半平面への写像

円板抵抗体周辺の電極配置が、図3(a)のように相対する位置にあって等長である場合には、図7のように、電極を  $w$  平面の座標軸に関して対称に配置して写像すれば、 $z$

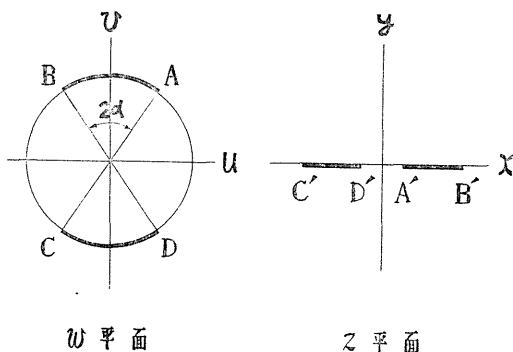


図 7

平面上では、 $y$  軸に対称な等長電極となる。このとき、電極の中心角を  $2\alpha$  とすれば、 $z$  平面上の  $A', B', C', D'$  の  $x$  座標はそれぞれ

$$x_{A'} = \sqrt{\frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}} = -x_{D'} \quad x_{B'} = \sqrt{\frac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}} = -x_{C'} \quad \dots\dots\dots (6)$$

となる。ここで

$$\frac{x_{A'}}{x_{B'}} = \frac{x_{D'}}{x_{C'}} = k \quad \dots\dots\dots (7)$$

とおくと

$$k = \frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha} \quad \dots\dots\dots (8)$$

となり、これはあとで重要な値となる。

< 4. 2 > 円周の不等長電極を半平面の等長電極に写像すること

図 2 (a) のように円周上の任意の位置に任意の大きさの電極が配置されている場合でも、 $w$  平面の  $u, v$  軸に対する位置を適当に選ぶことによって、 $z$  平面  $x$  軸上の等長電極に写像することができる。図 8 のように、円周上の 2 電極  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{CD}$  の中心角をそれぞれ

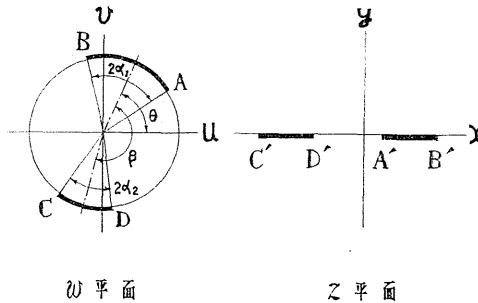


図 8

それぞれ  $2\alpha_1, 2\alpha_2$  とし、 $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{CD}$  の中心半径のなす角を  $\beta$  とする。今  $\widehat{AB}$  の中心半径が  $u$  軸と  $\theta$  の角をなすときに、図のように  $z$  平面への等長写像が得られたと仮定して、 $\theta$  を求めると、(4) 式から

$$x_{A'} = \tan \frac{\theta - \alpha_1}{2}, \quad x_{B'} = \tan \frac{\theta + \alpha_1}{2}$$

$$x_{C'} = \tan \frac{\theta - \beta - \alpha_2}{2}, \quad x_{D'} = \tan \frac{\theta - \beta + \alpha_2}{2}$$

$$x_{B'} - x_{A'} = x_{D'} - x_{C'}$$

とおいて

$$\cos\theta = \frac{-\sin(\alpha_1 - \alpha_2) \{ \sin\alpha_1 \cos\beta - \sin\alpha_2 \} + \sin\alpha_1 \sin\beta \sqrt{2 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \{ \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \cos\beta \}}}{\sin^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_2 - 2 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\beta} \quad \dots\dots\dots (9)$$

が得られる。 $\theta$  をこのように選んで写像すれば、 $A'B' = C'D'$  となるが、これらは  $y$  軸に対称な位置にはない。よって、対称な位置に移動して考え、 $k$  の値を求めると

$$k = \frac{x_A' - x_D'}{x_B' - x_C'} = \frac{\tan \frac{\theta - \alpha_1}{2} - \tan \frac{\theta - \beta + \alpha_2}{2}}{\tan \frac{\theta + \alpha_1}{2} - \tan \frac{\theta - \beta - \alpha_2}{2}}$$

これに (9) 式の  $\cos \theta$  を代入して  $\theta$  を消去すると

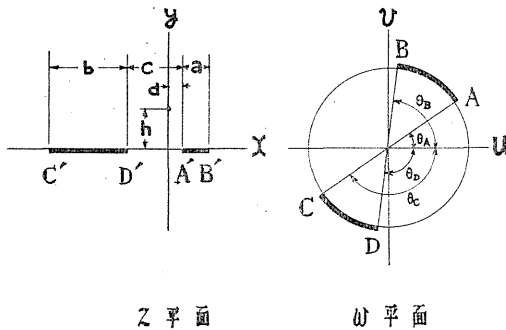
$$k = \frac{\sqrt{\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \cos \beta} - \sqrt{2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2}}{\sqrt{\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \cos \beta} + \sqrt{2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2}} = \frac{\sqrt{\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \cos \beta} - \sqrt{\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \cos(\alpha_1 + \alpha_2)}}{\sqrt{\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \cos \beta} + \sqrt{\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \cos(\alpha_1 + \alpha_2)}} \dots\dots\dots (10)$$

となる。もし、 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  の場合には、

$$k = \frac{\sin \frac{\beta}{2} - \sin \alpha}{\sin \frac{\beta}{2} + \sin \alpha} \dots\dots\dots (11)$$

となる。

< 4. 3 > 半平面の不等長電極を円周上の対向等長電極に写像すること



z 平面                      w 平面  
図 9

図 9 のような、 $z$  平面  $x$  軸上の不等長電極も、 $y$  軸の位置および単位長を適当に選んで写像することにより、円周上の対向等長電極に写像することができる、今、

$$x_B' - x_A' = a, x_D' - x_C' = b, x_A' - x_D' = c \text{ とし、} y \text{ 軸の位置を } x_A' = d$$

となるように定め、単位長を  $h$ 、すなわち、 $w$  平面の単位円の中心に写像される点の  $y$  座標を  $h$  とおく。そして、

$w$  平面に写像された A, B, C, D 各点の  $u$  軸となす角を、それぞれ、 $\theta_A, \theta_B, \theta_C, \theta_D$  とおけば、(5) 式から

$$\cos \theta_A = \frac{1 - \left(\frac{d}{h}\right)^2}{1 + \left(\frac{d}{h}\right)^2}, \cos \theta_B = \frac{1 - \left(\frac{a+d}{h}\right)^2}{1 + \left(\frac{a+d}{h}\right)^2}$$

$$\cos \theta_C = \frac{1 - \left(\frac{b+c-d}{h}\right)^2}{1 + \left(\frac{b+c-d}{h}\right)^2}, \cos \theta_D = \frac{1 - \left(\frac{c-d}{h}\right)^2}{1 + \left(\frac{c-d}{h}\right)^2}$$

ここで対向等長電極となるように

$$\cos \theta_A = -\cos \theta_C, \cos \theta_B = -\cos \theta_D$$

とおいて  $d$  および  $h$  を求めると

$$d = \frac{ac}{a+b}, h = \frac{\sqrt{abc(a+b+c)}}{a+b} \dots\dots\dots (12)$$

を得る。 $d, h$  をこのように選べば、対向等長電極が得られるのであるが、その中心角を

$2\alpha$  とすると，すなわち

$$2\alpha = \theta_B - \theta_A = \theta_D - \theta_C$$

とおき， $d, h$  を代入して計算すると

$$\cos 2\alpha = \cos(\theta_B - \theta_A) = \frac{c(a+b+c) - ab}{c(a+b+c) + ab} = 1 - \frac{2ab}{(a+c)(b+c)} \dots (13)$$

となる。これを再び半平面に写像して  $k$  の値を算出すれば，(8) 式に (13) 式を代入して

$$k = \frac{\sqrt{(a+c)(b+c)} - \sqrt{ab}}{\sqrt{(a+c)(b+c)} + \sqrt{ab}} = 1 + \frac{2\{ab - \sqrt{ab(a+c)(b+c)}\}}{c(a+b+c)} \dots\dots (14)$$

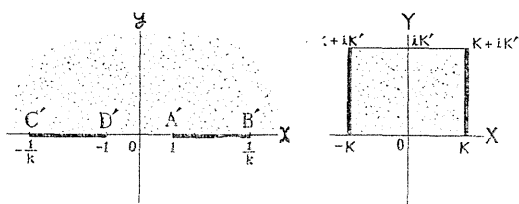
を得る。

### 5. 半平面と長方形との間の写像

半平面と長方形との間の写像をもっとも簡明に示すものとして，楕円関数による写像が知られている。ここでは，Jacobi の  $sn$  関数による写像について考える。

$$z = sn(Z, k) \quad (0 < k < 1)$$

は第一種楕円積分



z 平面                      Z 平面

図 10

$$Z = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z)(1-k^2z^2)}}$$

の逆関数であるが，この関数によって，図10のように， $z$  平面の上半平面が  $Z$  平面の長方形内に写像されるのである。すなわち， $z$  平面の原点は  $Z$  平面の原点に， $x$  軸上1の点は  $X$  軸上の  $K$  点に，ただし  $K$  は

$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z)(1-k^2z^2)}}$$

で示される第一種完全楕円積分である。 $x$  軸上  $1/k$  の点は， $Z$  平面の  $K+iK'$  点に，ただし

$$K' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z)(1-k'^2z^2)}} \quad k^2 + k'^2 = 1$$

$x$  軸上無限遠点は  $Z$  平面の  $iK'$  に，また  $-1$  は  $-K$  に， $-1/k$  は  $-K+iK'$  に，すなわち  $z$  平面の  $x$  軸は  $Z$  平面の  $K, K+iK', -K+iK', -K$  の4点を頂点する長方形の周辺に対応することとなり， $z$  平面の上半平面が  $Z$  平面の長方形の内部に等角に写像されることになるのである。したがって，半平面の等長電極  $A'B'$  および  $C'D'$  の座標を，それぞれ

$$x_{A'} = 1, x_{B'} = 1/k, x_{C'} = -1/k, x_{D'} = -1$$

になるように  $k$  の値を定めれば，これに対応する長方形は，図10のように，辺が  $K'$  および  $2K$  となるので， $K$  および  $K'$  が求まれば抵抗は容易に計算できることになる。そして， $K, K'$  の値は完全楕円積分表によって与えられているので労せずして得られるのである。また前に計算した  $k$  の値は，

$$k = \frac{x_{A'}}{x_{B'}} = \frac{x_{A'} - x_{D'}}{x_{B'} - x_{C'}}$$

として求めたものであるから、ここでいう  $k$  と全く一致しているのであり、半平面の等長2電極間の抵抗値は、 $k$  の値を求めることによって、 $k$  の関数である  $K/K'$  を完全楕円積分表でひいて

$$R = \frac{\rho}{d} \frac{2K}{K'} \dots\dots\dots (15)$$

として得られる。ただし、 $\rho$ 、 $d$  は前述のように抵抗率および厚さを示す。

6. 長方形の周辺につけられた任意2電極間の抵抗値の計算

上述のように、種々の形の抵抗体の周辺に付着した2電極間の抵抗値は、その図形を半平面に写像したとき、電極が等長となるならば、そのときの  $k$  の値によって、第1種完全楕円積分表から、抵抗率と厚さが与えられれば、容易に計算できるのである。 $k$  の値の算出法は、すでに種々の場合についてその計算式を示したが、図5(a)のような、長方形の周辺に任意2電極を配置した場合の  $k$  の値は、一つの計算式では示されず、逐次計算を行わなければならないので、その求め方について述べる。

前述のように、楕円関数による写像は、半平面と長方形との間の対応を与えるものであるが、その形を実関数の計算しやすい形になおしておく

$$z = sn(Z, k)$$

で、

$$Z = X + iY, \quad z = x + iy$$

であるが、 $x, y$  を実数の楕円関数であらわせば

$$sn(X, k) = \xi, \quad sn(Y, k') = \eta$$

とおくと

$$x = \frac{\xi \sqrt{1-k'^2 \eta^2}}{1-\eta^2+k^2 \xi^2 \eta^2}, \quad y = \frac{\eta \sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2 \xi^2)(1-\eta^2)}}{1-\eta^2+k^2 \xi^2 \eta^2} \dots\dots\dots (16)$$

で与えられる。

さて、長方形に図11のような電極が配置された場合を考える。 $z = sn(Z, k)$  によって、

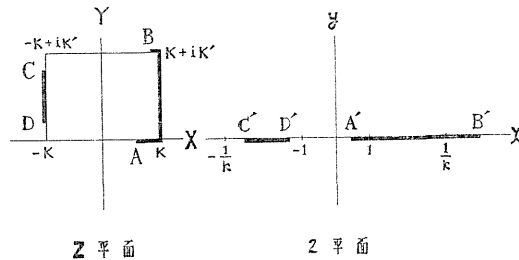


図 11

図の A, B, C, D がそれぞれ A', B', C', D' に写像されたものとする、A, B, C, D の座標は次のようにあらわせるから

$$A \begin{pmatrix} X=X_1 \\ Y=0 \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} X=X_2 \\ Y=K' \end{pmatrix}, \quad C \begin{pmatrix} X=-K \\ Y=Y_1 \end{pmatrix}, \quad D \begin{pmatrix} X=-K \\ Y=Y_2 \end{pmatrix}$$

この値と、与えられた長方形の  $K'/K$  の値に対応する  $K, K', k, k'$  の値を完全楕円積分表から求め、これを (16) 式に代入して、A', B', C', D' の座標を計算する。そして、



A'B', C'D', D'A' の長さを図9と同じように,  $a, b, c$  であらわして (14) 式に代入すれば  $k$  の値が得られ抵抗値が計算できる。

以上のような計算で抵抗値は求め得るが, 電極の配置によっては, 次のような考慮が必要となる。図12 (a) のような電極配置の場合, これをそのままの状態

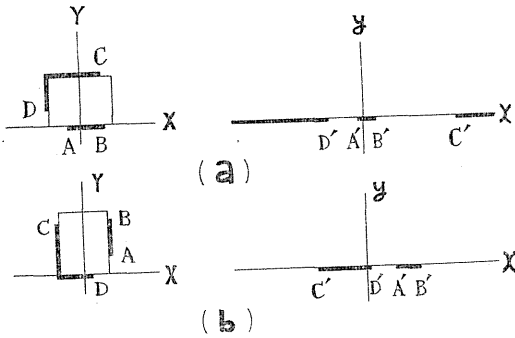


図 12

と, C'D' 電極は2分割された無限電極となって, あとの計算に不都合となる。このようなときは, 長方形の座標軸に対する位置を, 図12 (b) のようにすればよい。そのような工夫をしても図13 (a) のような場合には, 半平面に写像したとき, 電極の2分割をさけることは不可能である。このようなときには, 図13 (b) のように, BC, DA に電極があるものと考えて抵抗を計算し, その値を  $R'$  とすれば, 求める AB, CD 間の抵抗  $R$  は

$$\sqrt{RR'} = \rho/d$$

の関係式から求め得る。<sup>(4)</sup>

### 7. ノモグラムとグラフ

以上のように, 抵抗計算の過程において, 半平面の状態を経過すること

が非常に多い。したがって, 図9のように配置された電極の  $a, b, c$  の値から, 抵抗値を計算するノモグラムを作成しておくことと便利である。図14は無限半平面のへりに密着させた長さ  $a, b$ , 間隙長  $c$  の2電極間の抵抗値  $R$  と, それと等しい抵抗値を持つ円板抵抗体の対向等長2電極の中心角  $2\alpha$  を求めるノモグラムである。抵抗値は抵抗率  $\rho$ , 厚さ  $d$  を与えなければ得られないが, このノモグラムでは  $\rho/d=1$  として作成している。また簡単のため  $a < b$  と考え  $a=1$  としてある。

図15は, 円板対向等長電極の中心角  $2\alpha$  と抵抗値  $R$  との関係を示すものである。前と同じく  $\rho/d=1$  としてある。

また図16は, 半平面に配置した2電極の1つの電極長を  $a=1$  に固定しておいて, 一定の抵抗値となるような他の電極長  $b$  と間隙長  $c$  との関係を示したものである。

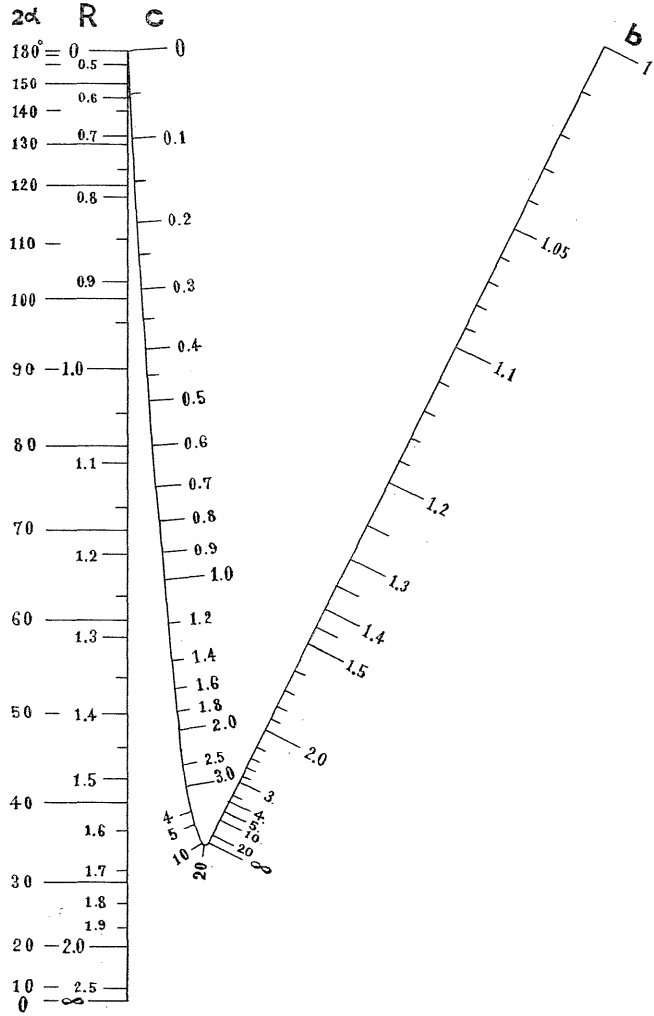
### 8. 抵抗値計算の具体例

#### < 8.1 > 円板抵抗体の例

図17の場合

$$\alpha_1 = 15^\circ, \alpha_2 = 45^\circ, \beta = 120^\circ$$

を (10) 式に代入して  $k$  を求めると



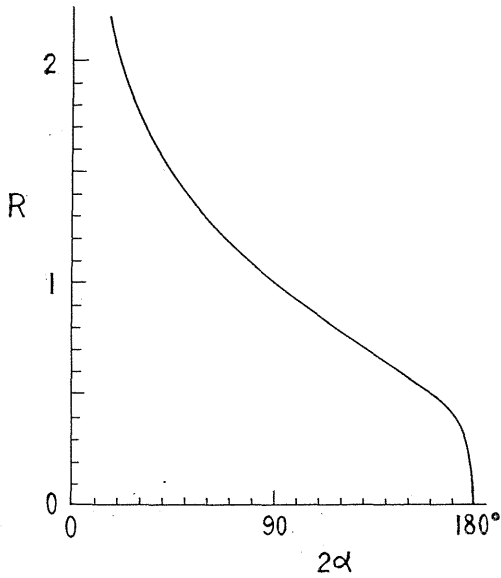


図 15

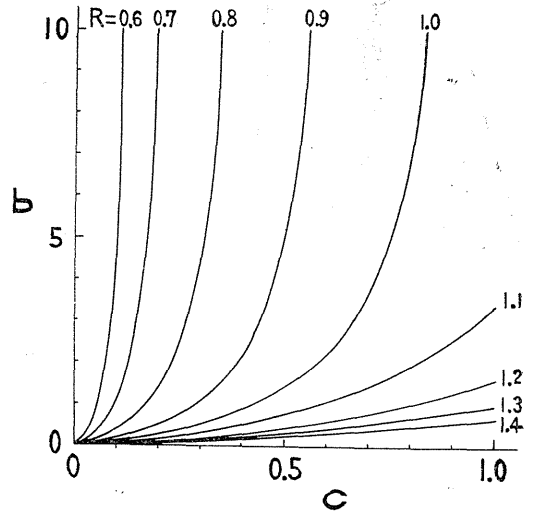


図 16

$$k = \frac{\sqrt{\cos 30^\circ - \cos 120^\circ} - \sqrt{\cos 30^\circ - \cos 60^\circ}}{\sqrt{\cos 30^\circ - \cos 120^\circ} + \sqrt{\cos 30^\circ - \cos 60^\circ}} = 0.3175$$

完全楕円積分表を用いて  $k=0.3175$  に対する  $K/K'$  の値を求め

$$2K/K' = 1.25$$

を得る。したがって、求める抵抗は

$$R = 1.25 \frac{\rho}{d}$$

### < 8.2 > 長方形抵抗体の例

図18の場合,  $K'/K=3/2$

であるから, 完全楕円積分表により  $K'/K=3/2$  のときの  $K, K', k, k'$  の値を求めると

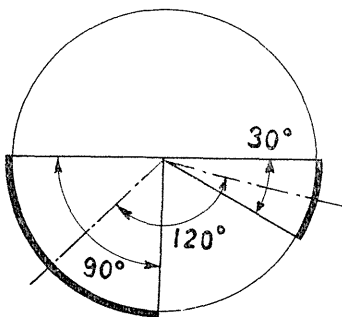


図 17

$$K=1.628, \quad K'=2.442$$

$$k^2=0.1339, \quad k'^2=0.8661$$

$$k=0.366, \quad k'=0.931$$

したがって, A, B, C, D の座標は

$$X_A=0, \quad Y_A=0$$

$$X_B=K, \quad Y_B=0$$

$$X_C=-\frac{K}{2} = -0.814, \quad Y_C=K'$$

$$X_D=-K, \quad Y_D=\frac{2}{3} K' = 1.635$$

この長方形を半平面に写像したとき A, B, C, D に対応する点 A', B', C', D' の座標は

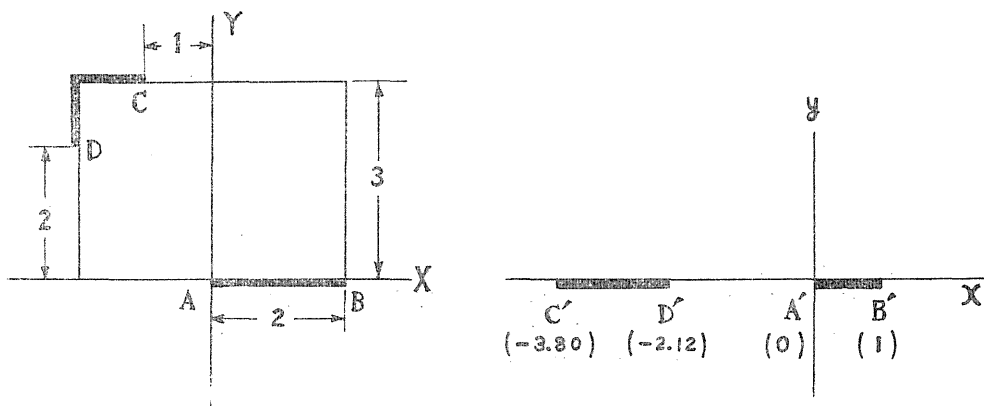


図 18

$$x_A' = 0, \quad x_B' = 1$$

$x_C'$  を求めるには、まず、第一種楕円積分表あるいは楕円関数表を用いて  $\xi, \eta$  を求める

$$\xi = \text{sn}(X = -0.814, k = 0.366) = -0.719$$

$$\eta = \text{sn}(K', k') = 1$$

この値を (16) 式に代入して

$$x_C' = \frac{\xi \sqrt{1-k'^2}}{1-1+k^2\xi^2} = \frac{1}{k\xi} = \frac{1}{-0.719 \times 0.366} = -3.80$$

$x_{D'}$  も  $x_{C'}$  と同様に

$$\xi = \text{sn}(-K, k) = -1$$

$$\eta = \text{sn}(Y = 1.635, k' = 0.931) = 0.948$$

$$x_{D'} = \frac{-1 \sqrt{1-k'^2\eta^2}}{1-\eta^2+k^2\eta^2} = \frac{-1}{\sqrt{1-k'^2\eta^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-0.931^2 \times 0.948^2}} = -2.12$$

よって

$$A'B' = 1, \quad C'D' = -2.12 - (-3.80) = 1.68, \quad D'A' = 2.12$$

ゆえに、 $a=1, b=1.68, c=2.12$  としてノモグラムによって  $R$  を求めると  $R=1.48$  を得る。ゆえに求める抵抗は

$$R = 1.48 \frac{\rho}{d}$$

### < 8. 3 > その他の応用例—1

円、長方形、半平面以外のものでも、容易にこれらに写像できる図形であれば、その抵抗値を求めることができる。そのような図形はきわめて多数あるが、ここでは次の2例をあげる。まず図19の場合

$$z = \frac{1}{2} (1 - \cos w)$$

は与えられた図形を半平面に写像するも

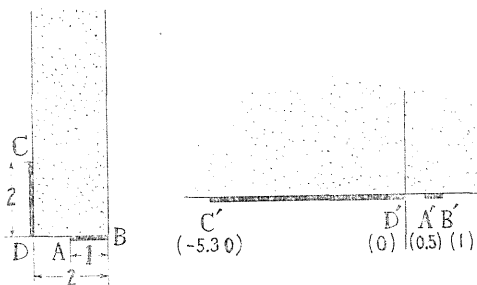


図 19

のであり，その  $x$  座標は

$$x = \frac{1}{2} (1 - \cos u \cosh v)$$

で与えられる。また  $w$  平面での図の A, B, C, D の座標は

A( $\pi/2, 0$ ), B( $\pi, 0$ ), C(0,  $\pi$ ), D(0, 0) となるので，これを写像した  $x$  座標は

$$x_A' = 1/2$$

$$x_B' = \frac{1}{2} (1 - \cos \pi \cosh 0) = 1$$

$$x_C' = \frac{1}{2} (1 - \cos 0 \cosh \pi) = \frac{1}{2} (1 - 11.592) = -5.30$$

$$x_D' = 0$$

よって

$$A'B' = 0.5, \quad C'D' = 5.30, \quad D'A' = 0.5$$

ゆえに  $a=1, b=10.6, c=1$  としてノモグラムにより

$$R = 1.04 \frac{\rho}{d}$$

#### < 8. 4 > その他の応用例-2

図20のような扇形抵抗体の場合，これを半平面に写像する関数は

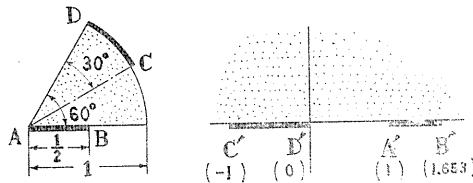


図 20

$$z = \left( \frac{w^3 + 1}{w^3 - 1} \right)^2$$

で与えられる。

$$A(0, 0), \quad B\left(\frac{1}{2}, 0\right), \quad C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad D\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

を写像して

$$x_A' = 1, \quad x_B' = \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 1} \right\}^2 = 1.653, \quad x_C' = -1, \quad x_D' = 0$$

したがって

$$A'B' = 0.653, \quad C'D' = 1, \quad D'A' = 1$$

ゆえに

$$a=1, \quad b = \frac{1}{0.653} = 1.53, \quad c=1.53$$

ノモグラムにより

$$R = 1.36 \frac{\rho}{d}$$

この他、Binns の著書<sup>(5)</sup>の巻末に載っている種々な領域数10種のような抵抗板についても、同様な方法で求められる。ここにあげた例はそのうちの1つである。

### 9. 一般の図形の場合

これまでは、抵抗計算の対象として、円、半平面あるいは、それらへ容易に写像できる形のもののみを取り扱ってきた。そこで、さらにより一般的な全く任意の図形にまで拡張することの可能性を考えてみると、まず理論上では、いかに複雑な図形でも、その図形が単一連結であれば、それを単位円の内部に写像することの可能なことはわかっており、そして具体的には Schwarz-Christoffel 変換を応用する等のいくつかの写像の方法が考案されている。しかし、その計算を実地に行なうのはまことに困難なことにちがいない。いづれにせよ、それらの方法を用いれば、あらゆる図形は計算可能な図形に写像されて、抵抗値を求めることができるのである。たとえば、次のような実験的方法によって任意の図形を長方形に写像するのも一つの方法である。<sup>(6)</sup>

与えられた任意の形の抵抗板の周辺を適当に4分割して、相対する1組の部分に電極をつけて測定した抵抗値を  $R_1$ 、次に他の1組の部分に電極をつけたときの値を  $R_2$  とすると、この図形は辺の比  $R_1/R_2$  の長方形に対応がつく。なぜなら、抵抗測定の際に、電流線、等電位線もあわせて描いたとすれば、図21 (a) のような直交曲線群が得られ、これ

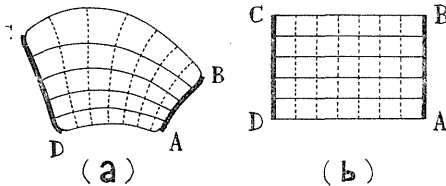


図 21

は2辺が  $R_1, R_2$  の長方形の電流線、等電位線からなる直交直線群 図21 (b) に対応し、すなわち等角写像関係が成立することになるからである。さて、今問題となるのは、写像によってその周辺の電極が他の図形の周辺のどこに移るかということであるから、測定に際し、電極を付けない周辺の電位を精密に計れば、それら各点が長方形の辺のどこに写像されるかがわかる。一度この関係を求めておけば、周辺のどこに電極をつけた場合でも、それらは直ちに長方形の周辺に写像されるので、6 に述べた方法によって抵抗値を求めることができる。

### 10. む す び

厚さと抵抗率との一様な材料からできている平板抵抗体の周辺に、全く任意に2つの電極を設けた場合の、その電極間での抵抗値を、等角写像の原理により、理論的に決定する方法を述べた。その方法の途中に、任意の形の領域内を半平面に写像する段階がある。したがって実際に計算するには、この段階での等角写像関数を求め、与えられた領域の周辺に任意に与えられた電極が、半平面のへりのどこの部分に移るかを計算する必要がある。このため、まず一般には、Schwarz-Christoffel 変換の積分形を求めねばならない。そして、その定積分を実行して、電極の位置を決定せねばならない。ところが、この定積分が容易でないことが多く、数値計算で満足しなければならないようなときには、相当わずらわしいものになる。しかし、電子計算機の普及した今日、必要に応じてこれを用いれば、全く任意の図形であっても目的は達成されるはずである。

また、ここに述べたことは、単に抵抗計算だけでなく、類推的に考え得る他の分野、たとえば、流体力学や伝熱工学の方面にも活用できるものであろう。

この研究を進めるにあたり、著者の1人が30数年前教えをうけた池田芳郎先生の「等角写像とその方法」を常に参考にし、その直観的な等角写像の考え方に導かれることが多かったことを付記して、同先生に深い感謝の意を表わします。（昭和40年9月1日投稿）

## 文 献

- (1) 宮本； 2次元問題，修教社（昭13）
- (2) 徳川，鬼頭； 等角写像解説，丸善（昭22）
- (3) 佐々木； 等角写像の応用，富山房（昭14）
- (4) 荒又，寺門； 茨城大学工学部研究集報，第11巻（昭39）P. 31
- (5) Binns & Lawrenson； Analysis and Computation of Electric and Magnetic Field Problems. P. 307
- (6) 荒又，寺門； 茨城大学工学部研究集報，第12巻（昭40）P. 43