

# 衝突振動系における過渡応答の一数值計算法

菊地 彌\*, 東 貞男\*, 打越 聡\*

(1971年9月10日受理)

## A Method of Numerical Calculation for Transient Responses of the Vibratory Systems with Collision

Wataru KIKUCHI, Sadao AZUMA and Satoshi UCHIKOSHI

**Abstract:**— In this paper, a procedure is proposed that a calculation method of the nonlinear second-order differential equations is developed by its principle of the phase-plane analysis which is extended to the new technical method for grasp of the dynamic performances of some vibratory nonlinear systems with collision.

Assuming that the equation of the dynamic systems is a nonlinear differential equation, the equations of numerical calculation are generally re-expressed as two algebraic equations of degree one. Since all second-order equations must be successively solved by computation.

According to this method, it is recognized that the behavior at collision can be easily deduced from the solution of introduced equations, and the existence of merits in this method is established.

### 1. ま え が き

通信系に雑音・寿命などの悪影響をおよぼすリレーのチャタリングは、極めて複雑な衝突振動を呈する。このような現象を局限する目的で、衝突振動の解析がいままでにいくつか試みられ、リレーの構成が線形な  $I$  自由度の振動系として近似可能な場合については良い結果を得ている。<sup>(1),(2)</sup>

実際には、リレーそのものが非線形バネ機構であるため、これに損失・制動係数、そして速度の関数となる反撥係数などを考慮した多自由度の振動系とした方が、より近似度の高い解析が可能になるものと思われる。筆者らは、動作方程式が非線形の常微分方程式で記述される衝突振動系の挙動を明確に把握するために、位相面解析の原理を拡張してその状態軌道を容易にかつ誤差の少ない範囲で算定する計算法を開発し、あわせて実時間応答

\* 茨城大学工業短期大学部電子工学科

をも画かせる基本的な手法を考案している。この手法によれば、動作方程式の解ならびにその微係数が簡素化された2つの代数方程式によって即座に求められるので具合が良く、衝突の解析に用いて利点のあることが認められる。

## 2. 位相面解析の原理

衝突振動の挙動を把握する目的で、逐次計算による時間応答を算出しているときに遭遇する第一の問題点は、衝突が任意の時刻に現われてくるために一定の時間々隔で計算を続行することが不可能になることである。

位相面解析の原理の適用によれば、上記の問題は比較的容易に解決へと導かれる。位相面法では、その平面上に衝突運動中の質点の位置や速度が明確に規定されるので、図式的な検討がしやすくなる利点がある。また、衝突振動における質点移行の過渡的な状態は、任意の時点で起こる衝突が次の状況点への移行を決定する初期条件となるので、振動の過渡的な状態は、位相面  $\delta$  法で求まる部分的な軌道を連絡して得たものと等価になる。このような意味から、衝突を伴う振動系の解析に基本的な位相面法を用いるのは適切であると考えられる。

さらに、衝突振動の反撥機構に対する研究は古くから行われ、種々の検討が加えられた結果、カンチレバー式の小型リレーは図1のようにスティフネス、減衰係数、その他で構成される1自由度——あるいは多自由度——の系に置換可能であることも知られており<sup>(3)</sup>、その動作方程式が2階の常微分方程式となることから位相面解析の原理は十分に効果を発揮してくれるものと思われる。

ここでは、位相面法を拡張した状態軌道の算定法を示し、それに対応する時刻との関係を明らかにする。

### 2-1. 線形2階常微分方程式で記述される系の挙動の数値計算法

いま図1のような1自由度の振動系で、質量を  $m$ 、減衰係数を  $r$ 、スティフネスを  $s$ 、変位を  $x$ 、外力を  $f(t)$  とし、系の平衡状態  $f(t)=0$  での変位を基点にとれば、

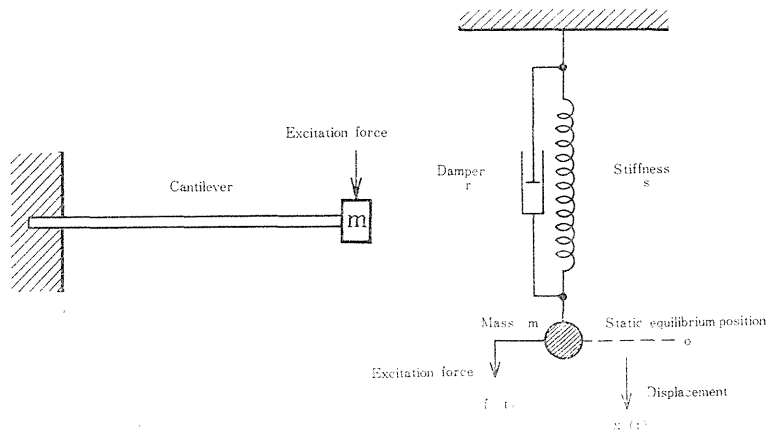


Fig. 1. Equivalent spring of cantilever

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + sx = f(t) \dots\dots\dots(1)$$

の動作方程式が成立つ、これを基準化して

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dx}{dt} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 F(t) \dots\dots\dots(2)$$

ただし、 $\omega_n = \sqrt{s/m}$ ,  $\zeta = r/2\sqrt{ms}$ ,  $F(t) = f(t)/s$

ここで、 $\omega_n = d\theta/dt$  であるとし、さらに  $v = dx/d\theta$ ,  $\dot{v} = dv/d\theta$  とおけば式(2)は次のように整理される。

$$\dot{v} + 2\zeta v + x = F(t) \dots\dots\dots(3)$$

位相平面を  $x, v$  で定義すれば、

$$\dot{v} = \frac{dv}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} \frac{dv}{dx} = v \frac{dv}{dx} \dots\dots\dots(4)$$

の関係が成立するので、 $F(t) - 2\zeta v = \delta$  とおいて整理すれば、位相面上すべての状況点を満足する次の式となる。すなわち、

$$\frac{dv}{dx} = - \frac{x - \delta}{v} \dots\dots\dots(5)$$

位相面上、任意の状況点を  $P_k$  とすれば、この近傍において  $\delta$  のとる値は一定であると仮定できるので、上式を変形して積分すれば

$$v^2 + (x - \delta_k)^2 = R_k^2 \dots\dots\dots(6)$$

ただし、 $R_k$  は積分定数

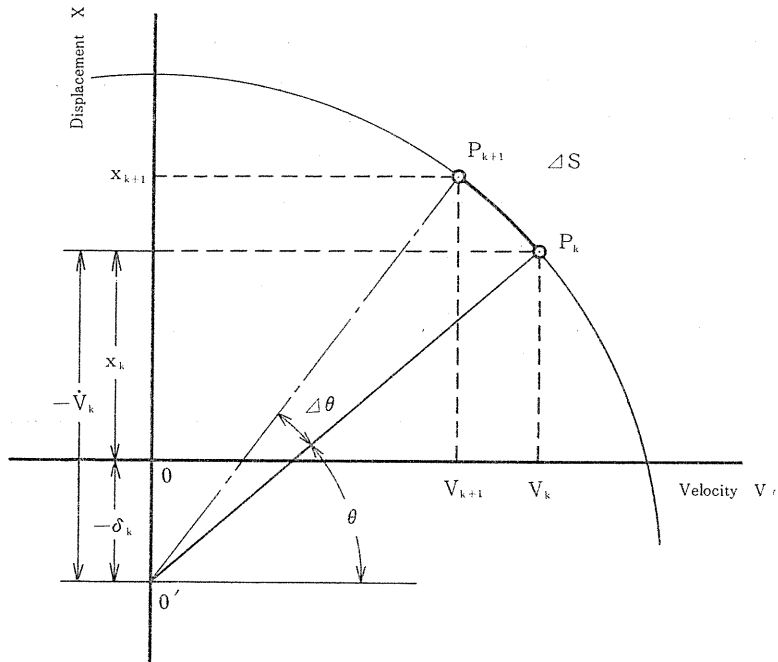


Fig. 2. Modified procedure of the delta method

式 (6) は、位相面上で  $x$  軸上に中心をもつ半径  $R_k$  の円の方程式であり、この曲線分によって状況点  $P_k$  近傍の軌道増分  $\Delta S$  を近似することが可能となる。この関係を図示すれば図 2 となる。

次に、 $\Delta\theta$  が与えられたものとし、位相面上  $P_{k+1}$  点の座標を求める。いま、平面上  $v_k=R_k\cos\theta, \dot{v}=R_k\sin\theta, R_k=\sqrt{v_k^2+\dot{v}_k^2}$  であるとすれば

$$\dot{P}_{k+1}=R_k e^{i(\theta+\Delta\theta)} \dots\dots\dots(7)$$

の式から決定される座標は、次の様になる。

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= a_1x + b_1v_k + c_1F(j \cdot \Delta t) \\ v_{k+1} &= a_2\{F(j \cdot \Delta t) - x_k\} + b_2v_k \end{aligned} \dots\dots\dots(8)$$

$$(k=0, 1, 2, \dots\dots n, j=k+0.5)$$

ここで、 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1$  は系の定数によって決定される係数で、

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \cos\omega_n \Delta t \\ a_2 &= \sin\omega_n \Delta t \\ b_1 &= a_2(1 - a_2 \zeta) \\ b_2 &= a_1 - 2a_2 \zeta \\ c_1 &= 1 - a_1 \end{aligned} \right\}$$

である。したがって、式 (3) の解は時間区分  $\Delta t$  が与えられたとき、式 (8) の逐次計算によって求めることができる。

2-2. 非線形 2 階常微分方程式で記述される系の挙動の数値計算法

実際のバネ機構においてはそれ自体が非線形であり、また、衝突点においてヘルツのスティフネスが存在して、そこに加わる力が変位についての非線形関数として考えられるなど、実質、非線形系として取扱う必要が生じてくる。

そこで、ここでは系の動作方程式が次のような形として与えられている場合を考える。

$$\dot{v} + G(v, x, t) = 0 \dots\dots\dots(9)$$

ただし、 $G$  は  $x, v$  についての非線形関数であり、 $t$  を陽に含む場合も考慮するものとする。

上記の場合も、原理的には前節と全く同様 2 つの代数方程式の逐次計算により与えられた方程式の解が求められることになる。すなわち

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= \lambda_1 v_k + \xi \dot{v}_k \\ x_{k+1} &= x_k + \xi v_k + \lambda_2 \dot{v}_k \end{aligned} \dots\dots\dots(10)$$

$$(k=0, 1, 2, \dots\dots n)$$

$$\text{ここで } \left. \begin{aligned} \xi &= \sin\omega_n \Delta t \\ \lambda_1 &= \cos\omega_n \Delta t \\ \lambda_2 &= 1 - \lambda_1 \end{aligned} \right\}$$

である。

したがって、状況点  $P_k$  における

$$\dot{v}_k = -G(v_k, x_k, t) \dots\dots\dots(11)$$

が与えられれば，式(10)を用いて  $P_{k+1}$  点の位置が直ちに決定できる。

### 3. 衝突振動の計算

#### 3-1 固定平面に衝突する場合

本節では，図3のように任意の外力によって駆動される振動系の質点が，固定平面に衝突する場合の挙動について考察する。

系の状態軌道は，式(10)による逐次計算によって決定されるが，一定時間区分  $\Delta t_i$  を用いて算定中，図4に示すような質点の変位  $x_{k+1}$  が固定平面上の規定の位置  $x=l$  に確実に合致することは極くまれで，ほとんどがその位置を越えた値として算出される。したがって，規定の位置を越えたかどうかを判定した後，変位  $x$  が  $x_k$  から  $l$  に達するに要す時間区分  $\Delta t_{i+1}$  の値を新たに決定してやらねばならない。これに必要な計算式は，位相面上から図式的に容易に導入することができる。すなわち

$$\Delta t_{i+1} \cong \Delta t_i \frac{x_{k+1} - x_k}{x'_{k+1} - x'_k} \dots\dots\dots (12)$$

$$(i=1, 2, \dots\dots m)$$

ただし， $x_{k+1}=l$

数值計算上は，許容誤差範囲まで繰返し（添字  $i$  を増加して）計算を行い， $(x_{k+1})_{i+1}$ ， $(v_{k+1})_{i+1}$  の値と同時に決定する。ひきつづき， $v_{k+1}$  の値に関しこの時点で新たに決定される質点の衝突直後の速度を，Newton の衝突による反撥の法則

$$\bar{v}_{k+1} = -e_0 v_{k+1} \dots\dots\dots (13)$$

ただし， $e_0$  は反撥係数

を用いて算出する。以下，衝突点に達した時点で同様の計算を繰返し，最終的には  $x_k=l$ ， $v_k=0$  となったところで計算を打ち切る。

衝突後の時間区分  $\Delta t_i$  を幾分か小さめにとって計算することは，状態軌道がスパイラル状に収束する性質をもっている上に，衝突から衝突までの時間々隔がせばまってくるので，現象を精確につかむ上ではかえって好都合になると思われる。

#### 3-2 二つの振動系が互に衝突する場合

状態軌道の計算にあたって，時間区分  $\Delta t$  を二つの振動系で同じ値にとれば， $\Delta\theta$  は系の固有角周波数  $\omega_n$  の大きさで決定され，両系の諸定数のあり方によって異なる値をとることがある。

いま， $\omega_{n2}/\omega_{n1}=\Omega_n$  とすれば，両系について

$$\Delta\theta_1 = \Delta\theta_2 / \Omega_n \dots\dots\dots (14)$$

の関係が成立つ。

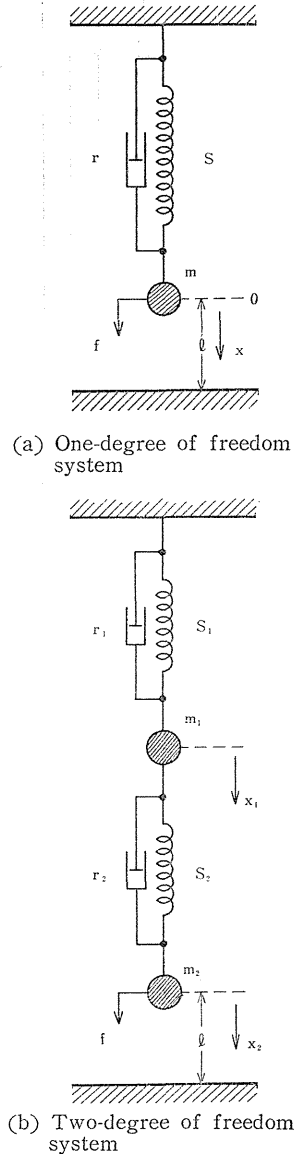


Fig. 3. Generalized model of vibratory systems with collision

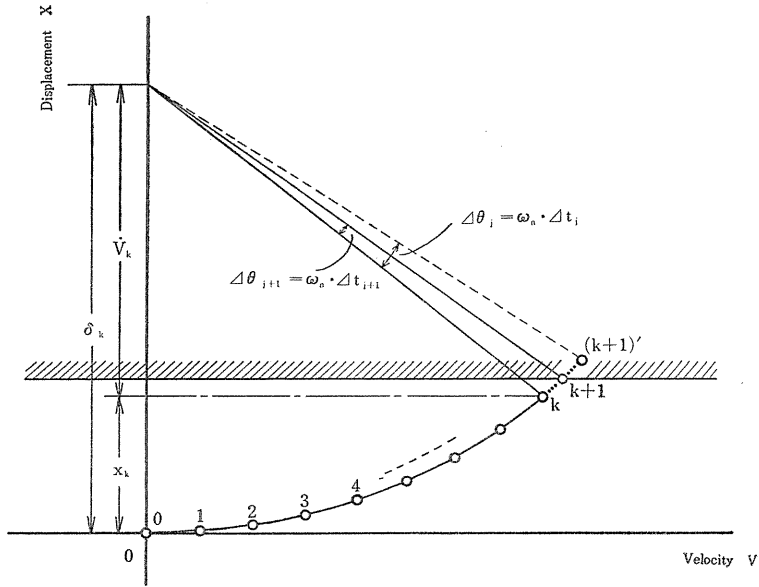


Fig. 4. Determination of  $\Delta\theta$  at collision point

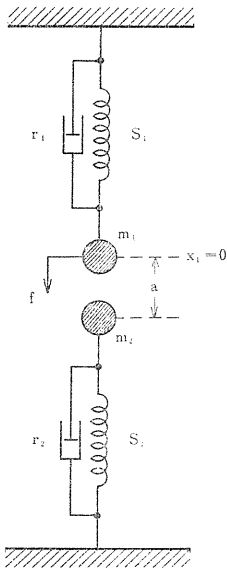


Fig. 5. A couple of vibratory systems

初回の衝突点(#1)までの軌道計算, ならびに衝突点の判定は, 前小節で述べたところによるが, それ以後は二つの系の軌道計算と同時に次回衝突点(#2)の判定を行う必要が生じてくる。

図6のように, 位相面上を移動する二つの系の状況点に注目し, その変位  $x_k, y_k$  の大きさの比率が  $x'_{k+1}, y'_{k+1}$  で逆転したかどうかを判別して次式の計算を行えば, 運動中の質点が互に衝突する位置  $D$  が求められる。

$$D = \frac{y'_k x_{k+1}' - x_k y_{k+1}'}{(x_{k+1}' - x_k) - (y_{k+1}' - y_k)} \dots\dots\dots(15)$$

したがって変位  $x_k, y_k$  から  $D$  に達するに要す時間区分  $\Delta t_{i+1}$  は式(12)において  $x_{k+1} = D$  とおけば決定できることになる。

なお, 質点  $m_1$  の速度  $v_{k+1}$ , 質点  $m_2$  の速度  $u_{k+1}$  に関し, この時点で新たに決定される衝突直後の速度  $\bar{v}_{k+1}, \bar{u}_{k+1}$  は, Newton の反撥法則

$$\begin{aligned} \bar{v}_{k+1} &= v_{k+1} - (1 + e_0) \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_{k+1} - u_{k+1}) \\ \bar{u}_{k+1} &= u_{k+1} - (1 + e_0) \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_{k+1} - u_{k+1}) \end{aligned} \dots\dots\dots(16)$$

による。

単一の1自由度振動系が固定平面に衝突するとき、衝突の周期に規則的な減少が認められるが、現実の二つの振動系が互に衝突しあう場合には、鎖状振動、あと離れを伴う振動を繰返し、それぞれの系の周期はやや不規則に減少の過程をとり、最終的には両系が連成振動に入り両系の諸定数によって定まる一定周期で減衰する。実際の衝突振動に極めて近い挙動を実現するには、二つの系を多自由度の振動系で近似することによって為されるものと思われる。

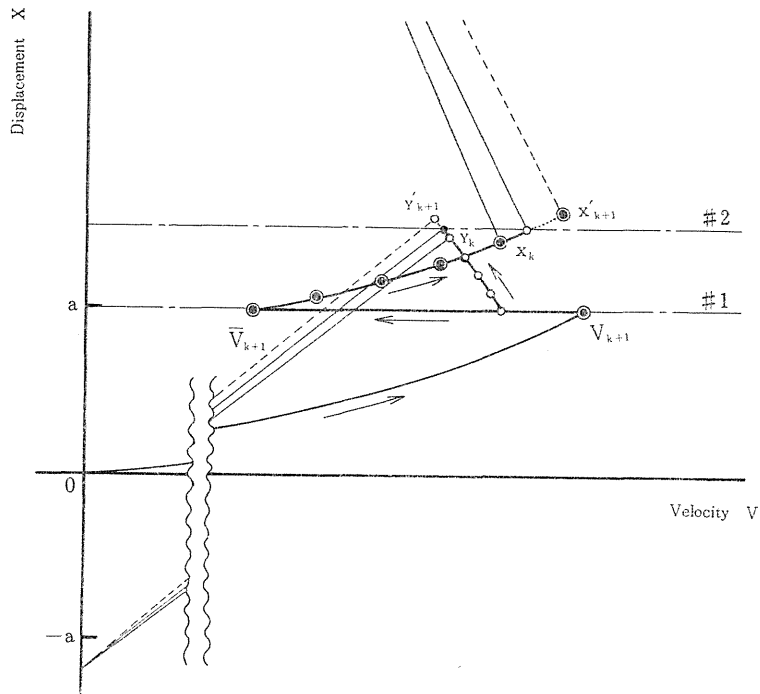


Fig. 6. Phase-plane diagram for behavior

4. 衝突振動系における位相面軌道・時間応答の計算例

前述の手法による計算例として、一定強制入力による衝突振動系の状態軌道ならびに時間応答の算出結果を掲げる。

4-1. 1自由度の線形振動系

$$\dot{v} + 2\zeta v + x = F(t) \dots\dots\dots(17)$$

ここでは、 $\omega_n=1, \zeta=0.25, F(t)=1, l=0.75, \Delta t=0.01$  として計算、破線は非衝突時、実線は衝突時の挙動を示す。

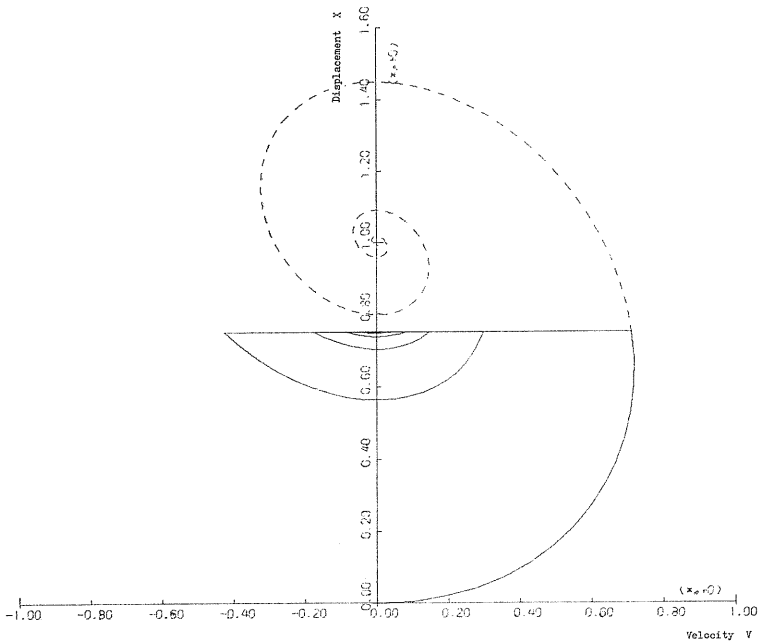


Fig. 7. Phase-plane trajectory ;  
one-degree of freedom linear system with step-function excitation

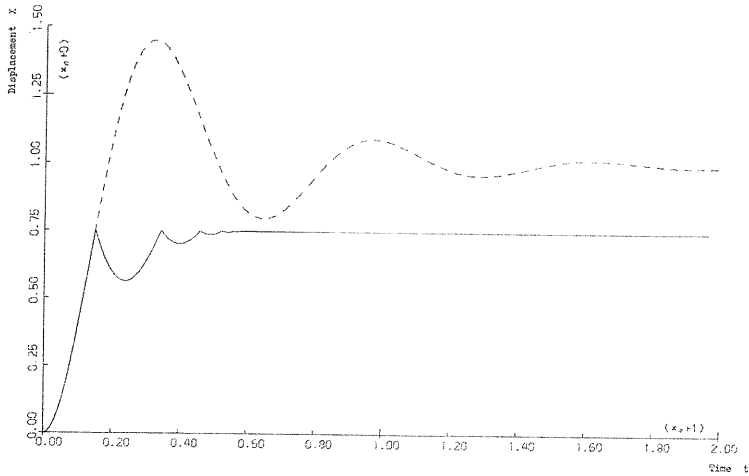


Fig. 8. Time response curve ;  
one-degree of freedom linear system with step-function excitation

4-2. 1自由度の非線形振動系

$$\dot{v} + 2\zeta v + (1 + 0.5x^2)x = F(t) \dots\dots\dots(18)$$

$\omega_n=1, \zeta=0.25, F(t)=1, l=0.75, \Delta t=0.01$  として計算。



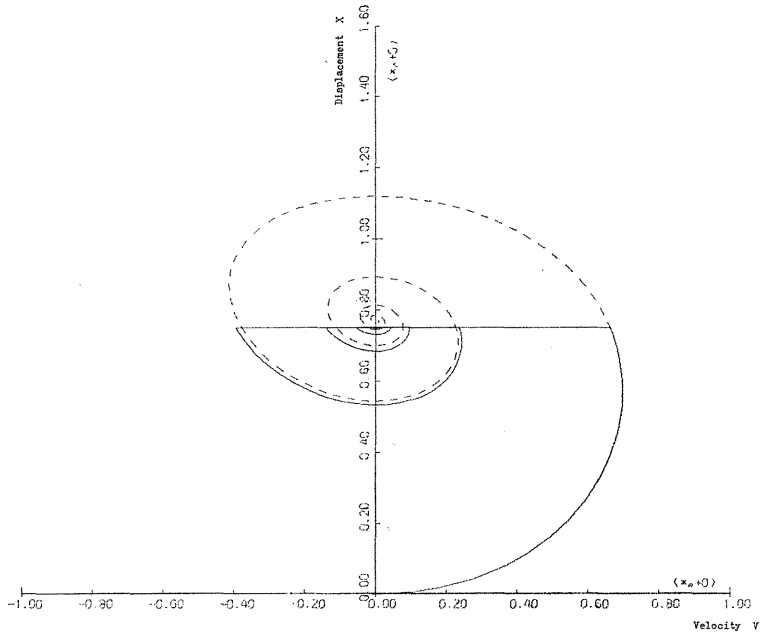


Fig. 9. Phase-plane trajectory ;  
one-degree of freedom nonlinear system with step-function excitation

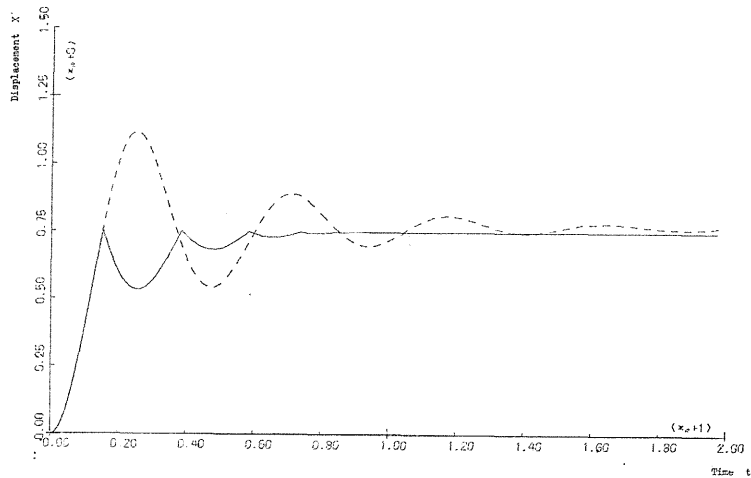


Fig. 10. Time response curve ;  
one-degree of freedom nonlinear system with step-function excitation

4-3. 2自由度の線形振動系

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}_1 + 2\zeta_1 v_1 + x_1 - 2\zeta_3 \Omega_n (v_2 - v_1) - \Omega_n^2 (x_2 - x_1) &= 0 \\ \dot{v}_2 + 2\zeta_2 (v_2 - v_1) + (x_2 - x_1) &= F(t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

$\omega_{n1} = \omega_{n2} = 1, \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 0.25, F(t) = 1, l = 1.5, \Delta t = 0.01$  として計算。

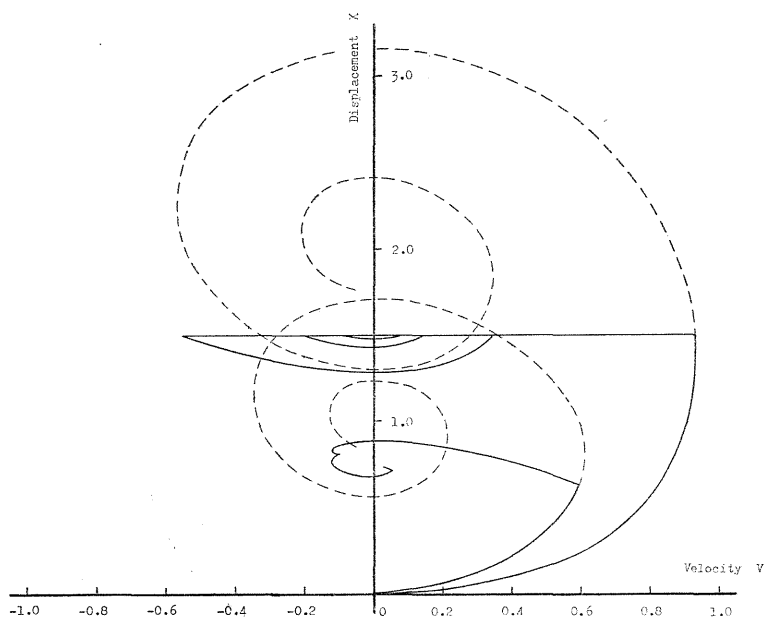


Fig. 11. Phase-plane trajectory ;  
two degree of freedom system with step-function excitation

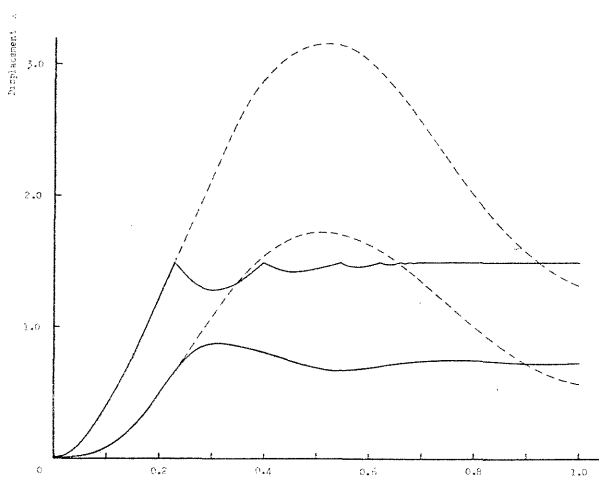


Fig. 12. Time response curve ;  
two degree of freedom system with step-function excitation

計算時に、1 ステップ毎の許容誤差を  $10^{-5}$  以内にとどめるためには、 $\Delta t$  の値を  $\underline{0.0342}$  以下にとどめれば良く、したがって、実際の物理系について状態軌道を求めようとするとき、時間区分  $\Delta t$  のとる値は系に固有な角周波数  $\omega_n$  に関して決定されることになる。

## 5. む す び

通常の数値計算による微分方程式の求解を, 衝突振動系へ適用するにあたって直面する問題は, 衝突点が任意の時刻に現われてくるため, これに適合した時間区分を見いだしてやらねばならぬことであった。この解決を果せば振動系の挙動は直ちに算出できるが, 本報では, 実際の振動系の解析への足がかりを得るために, 位相面解析の原理を用いることを考慮し, 衝突振動系の動きに適合した任意の時間区分に対応する状態軌道ならびに実時間応答を, あわせて求める計算法を導入し, その効果を示した。

その結果, 系を多自由度とした場合の衝突振動, 非線形衝突振動, あるいは衝突点上でのヘルツのスティフネス, 摩擦係数などを考慮した場合の解析に役立つことが認められた。今後の課題として, 実際の系に等価な数学モデルを作成すると同時に, 小型通信リレーのチャッタの解析を計画している。

おわりに, 本研究にあたって多くの文献・資料を提供, ご指導くださった東京電気通信大学・武井建三教授, 田中清臣助手, ならびに計算にあたって協力を得た本学電子計算センター谷川, 檜山技官そして植木氏に深甚の謝意を表する。

## 参 考 文 献

- (1) 加藤, 武井; 位相面による1自由度振動系のチャッタの解析, 電子通信学会誌, *Vol. 49*, No. 9, (1966), p. 1622
- (2) 米川, 村田, 植木; 損失のある1自由度振動系のチャッタ, 電子通信学会誌, *Vol. 50*, No. 7, (1967), p. 1248
- (3) 西口, 武井, 小林; 1個の集中質量を有する梁の衝突振動の実験, 機構部品研究会資料, (1962)
- (4) L. S. Jacobsen; "On a General Method of Solving Second Order Ordinary Differential Equations by Phase Plane Displacements," *J. Appl. Mech.*, *Vol. 19*, pp. 543-553(1952)
- (5) A. H. Chtrch; "Mechanical Vibrations," John Wiley and Sons, Inc., (1963)
- (6) 田中, 武井; 衝突点ダイアプロティクス(1), 機構部品研究会員料 *EMC* 68-12 (1968)
- (7) 東, 山田; 非線形微分差分方程式の図式解法, 第9回計測自動制御学会講演会, 127(1970)