

塑性変形体中の内部空隙の閉鎖挙動

大森宮次郎*, 山崎 明*

(昭和59年8月30日受理)

Closing Behavior of Internal Void in Plastically Deforming Body

MIYAJIRO OHMORI, AKIRA YAMAZAKI

Abstract— This report relates to a basic study on closing behavior of a circular hole at the center of rectangular block during compression under plane strain condition. Two upper bound solutions dividing the block into four triangular regions have been presented as the closing model of the void. The first solution consists of the velocity discontinuity lines drawn from the vertex of the block to the intersection point of the circumference of the void and the horizontal axis of symmetry, and the second one is made up of the velocity discontinuity lines running from the vertex against the center of the void.

According to these solutions, the percent reduction in height necessary for complete closure increases with increasing fraction of void. The longitudinal and lateral ratio of the void diameter, the area ratio and the volume fraction of the void decrease rapidly with reduction in height. The relation between the area ratio and the shape factor of the closing void was also examined.

The trends of the experimental results carried out by using plasticine model material seemed to be similar to the first theoretical solution.

1. 緒 言

溶鋼が凝固するとき、収縮や気泡の発生により鋼塊中に収縮孔や多数の空孔等の巨視的欠陥が残り、また柱状晶が発達し、結晶粒は粗大となる。熱間における圧延や鍛造等の塑性加工は、これらの収縮孔や空孔を閉鎖させ、かつ圧着させ、また柱状晶を破壊させて再結晶により細粒の結晶を生ぜしめて性質向上に大きな役割を果たしている。塑性加工によるこれらの空孔等の巨視的欠陥の閉鎖、圧着に関しては、従来より人工空孔を与えたモデル材料による実験研究^{1),2)}あるいは実機を用いた圧延による実験研究^{3),4)}が行われてきており、空孔の閉鎖、圧着に対する効果的な加工条件等が検討されてきた。一方、内部空隙の閉鎖挙動問題に対し、近年上界法を用い、その閉鎖のメカニズムの考察が試みられるようになって^{5),6),7)}、実験と理論の両面から空隙の閉鎖挙動が明らかにされつつある。

本研究は、鋼塊中の空隙過程に関する基礎的事項を明らかにすることを目的としたものであり、平面ひずみ変形における単一2次元空隙の閉鎖過程を上界法を用いて解析するとともに、プラスチックをモデル材料として用いた実験観察も行い、空隙挙動を考察する。

2. 上界法による空隙閉鎖挙動の解析

2.1. 仮定と変形初期における上界解

鍛造加工は、素材の変形状態によって種々に分類されるが、自由鍛造および型鍛造を通じて共通する変形としてすえ込みと広げ加工が最も基本となる。そこで、解析のモデルとして、中央に2次元の円孔をもつ初期高さ $2h_0$ 、幅 $2w_0$ で単位厚さの直方体ブロックを平行な上下のアンビル間で圧縮する場合を考える。解析にあたり次の仮定をおく。

(1) 直方体ブロック材を剛完全塑性体とする。

* 茨城大学工学部機械工学第二学科（日立市中成沢町）

- (2) ブロックの高さおよび幅方向のみの平面ひずみ変形とする。
- (3) 空隙は、初め円孔であるが、塑性変形により圧縮方向に短軸、それに直角方向に長軸をもつた円孔に変化するものとする。
- (4) アンビルは、上下から単位で速度で、アンビル間距離を短縮する方向に運動する。

Fig. 1(a)にその解析モデルを示す。ブロックは、上下および左右対称であるから、解析にあたっては右上方の1/4ブロックのみを考えればよい。このとき、同図(b)に示すように最も単純な上界解として、空隙の円周上の任意の1点からブロックの最も近い頂点に至る速度不連続線を考えることができる。その速度不連続線によって1/4ブロックは、領域ⅠおよびⅡに分けられる。

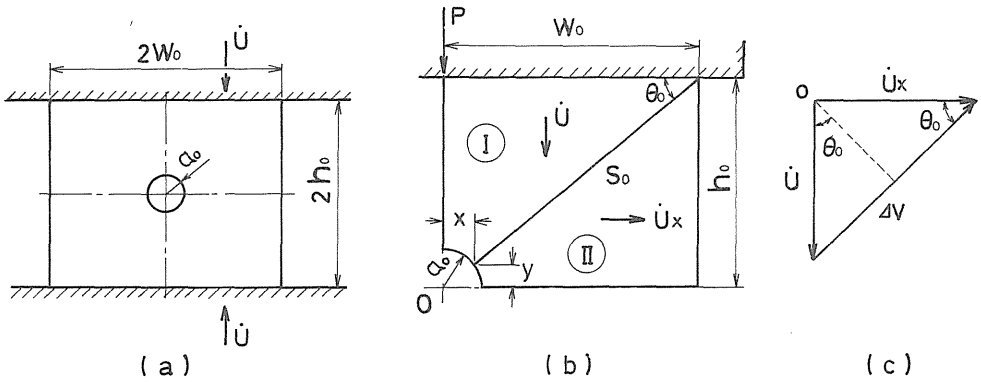


Fig. 1 (a) Plane strain compression with parallel platens. (b) An upper bound solution. (c) Hodograph for the upper bound solution.

塑性変形は、速度不連続線周辺にのみ生じ、他の部分は剛体として運動するものとする。このとき、領域Ⅰがアンビルとともに速度 $\dot{U} (=1)$ で下降するとき、領域Ⅱは、速度 \dot{U}_x で右方に運動する。その hodograph を同図(c)に示す。この速度不連続線を S_0 で表わし、 S_0 に沿う速度不連続量を Δv で表わす。 S_0 が交わる空隙の円周上の1点の座標を (x, y) とする。図の幾何学的関係を用いると、速度不連続量 Δv は、

$$\Delta v = \dot{U} \sqrt{1 + \left(\frac{w_0 - x}{h_0 - y}\right)^2} \quad (1)$$

不連続線 S_0 の長さも S_0 で表わすと

$$S_0 = \sqrt{(w_0 - x)^2 + (h_0 - y)^2} \quad (2)$$

となる。ブロック材のせん断降伏応力を k 、圧縮降伏応力を Y とすれば、 $k = Y/\sqrt{3}$ であり、剛完全塑性材では $\tau \leq k = Y/\sqrt{3}$ となる。いま、1/4 ブロックに上方から P なる圧縮荷重が作用し、速度 $\dot{U} (=1)$ で下降するときの外力のなす仕事を $J_0 (= \int_{w_0} P \dot{U} dw_0)$ とすれば、上界定理により

$$J_0 = \int_{S_0} \tau \Delta v ds = \int_{S_0} k \cdot \Delta v ds$$

$$= \frac{Y}{\sqrt{3}} \dot{U} \sqrt{1 + \left(\frac{w_0 - x}{h_0 - y}\right)^2} \int_{S_0} ds$$

ここで $\int_{S_0} ds = S_0$ であるから、上式は(2)式を用いると

$$J_0 = \frac{Y}{\sqrt{3}} \dot{U} \left\{ (h_0 - y) + \frac{(w_0 - x)^2}{h_0 - y} \right\} \quad (3)$$

ただし、 x, y は $x^2 + y^2 = a_0^2$ を満足しなければならない。この条件のもとに J_0 の極小値を求めると、それが本解析における最小の上界値となる。しかし、この方法は複雑であるので、ここではブロック頂点から発する速度不連続線が、空隙の円弧と交わる特別な3点を選び、それらに対する J_0 の値を比較する簡便な方法を用いることにする。その3点とブロック頂点を結ぶ速度不連続線を Fig. 2 に示す。円周上の点1の座標は $(x = a_0, y = 0)$ 、点2は $y/x = h_0/w_0$ の関係を満たす位置で、この場合速度不連続線はブロック中心に向かう。また点3は座標 $(x = 0, y = a_0)$ の位置である。これらの3点、1、2、3とブロック頂点を結ぶ速度不連続線をそれぞれ S_{01}, S_{02} および S_{03} とする。それらに対応する式(3)の左辺の J_0 の値を J_{01}, J_{02} および J_{03} で表わすと、

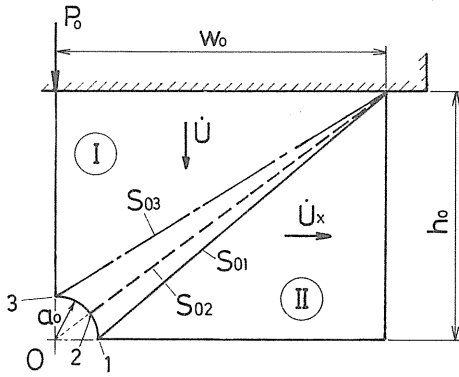


Fig. 2 Three possible upper bound solutions S_{01} , S_{02} and S_{03} and at the early stage of compression.

$$J_{01} = \frac{Y}{\sqrt{3}} \dot{U} \left\{ h_0 + \frac{(w_0 - a_0)^2}{h_0} \right\} \quad (4)$$

$$J_{02} = \frac{Y}{\sqrt{3}} \dot{U} \left\{ h_0 + \frac{w_0^2 - a_0 \sqrt{w_0^2 + h_0^2}}{h_0} \right\} \quad (5)$$

$$J_{03} = \frac{Y}{\sqrt{3}} \dot{U} \left\{ h_0 - a_0 + \frac{w_0^2}{h_0 - a_0} \right\} \quad (6)$$

となる。空隙の初期体積率を f_0 、ブロックの幅と高さの比を m とすると、

$$f_0 = \frac{\pi a_0^2}{4 w_0 h_0} \quad m = \frac{w_0}{h_0} \quad (7)$$

であるから、この f_0 と m を用い、かつ式(4)~(6)の両辺を $Y \dot{U} h_0 / \sqrt{3}$ で割って無次元化すると、

$$J_{01}^* = 1 + m^2 - \left\{ 4m \sqrt{\frac{mf_0}{\pi}} - \frac{4mf_0}{\pi} \right\} \quad (4)'$$

$$J_{02}^* = 1 + m^2 - 2 \sqrt{\frac{mf_0}{\pi}} \sqrt{\frac{4mf_0}{\pi} + 1} \quad (5)'$$

$$J_{03}^* = 1 + \frac{m^2}{1 - 2 \sqrt{\frac{mf_0}{\pi}}} - 2 \sqrt{\frac{mf_0}{\pi}} \quad (6)'$$

となる。いま1例として、 $f_0 = 19.22 \times 10^{-3}$ として $J_{01}^* \sim J_{03}^*$ を m について図示すると Fig. 3 のようになる。 J_{01}^* と J_{02}^* は、 $m \doteq 0.6$ 付近で交差し、それ以上の m に対して逆転するが、両者の値は比較的接近した値である。これに対し J_{03}^* は、 $m \doteq 0.3$ 以上で J_{01}^* および J_{02}^* より大きい値を示す。このことは、塑性変形の消費仕事率からみて、速度不連続線の S_{01} および S_{02} が、空隙閉鎖に対する上界解としてより適切であることを示唆する。

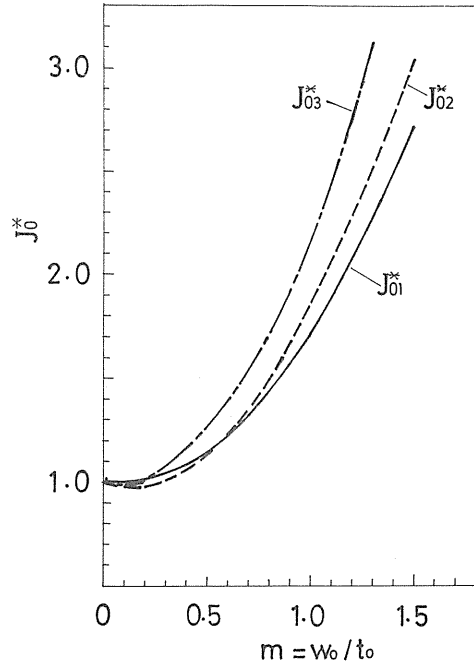


Fig. 3 Comparison of the rate of energy dissipation in solutions S_{01} , S_{02} and S_{03} .

2.2 変形の任意段階における上界解

ブロックが圧縮変形を受け、幅 $2w$ 、高さ $2h$ となり、前述の仮定のように半径 a_0 の円孔空隙が、圧縮方向に短軸 $2b$ 、横方向に長軸 $2a$ のだ円孔に変化した任意段階を考える。このとき、速度不連続線 S_{01} , S_{02} , S_{03} に対応する速度不連続線を S_1 , S_2 , S_3 とすると (Fig. 4), それらに対応する消費仕事率 J_1 , J_2 , J_3 は、

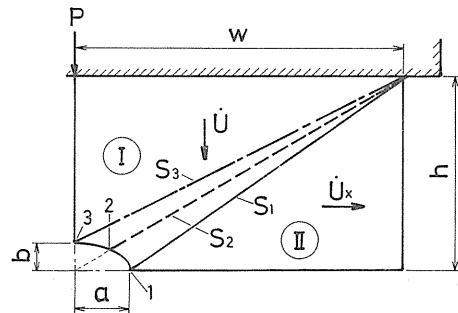


Fig. 4 Upper bound solutions S_1 , S_2 , S_3 at an arbitrary period of compression.

$$J_1 = \frac{Y}{\sqrt{3}} \dot{U} \left\{ h + \frac{(w-a)^2}{h} \right\} \quad (7)$$

$$J_2 = \frac{Y}{\sqrt{3}} \dot{U} \left\{ h - \sqrt{\frac{abh}{a^2 h^2 + b^2 w^2}} - \frac{b}{\sqrt{1 + \left(\frac{bw}{ah}\right)^2}} \left(\frac{w}{h}\right)^2 \right\} \quad (8)$$

$$J_3 = \frac{Y}{\sqrt{3}} \dot{U} \left\{ h - b + \frac{w^2}{h-b} \right\} \quad (9)$$

となる。変形が進行した段階では、 $a > b$ 、 $w > h$ となり、

$$J_1 < J_2 < J_3 \quad (10)$$

が成立する。

以上の結果より、 $w_0 > h_0$ なるブロック寸法および空隙体積率 f_0 をえらぶことによって、変形の初期および任意段階に至るまで、速度不連続線 S_1 は S_2 より、また S_2 は S_3 より小さな消費仕事率の上界解を与えることになる。

2.3 空隙の閉鎖条件

前述のように、変形の初期および任意段階を通じ、速度不連続線 S_1 は S_2 より、また S_2 は S_3 より低い消費仕事率の上界解となることから、以下の解析では、速度不連続線 S_1 および S_2 に対する空隙の閉鎖条件を考察する。

2.3.1 速度不連続線 S_1 の場合

変形の初期と任意段階の $1/4$ ブロックの変形状況を Fig. 5 に示す。高さ減少率を r とすれば、任意段階の

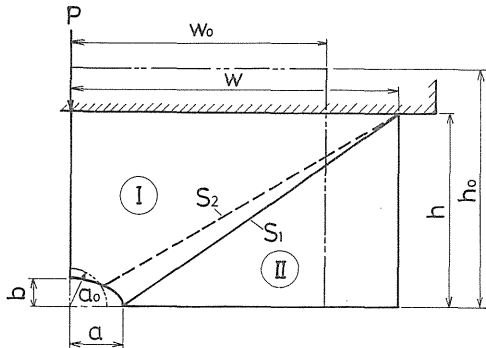


Fig. 5 Upper bound solutions S_1 and S_2 selected for the calculation of void closure.

高さ h は、

$$h = h_0 (1 - r) \quad (11)$$

で表わされ、また本上界解の性質から

$$h - b = h_0 - a_0 \quad (12)$$

が成立しなければならない、式(11)と式(12)より

$$b = a_0 - h_0 \cdot r \quad (13)$$

また上界解 S_1 の場合、空隙の長軸 a は、

$$a = \sqrt{a_0^2 - h_0^2 r} \quad (14)$$

にしたがって変化する。

体積一定の条件は、 $1/4$ ブロックに対し

$$wh - \frac{\pi}{4} ab = w_0 h_0 - \frac{\pi}{4} a_0^2 \quad (15)$$

で表わされる、式(15)より

$$w_0 h_0 = wh (1 + \alpha) \quad (16)$$

ただし

$$\alpha = \frac{\pi (a_0^2 - ab)}{4 wh} \quad (17)$$

とすると、 $\alpha \geq 0$ のとき空隙の閉鎖が起る、式(13)、(14)を式(17)に代入すると、

$$\alpha = \frac{\pi a_0^2}{4 wh} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{h_0}{a_0} \cdot r\right) \sqrt{1 - \left(\frac{h_0}{a_0}\right)^2 \cdot r^2} \right\} \quad (18)$$

となり、 $0 \leq r \leq a_0/h_0$ でなければならないから、この r に対しつねに $\alpha \geq 0$ となり、空隙の閉鎖が任意の高さ減少率で起ることになる。

$ab = 0$ となると、空隙の閉鎖が完了する。式(13)および(14)より空隙の閉鎖完了条件は、

$$r_c = \frac{a_0}{h_0} \quad (19)$$

なる高さ減少率となる。

空隙の縦横寸法比は、式(13)と(14)より

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{1 - \frac{h_0}{a_0} \cdot r}}{\sqrt{1 + \frac{h_0}{a_0} \cdot r}} \quad (20)$$

で与えられ、また空隙の面積比は、 $A_0 = \pi a_0^2/4$ 、 $A = \pi ab/4$ で表わすと

$$\begin{aligned} \frac{A}{A_0} &= \left(1 - \frac{h_0}{a_0} \cdot r\right) \sqrt{1 - \left(\frac{h_0}{a_0}\right)^2 \cdot r^2} \\ &= \frac{4 \left(\frac{a}{b}\right)}{\left\{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2\right\}^2} \quad (21) \end{aligned}$$

となる。ただし a/b は空隙の形状比と呼ばれる量である。

変形の任意段階における空隙の体積率 $f = (\pi/4) ab/wh$ は、初期体積率 $f_0 = (\pi/4) a_0^2/w_0 h_0$ で表わすと、

式(13), (14)および式(15)より

$$f = \frac{f_0 \left(1 - \frac{h_0}{a_0} r\right) \sqrt{1 - \left(\frac{h_0}{a_0}\right)^2 r^2}}{1 - f_0 \left\{1 - \left(1 - \frac{h_0}{a_0} \cdot r\right) \sqrt{1 - \left(\frac{h_0}{a_0}\right)^2 r^2}\right\}} \quad (22)$$

で与えられる。

2.3.2 速度不連続線 S_2 の場合

この場合も式(11), (12), (13)および式(15)が成立する。このほか, 本上界解の性質から次式が成立しなければならない (Fig. 5)

$$w - a = w_0 - a_0 \quad (23)$$

したがって, 空隙の横寸法 a は, 式(11), (13), (15)および式(23)より

$$a = \frac{1 - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{a_0}{h_0} + \left(\frac{w_0}{a_0} - 1\right) \cdot r}{1 - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{a_0}{h_0} - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot r} \cdot a_0 \quad (24)$$

となる。この場合, 式(13)で表わされる空隙の縦軸が $b = 0$ となる高さ減少率 $r_c = a_0/h_0$ となっても, $a \neq 0$ である。これは, 本上界解が, 空隙の縦軸が縮小すれば, 横軸が伸びるというメカニズムから生ずる結果である。

この場合の空隙の閉鎖開始条件を求める。式(13), (24)を式(17)に代入して,

$$\alpha = \frac{\pi}{4wt} \cdot \frac{h_0 (w_0 - a_0) r - (w_0 - h_0) a_0}{1 - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{a_0}{h_0} - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) r} \quad (25)$$

この式は, $r < 1$ で分母が正であるから, $\alpha \geq 0$ となるのは,

$$r_s \geq \frac{\frac{w_0}{h_0} - 1}{\frac{w_0}{a_0} - 1} \quad (26)$$

となり, r_s 以上の高さ減少率のときに空隙の閉鎖が起ることを示している。

次にこの場合の空隙の縦横比 b/a , 面積比 A/A_0 および体積率 f は, 次の各式のように求められる。

$$\frac{b}{a} = \frac{\left(1 - \frac{h_0}{a_0} \cdot r\right) \left\{1 - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{a_0}{h_0} - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) r\right\}}{1 - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{a_0}{h_0} + \left(\frac{w_0}{a_0} - 1\right) \cdot r} \quad (27)$$

$$\frac{A}{A_0} = \left(1 - \frac{h_0}{a_0} r\right) \cdot \frac{1 - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{a_0}{h_0} + \left(\frac{w_0}{a_0} - 1\right) \cdot r}{1 - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{a_0}{h_0} - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot r} \quad (28)$$

$$f = \frac{f_0 \left(1 - \frac{h_0}{a_0} r\right) \left\{1 - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{a_0}{h_0} + \left(\frac{w_0}{a_0} - 1\right) \cdot r\right\}}{\left(1 - r\right) \left\{1 - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{a_0}{h_0} + \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{a_0}{w_0}\right) \cdot r\right\}} \quad (29)$$

空隙の閉鎖が完了するのは, $f = 0$ のときであるから, 式(29)より

$$r_c = \frac{a_0}{h_0} \quad (30)$$

となり, これは式(19)と同じである。

2.4 数値計算

ブロックの寸法を $w_0 = 25 \text{ mm}$, $h_0 = 20 \text{ mm}$ とし, 空隙の直径を $2a_0 = 7.0 \text{ mm}$, 4.0 mm , および 2.6 mm に変化すると, 空隙の体積率は $f_0 = 1.92 \times 10^{-3}$, 6.4×10^{-3} および 2.6×10^{-3} に変化する。これらの量を用い, 以上の諸式により数値計算を行った。

Fig. 6 は, 空隙の閉鎖開始と完了を空隙の初期体率で表わしてある。Fig. 7 は, 空隙の縦横比 b/a の高さ減少率 r による変化を示す。

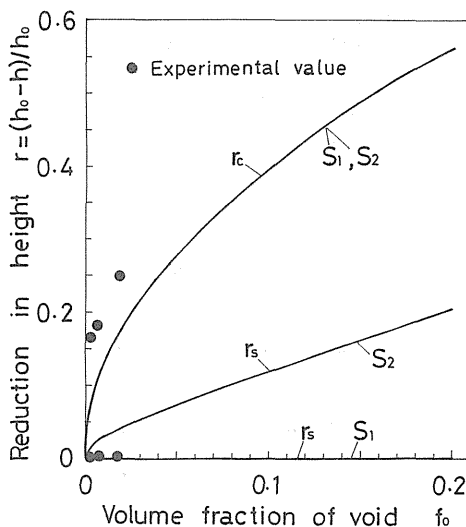


Fig. 6 Relations between reduction in height required for closure start or closure completion and the fraction of void.

Fig. 8 は, 空隙の面積比 A/A_0 を高さ減少率 r で表わしてある。

Fig. 9 は, 空隙の体積率 f の高さ減少率 r による変化を示し, 空隙の閉鎖経路を示している。

さらに Fig. 10 は, 空隙の面積比 A/A_0 と形状比 a/b の関係を描いたものである。

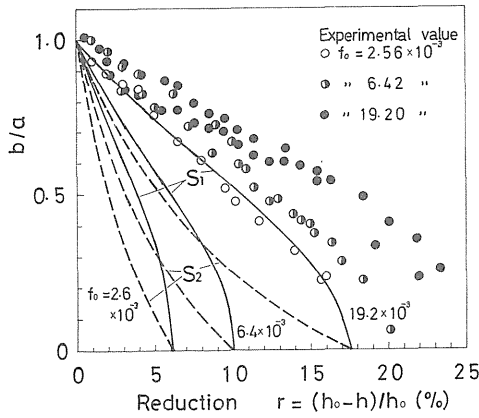


Fig. 7 Influence of reduction in height on the longitudinal and lateral ratio of void diameter.

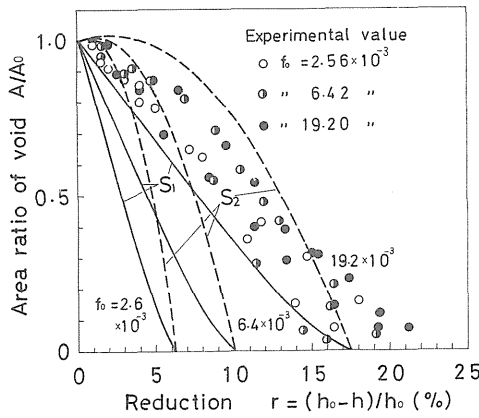


Fig. 8 Influence of reduction on the area ratio of void.

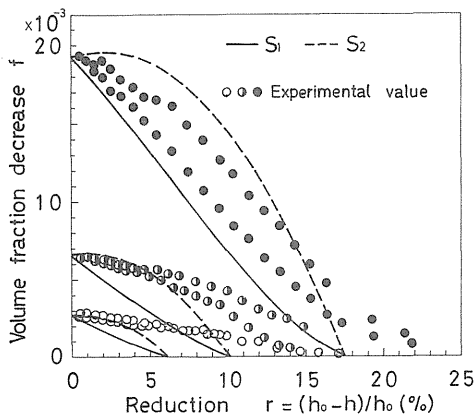


Fig. 9 Influence of reduction on the void fraction decrease for specimens three initial fractions of void.

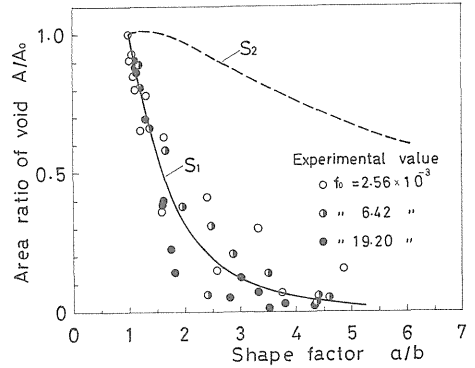


Fig. 10 Relation between the area ratio and the shape factor of void.

3. 実験による空隙閉鎖挙動の観察

3.1 実験方法

実験には、市販の白色プラスチックをモデル材料として使用した。気泡等を十分に除去してから寸法約 52 × 42 mm の型内におさめ、ブリネルかたさ試験機を用い、圧力約 3.4 kgf/cm² を加えて圧縮し密度を高めた。この作業は、直径 7.0, 4.0 および 2.6 mm の黄銅棒をブロック中心に挿入した状態で行い、中心孔をあけた。さらに型より上下枠を外し、そのプラスチックブロックを押し出し、最終的に全幅 2w₀ = 50 mm, 全高 2h₀ = 40 mm, 厚さ 30 mm のブロックを製作した。中央の空隙は、厚さ方向に貫通している。

プラスチック材料の室温 (23℃) における応力-ひずみ曲線の実測結果を Fig. 11 に示す。ひずみ約 0.1 以上で、応力が約 1.2 kgf/cm² ではほぼ一定値を示しており、上記のように十分に加圧して成形したプラスチックでは、剛完全塑性体の仮定がある程度正しいと言える。

上述のようにして製作した中央孔をもつプラスチックブロックを厚さ 30 mm 方向に変形が起らず高さや幅方向に変形する平面ひずみ状態となるように型内に納めて、万能材料試験機により圧縮変形させた。型面とプラスチックの間には、ワセリンを十分に塗布した。型の前面は、厚さ 5 mm の透明アクリル樹脂材とし、プラスチックの圧下にもなう空隙の変形模様を写真撮影した。

空隙の寸法変化は、フィルムを投影機で拡大して測定した。

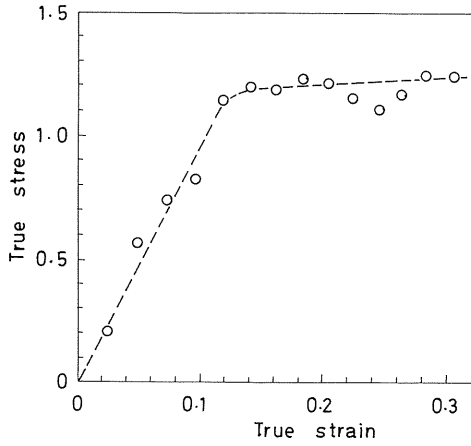


Fig. 11 Stress-strain curve of the plasticine material at a temperature of 23°C.

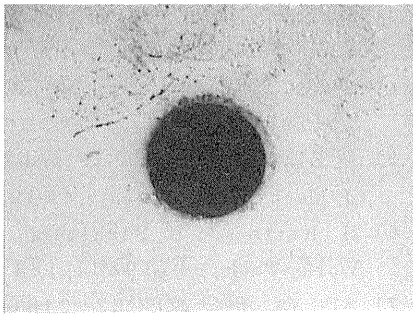
3.2 実験結果

Fig. 12 は空隙の閉鎖する過程を示したものである。変形の進行とともに、速度不連続線 S_1 と類似のすべり線が観察されるであろう。

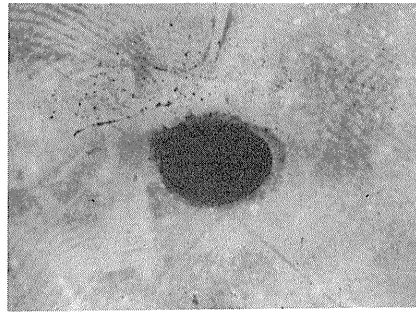
おもな測定結果を Fig. 6~11 に示す理論曲線とともに描いてある。

Fig. 6 に示すように、空隙の閉鎖は変形の初期から開始しており、これに対し、閉鎖完了は、理論値よりわずかに高い高さ減少率で起ることがわかる。

空隙の縦横寸法比 b/a は、Fig. 7 に示すように実験値はいずれも速度不連続線 S_1 の理論曲線の形状に類似した分布を示し、しかも $f_0 = 19.2 \times 10^{-3}$ に対する曲線の付近およびそれより上位に分布する。



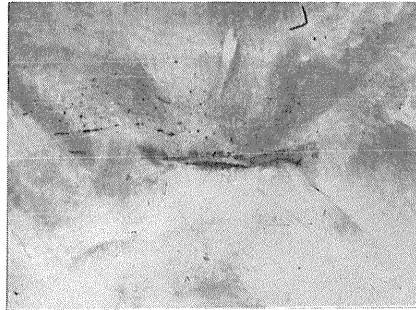
(a) $r = 0\%$



(b) $r = 7.4\%$



(c) $r = 21.1\%$



(d) $r = 26.3\%$

$$f_0 = 19.20 \times 10^{-3}$$

Fig. 12 Closing behavior of void with advancing compression.

空隙の面積比 A/A_0 の高さ減少率 \underline{r} による変化を示す実験値は、 $f_0 = 19.2 \times 10^{-3}$ に対する速度不連続線 S_1 と S_2 の理論曲線の間分布する。高さ減少率 \underline{r} の増加による面積比 A/A_0 の減少の傾向は、やはり速度不連続線 S_1 を用いた計算曲線と類似する (Fig. 8)。

空隙の体積率 f の高さ減少率 \underline{r} による実験値の変化は、 $f_0 = 19.2 \times 10^{-3}$ の場合、速度不連続線 S_1 と S_2 を用いた計算曲線の間分布し、その傾向はやはり S_1 に対する曲線に類似する (Fig. 9)。しかし、空隙の体積率が小さい場合は、図にみられるように変形の初期には、 S_2 不連続線に対する計算曲線とよく一致するが、変形の中期以後大きく外れる傾向がみられる。

しかるに、空隙の形状比 a/b と面積比 A/A_0 の関係は、Fig. 10 のように、いずれの実験値もその分布傾向は、速度不連続線 S_1 に対する計算結果とよく一致することがわかる。

以上の実験結果において、空隙の体積率が小さくなると実験値と理論値が一致しなくなり、また閉鎖完了の高さ減少率も実験値の方が高くなることは、実験に際してプラスチックブロックと型間を十分に潤滑したけれども、摩擦を皆無にすることが困難なことによるものと考えられよう。

4. 結 言

鍛造加工等における鋼塊中の空隙の閉鎖挙動を調べる

ため、2次元の円空隙を中心にもつブロックの圧縮変形に対し簡単な速度不連続線を仮定し、上界法を用いてその空隙の閉鎖挙動を検討した。その結果、ブロック頂点とブロックの上下対称軸と空隙の円周との交点を結ぶ速度不連続線 S_1 が、変形の初期および任意段階ともにより小さな塑性仕事率を与え、空隙の閉鎖挙動に対するより低い上界解を与える。しかもモデル材料プラスチックを用いた実験結果とも、その閉鎖挙動を示す諸量の傾向が比較的良好に一致することが明らかになった。

参 考 文 献

- 1) 中島, 渡辺(和), 渡辺(司), 田村, 塑性と加工, 22-251(1981), 1230
- 2) 中島, 渡辺(和), 渡辺(司), 田村, 中田, 塑性と加工, 23-256(1982), 403
- 3) 田川, 田中, 平沢, 角南, 鉄と鉄, 62-13(1976), 118
- 4) 喜多村, 今村, 朝永, 斎藤, 津田, 鉄と鋼, 67-15(1981), 130
- 5) U. Ståhlberg, H. Keife and M. Lundberg, J. Mech. Work. Tech., 4(1980), 51
- 6) H. Keife and U. Ståhlberg, J. Mech. Work. Tech., 4(1980), 133
- 7) 木内, 向, 塑性と加工, 22-248(1981), 927