シンプソンの積分計算に対する分割数の影響

関　山　正　憲*

（昭和52年7月12日受理）

The Division Number Effect to the Sympson's Integral Calculus

MASATOSHI SEKIYAMA

abstract: — The value of a definite integral equals to the area which lies between the function curve and side axis. And the area is approximately calculated as the sum of the part areas which correspond to the division on the side axis.

From the usual sense it seems natural that the larger division number on the side axis grows, the more accuracy is got. But, this fact is always not applied in Sympson's integral calculas.

As the sample, 8 integrals are closely calculated by the computer to 16 figures and their behaviors are discusseed.

1. はしがき

シンプソンの公式を用いて定積分を近似計算するとき，誤差が分割数にて如何なる影響をうけるかを電算機を用いて調べて見た。計算にはDOUBLE PRECISIONを用い，16ケタを取扱ったので，この結果については相当価値があると思う。最初は，プログラム中に文関数宣言文として F(X)＝$\boxed{}$ の形を用いていたため，10^{-7} までしか精度が上らなかった。これを発見するのに相当の時間を費した。

一般に，分割数Nを大きくするほど誤差は小となり精度は上る。しかし，$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ や $\int_0^1 x^3 dx$ のような特殊な場合は，誤差とNの関係は異常になる。これをのべて注意を喚起する次第である。

試みた積分は上の2例を含め8つあり，皆定積分の値の判っている関数を採用し，これとシンプリン法で出した値とを比較して誤差率を計算した。

2. 誤差はキザミより分割数で論ずべきこと

衆知のようにシンプリン法は，Fig. 1 に示すような

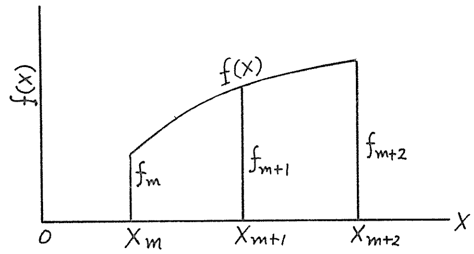

Fig. 1　The area which lies between f(x) curve and x-axis is divided to 2 parts

x軸と f(x)軸線にはさまれた面積を $(f_m+4f_{m+1}+f_{m+2})h/3$ と近似するものである。ただし，f_mはf(x_m)，f_{m+1}はf(x_{m+1})，f_{m+2}はf(x_{m+2})の略記であって，かつxの下限をx_m，上限をx_{m+2}とする。この場合，

$$x_{m+1}-x_m=x_{m+2}-x_{m+1}=h$$

であって上下の範囲が丁度2等分されているものとする。

もし，Fig. 2 のように $(x_0\sim x_2)$，$(x_2\sim x_4)$，$(x_4\sim x_6)$，・・・・，$(x_{n-2}\sim x_n)$ の各ブロックごとに上記の近似式をつくり加え合わすと

＊　茨城大学工業短期大学部電気工学科（日立市中成沢町）

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = (f_0+4f_1+f_2)h/3+ (f_2+4f_3+f_4)h/3+ (f_4+4f_5+f_6)h/3+\cdots\cdots+(f_{n-2}+4f_{n-1}+f_n)h/3$$
$$= (f_0+4f_1+f_2+f_2+4f_3+f_4+ f_4+4f_5+f_6+\cdots+f_{n-2}+ +4f_{n-1}+f_n)h/3$$
$$= \{f_0+4(f_1+f_3+\cdots+f_{n-1})+ 2(f_2+f_4+\cdots+f_{n-2})+f_n\} h/3$$
$$= (f_0+4s_4+2s_2+f_n)h/3$$

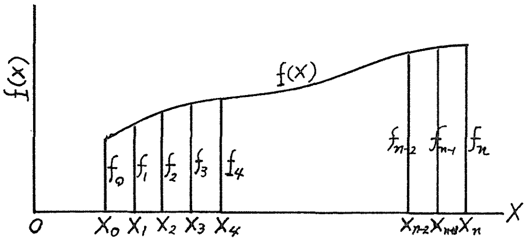

Fig. 2. The area which lies between f(x) curve and x-axis is divided to a parts

ただし，s_4は奇数番目のfの集合だからその最後のf_{n-1}は奇数番目のfであり，s_2は偶数番目のfの集合だからその最後のf_{n-2}は偶数番目のfとなる。これはnが偶数でなければならぬことを表わす。なお，このnは分割された個々の小面積の数にあたる。また，hはその小面積の横巾にあたり以後キザミということとする。

積分の下限aと上限bはFig. 2では$a=x_0$，$b=x_n$となるが，積分の範囲b－aをキザミhで区切って行く場合，最後の部分で端数が出てはならない。もし，出るとその部分ではシンプソン法を用いたことにならなくなるからである。すなわち，シンプソン法ではb－aはhで割切れるので，b－aをn等分したものがhにあたる。したがって，普通の積分理論のようにキザミhを連続的に変化させていく理論は成立たない。hの取れる値は特定のものとなりb＝1，a＝0を例示すれば

n	2	4	6	8	10	12	14	16	・・・・・
h	0.5	0.25	0.166	0.125	0.10	0.0833	0.0714	0.0625	・・・・・

このように，キザミhは特殊な階段状の変化をするので，これを基準に考えることは不便である。以後分割数nを基準に変化させて考えていくこととする。

3. プログラムの作例とその結果

FŌRTRANによりプログラムを組むこととすると，小文字は使えないので前の2.項でのべたn，h，a，bは何れも大文字となり，N，H，A，Bとなる。積分の結果をs(i)，真値をTで示すと誤差率は

D(i)＝(s(i)－T)／T で表わせる。しかるに，s(i)は分割数Nの関数なのでこれを2, 4, 6, ・・・・，498と変化させて表をつくることができる。

先づ，プログラムの例として$\int_0^{1.2}\frac{dx}{1+x^2}$をシンプソンの公式で計算するものを掲げる。(これの積分範囲0～1.2ではPのデータは不要であるが，これの次に出す例では必要となるのでそう入してある。なお，印刷の関係で1枚のカードにパンチされたものが2行以上にわたった場合，継続を表示する数字がないことに注意されたい。)

```
      DŌUBLE PRECISION P,A,B,T,FA,
      FB,H,S4,S2,S(5),D(5)
      WRITE(6,3)
    3 FŌRMAT(1H1,13X'ERRŌR RATIŌ ŌF
      SYMPSŌN METHŌD WITH F(X)=1/
      (1+X**2)'
    1 /IH0,6X',L',13X',I=0',11X',2',11X',
      '4',11X,'6',11X,'8')
      P = 3.14159265358979324
      A = 0.0000000000000000
      B = 1.2000000000000000
      T = DATAN(B)
      FA = FLŌAT(1)
      FB = FLŌAT(1)/(FLŌAT(1)+B**2)
      DŌ 14  L = 1,50
      DŌ 10  i = 1,10,2
      N = 10*(L-1)+i-1
C     T=TRUE VALUE,N=NUMBER ŌF
      DIVIDED PIECES,THAT IS LARG-
      ER THAN 2
      IF(N)10,10,13
   13 H = (B-A)/FLŌAT(N)
      S4 = A
      S2 = A
      DŌ 20  J = 2,N,2
      S4 = S4+FLŌAT(1)/(FLŌAT(1)+(A+
```

```
        FLŌAT(J−1)*H)**2)
20   S2 = S2+FLOAT(1)/(FLOAT(1)+(A+
        FLŌAT(J−2)*H)**2)
     s(i) = (FLŌAT(4)*S4 +FLŌAT(2)*S2−
        FA+FB)*H/FLŌAT(3)
     D(i) = (S(i)−T)/T
10   CŌNTINUE
     M = L−1
     IF(M) 11,11,17
11   WRITE(6,18)M,(D(i),i=3,10,2)
18   FŌRMAT(5X,i3,17X,4(2X,E10·3))
     GŌ TŌ 14
17   WRITE(6,16)M,(D(i),i=1,10,2)
16   FŌRMAT(5X,i3,5X,5(2X,E10·3))
14   CŌNTINUE
     END
```

このプログラムの結果はTable 1に示すものである。

Table 1. The error ratio of the integral from zero to 1.2 of the quantity one over one plus x squared with respect to x

L	I=0	2	4	6	8
0		-0.668D-02	-0.556D-04	-0.413D-05	-0.121D-05
1	-0.486D-06	-0.232D-06	-0.124D-06	-0.727D-07	-0.452D-07
2	-0.296D-07	-0.202D-07	-0.143D-07	-0.103D-07	-0.768D-08
3	-0.583D-08	-0.450D-08	-0.353D-08	-0.281D-08	-0.226D-08
4	-0.184D-08	-0.151D-08	-0.126D-08	-0.105D-08	-0.887D-09
5	-0.753D-09	-0.644D-09	-0.554D-09	-0.479D-09	-0.416D-09
6	-0.363D-09	-0.318D-09	-0.280D-09	-0.248D-09	-0.220D-09
7	-0.196D-09	-0.175D-09	-0.157D-09	-0.141D-09	-0.127D-09
8	-0.115D-09	-0.104D-09	-0.945D-10	-0.860D-10	-0.784D-10
9	-0.717D-10	-0.657D-10	-0.602D-10	-0.554D-10	-0.510D-10
10	-0.470D-10	-0.434D-10	-0.402D-10	-0.373D-10	-0.346D-10
11	-0.321D-10	-0.299D-10	-0.278D-10	-0.260D-10	-0.243D-10
12	-0.227D-10	-0.212D-10	-0.199D-10	-0.187D-10	-0.175D-10
13	-0.165D-10	-0.155D-10	-0.146D-10	-0.137D-10	-0.130D-10
14	-0.122D-10	-0.116D-10	-0.109D-10	-0.104D-10	-0.980D-11
15	-0.929D-11	-0.881D-11	-0.836D-11	-0.794D-11	-0.755D-11
16	-0.718D-11	-0.683D-11	-0.650D-11	-0.619D-11	-0.590D-11
17	-0.563D-11	-0.537D-11	-0.513D-11	-0.490D-11	-0.469D-11
18	-0.448D-11	-0.429D-11	-0.410D-11	-0.393D-11	-0.377D-11
19	-0.361D-11	-0.346D-11	-0.332D-11	-0.319D-11	-0.306D-11
20	-0.294D-11	-0.283D-11	-0.272D-11	-0.261D-11	-0.251D-11
21	-0.242D-11	-0.233D-11	-0.224D-11	-0.216D-11	-0.208D-11
22	-0.201D-11	-0.194D-11	-0.187D-11	-0.180D-11	-0.174D-11
23	-0.168D-11	-0.162D-11	-0.157D-11	-0.152D-11	-0.147D-11
24	-0.142D-11	-0.137D-11	-0.133D-11	-0.129D-11	-0.124D-11
25	-0.121D-11	-0.117D-11	-0.113D-11	-0.110D-11	-0.106D-11
26	-0.103D-11	-0.100D-11	-0.970D-12	-0.941D-12	-0.914D-12
27	-0.887D-12	-0.861D-12	-0.836D-12	-0.813D-12	-0.789D-12
28	-0.767D-12	-0.746D-12	-0.725D-12	-0.705D-12	-0.686D-12
29	-0.667D-12	-0.649D-12	-0.631D-12	-0.615D-12	-0.598D-12
30	-0.583D-12	-0.567D-12	-0.553D-12	-0.539D-12	-0.525D-12
31	-0.511D-12	-0.498D-12	-0.486D-12	-0.474D-12	-0.462D-12
32	-0.451D-12	-0.440D-12	-0.429D-12	-0.418D-12	-0.408D-12
33	-0.399D-12	-0.389D-12	-0.380D-12	-0.371D-12	-0.362D-12
34	-0.354D-12	-0.346D-12	-0.338D-12	-0.330D-12	-0.323D-12
35	-0.315D-12	-0.308D-12	-0.302D-12	-0.295D-12	-0.288D-12
36	-0.282D-12	-0.276D-12	-0.270D-12	-0.264D-12	-0.259D-12
37	-0.253D-12	-0.248D-12	-0.243D-12	-0.237D-12	-0.233D-12
38	-0.228D-12	-0.223D-12	-0.218D-12	-0.214D-12	-0.210D-12
39	-0.205D-12	-0.201D-12	-0.197D-12	-0.193D-12	-0.190D-12
40	-0.186D-12	-0.182D-12	-0.179D-12	-0.175D-12	-0.172D-12
41	-0.169D-12	-0.165D-12	-0.162D-12	-0.159D-12	-0.156D-12
42	-0.153D-12	-0.151D-12	-0.148D-12	-0.145D-12	-0.142D-12
43	-0.140D-12	-0.137D-12	-0.135D-12	-0.132D-12	-0.130D-12
44	-0.128D-12	-0.125D-12	-0.123D-12	-0.121D-12	-0.119D-12
45	-0.117D-12	-0.115D-12	-0.113D-12	-0.111D-12	-0.109D-12
46	-0.107D-12	-0.106D-12	-0.104D-12	-0.102D-12	-0.100D-12
47	-0.986D-13	-0.970D-13	-0.953D-13	-0.940D-13	-0.923D-13
48	-0.908D-13	-0.894D-13	-0.880D-13	-0.865D-13	-0.853D-13
49	-0.837D-13	-0.825D-13	-0.812D-13	-0.799D-13	-0.788D-13

これにて上から1列目はNが2, 4, 6, 8 に対するもの, 2列目は10, 12, 14, 16, 18 に対するもの, 3列目は20, 22, 24, 26, 28 に対するものと1列ごとに10づつふえて最終は498である。数値より観察するに何れも負の符号をもっていてNが大きくなるほど精度をましN＝498では-0.788×10^{-13}を示している。筆算や電卓とは異なり，中形電算機ではわずか2分37秒の間に498までが出てしまうので高い精度を望むならNが大きい方がよいといえる。

しかし，この積分でも積分の上限がB＝1.0となると様子はまるで変ってくる。プログラムはB＝FLŌAT(1), T＝P／FLŌAT(4)と変えれば出来るがその結果はTable 2.の通りになる。

Table 2. The error ratio of the integral from zero to one of the quantity one over one plus x squared with respect to x

L	I=0	2	4	6	8
0		-0.263D-02	-0.765D-05	-0.278D-06	-0.481D-07
1	-0.126D-07	-0.423D-08	-0.168D-08	-0.753D-09	-0.371D-09
2	-0.197D-09	-0.111D-09	-0.661D-10	-0.409D-10	-0.262D-10
3	-0.173D-10	-0.118D-10	-0.818D-11	-0.580D-11	-0.420D-11
4	-0.308D-11	-0.230D-11	-0.174D-11	-0.133D-11	-0.103D-11
5	-0.809D-12	-0.640D-12	-0.510D-12	-0.410D-12	-0.333D-12
6	-0.272D-12	-0.224D-12	-0.185D-12	-0.154D-12	-0.129D-12
7	-0.108D-12	-0.921D-13	-0.782D-13	-0.666D-13	-0.573D-13
8	-0.495D-13	-0.430D-13	-0.375D-13	-0.325D-13	-0.286D-13
9	-0.253D-13	-0.223D-13	-0.198D-13	-0.175D-13	-0.158D-13
10	-0.141D-13	-0.127D-13	-0.115D-13	-0.107D-13	-0.972D-14
11	-0.876D-14	-0.802D-14	-0.754D-14	-0.698D-14	-0.633D-14
12	-0.604D-14	-0.565D-14	-0.519D-14	-0.500D-14	-0.472D-14
13	-0.444D-14	-0.406D-14	-0.396D-14	-0.368D-14	-0.387D-14
14	-0.350D-14	-0.359D-14	-0.302D-14	-0.322D-14	-0.322D-14
15	-0.302D-14	-0.283D-14	-0.274D-14	-0.254D-14	-0.283D-14
16	-0.246D-14	-0.265D-14	-0.265D-14	-0.254D-14	-0.246D-14
17	-0.237D-14	-0.237D-14	-0.237D-14	-0.217D-14	-0.254D-14
18	-0.246D-14	-0.237D-14	-0.226D-14	-0.226D-14	-0.237D-14
19	-0.217D-14	-0.209D-14	-0.226D-14	-0.226D-14	-0.209D-14
20	-0.237D-14	-0.226D-14	-0.217D-14	-0.217D-14	-0.209D-14
21	-0.209D-14	-0.226D-14	-0.209D-14	-0.217D-14	-0.198D-14
22	-0.209D-14	-0.209D-14	-0.217D-14	-0.209D-14	-0.209D-14
23	-0.226D-14	-0.209D-14	-0.198D-14	-0.198D-14	-0.209D-14
24	-0.198D-14	-0.237D-14	-0.237D-14	-0.198D-14	-0.198D-14
25	-0.209D-14	-0.217D-14	-0.209D-14	-0.209D-14	-0.189D-14
26	-0.209D-14	-0.209D-14	-0.209D-14	-0.217D-14	-0.209D-14
27	-0.198D-14	-0.198D-14	-0.209D-14	-0.189D-14	-0.209D-14
28	-0.198D-14	-0.198D-14	-0.209D-14	-0.198D-14	-0.198D-14
29	-0.198D-14	-0.209D-14	-0.198D-14	-0.209D-14	-0.209D-14
30	-0.217D-14	-0.198D-14	-0.198D-14	-0.198D-14	-0.217D-14
31	-0.209D-14	-0.198D-14	-0.217D-14	-0.217D-14	-0.209D-14
32	-0.198D-14	-0.209D-14	-0.217D-14	-0.209D-14	-0.209D-14
33	-0.209D-14	-0.198D-14	-0.198D-14	-0.198D-14	-0.198D-14
34	-0.209D-14	-0.209D-14	-0.217D-14	-0.217D-14	-0.198D-14
35	-0.209D-14	-0.209D-14	-0.217D-14	-0.209D-14	-0.209D-14
36	-0.209D-14	-0.209D-14	-0.209D-14	-0.217D-14	-0.198D-14
37	-0.209D-14	-0.209D-14	-0.209D-14	-0.198D-14	-0.198D-14
38	-0.189D-14	-0.198D-14	-0.189D-14	-0.209D-14	-0.226D-14
39	-0.217D-14	-0.209D-14	-0.198D-14	-0.209D-14	-0.209D-14
40	-0.209D-14	-0.217D-14	-0.189D-14	-0.217D-14	-0.217D-14
41	-0.209D-14	-0.217D-14	-0.209D-14	-0.209D-14	-0.198D-14
42	-0.209D-14	-0.217D-14	-0.209D-14	-0.198D-14	-0.189D-14
43	-0.198D-14	-0.209D-14	-0.209D-14	-0.198D-14	-0.209D-14
44	-0.198D-14	-0.226D-14	-0.217D-14	-0.209D-14	-0.209D-14
45	-0.209D-14	-0.198D-14	-0.226D-14	-0.209D-14	-0.198D-14
46	-0.209D-14	-0.209D-14	-0.217D-14	-0.209D-14	-0.209D-14
47	-0.198D-14	-0.198D-14	-0.217D-14	-0.209D-14	-0.217D-14
48	-0.189D-14	-0.217D-14	-0.209D-14	-0.209D-14	-0.209D-14
49	-0.209D-14	-0.209D-14	-0.209D-14	-0.209D-14	-0.209D-14

この場合，Nが小さいときはこれをふやすことにより急激に誤差が減少しNが8，10で10^{-7}のケタ，12，14で10^{-8}のケタ，16～22で10^{-9}のケタ，24～32で10^{-10}，34～48で10^{-11}，50～70で10^{-12}，72～106で10^{-13}が得られる。10^{-14}のケタなら108以上を必要とする。したがって，一般的にNの大きい方が精度が高いといえるが，細かく観察すると特異な所が存在する。すなわち，Nをふやしていき138となると前の136より精度が低い。140は138より高いが142は140より低い。このように逆転する所は156と158間，160と162間，176と178間というように以後いくらも現われる。精度の最高は-0.189×10^{-14}でN＝258，

276，380，384，404，428，480と498までに7ケ所現われる。B＝1.0のときはN＝258で計算するのがよいということになる。

4. 試みた積分計算とそれらの結果

前項の外に6種の定積分を計算したが，これらのプログラム間には共通点が多いので，異る部分のカードのみを入れ換えて各々のプログラムとし，別々に電算機にかけそれぞれに対する結果としてTable 3，，・・・，Table 8.を得た。共通な部分とは前項で示したプログラムであり，異る部分とはB，T，FA，FBおよびQ(J)，R(J)を表わす式である。これらを積分各々につき示すと

Integral	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$	$\int_0^1 x^2\,dx$	$\int_0^1 x^3\,dx$	$\int_0^1 x^4\,dx$	$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$
B	P/FLŌAT(2)	〃	FLŌAT(1)	〃	〃	〃
T	FLŌAT(1)	〃	$0.\underbrace{33\cdots\cdots3}_{16\text{times}}$	$0.25\underbrace{000\cdots0}_{14\text{times}}$	$0.2\underbrace{000\cdots0}_{15\text{times}}$	P/FLŌAT(4)
FA	DSIN(A)	DCŌS(A)	A	〃	〃	DSQRT(FLŌAT(1)−A*A)
FB	DSIN(B)	DCŌS(A)	B	〃	〃	DSQRT(FLŌAT(1)−B*B)
Q(J)	DSIN(A+FLŌAT(J−1)*H)	DCŌS(A+FLŌAT(J−1)*H)	(A+FLŌAT(J−1)*H)**2	(A+FLŌAT(J−1)*H)**3	(A+FLŌAT(J−1)*H)**4	DSQRT(FLŌAT(1)−(A+FLŌAT(J−1)*H)**2)
R(J)	DSIN(A+FLŌAT(J−2)*H)	DCŌS(A+FLŌAT(J−2)*H)	(A+FLŌAT(J−2)*H)**2	(A+FLŌAT(J−2)*H)**3	(A+FLŌAT(J−2)*H)**4	DSQRT(FLŌAT(1)−(A+FLŌAT(J−2)*H)**2)
output	TABLE 3	TABLE 4	TABLE 5	TABLE 6	TABLE 7	TABLE 8

ただし，Q(J)とR(J)はS4，S2の式に関係し

```
   S4 = S4 + [ Q(J) ]
20 S2 = S2 + [ R(J) ]
```

なる形［　　］内にそう入する式である。また，各TABLEの標題を書き出すFŌRMAT文はそれぞれ異っているが，本題とは外れるので省く。

Table 3. The error ratio of the integral from 0 to pi/2 of the quantity sine of x with respect to x

L	I=0	2	4	6	8
0		0.228D-02	0.135D-03	0.263D-04	0.830D-05
1	0.339D-05	0.163D-05	0.882D-06	0.517D-06	0.322D-06
2	0.212D-06	0.144D-06	0.102D-06	0.740D-07	0.550D-07
3	0.418D-07	0.323D-07	0.253D-07	0.201D-07	0.162D-07
4	0.132D-07	0.109D-07	0.903D-08	0.756D-08	0.637D-08
5	0.541D-08	0.463D-08	0.398D-08	0.344D-08	0.299D-08
6	0.261D-08	0.229D-08	0.202D-08	0.178D-08	0.158D-08
7	0.141D-08	0.126D-08	0.113D-08	0.101D-08	0.914D-09
8	0.826D-09	0.748D-09	0.679D-09	0.618D-09	0.564D-09
9	0.516D-09	0.472D-09	0.433D-09	0.398D-09	0.367D-09
10	0.338D-09	0.312D-09	0.289D-09	0.268D-09	0.249D-09
11	0.231D-09	0.215D-09	0.200D-09	0.187D-09	0.174D-09
12	0.163D-09	0.153D-09	0.143D-09	0.134D-09	0.126D-09
13	0.118D-09	0.111D-09	0.105D-09	0.989D-10	0.933D-10
14	0.880D-10	0.832D-10	0.787D-10	0.744D-10	0.705D-10
15	0.668D-10	0.634D-10	0.601D-10	0.571D-10	0.543D-10
16	0.516D-10	0.491D-10	0.468D-10	0.445D-10	0.425D-10
17	0.405D-10	0.386D-10	0.369D-10	0.352D-10	0.337D-10
18	0.322D-10	0.308D-10	0.295D-10	0.283D-10	0.271D-10
19	0.260D-10	0.249D-10	0.239D-10	0.229D-10	0.220D-10
20	0.211D-10	0.203D-10	0.195D-10	0.188D-10	0.181D-10
21	0.174D-10	0.167D-10	0.161D-10	0.155D-10	0.150D-10
22	0.144D-10	0.139D-10	0.134D-10	0.130D-10	0.125D-10
23	0.121D-10	0.117D-10	0.113D-10	0.109D-10	0.105D-10
24	0.102D-10	0.986D-11	0.954D-11	0.923D-11	0.894D-11
25	0.866D-11	0.838D-11	0.812D-11	0.787D-11	0.763D-11
26	0.740D-11	0.718D-11	0.696D-11	0.675D-11	0.655D-11
27	0.636D-11	0.618D-11	0.600D-11	0.583D-11	0.566D-11
28	0.550D-11	0.535D-11	0.520D-11	0.505D-11	0.491D-11
29	0.478D-11	0.465D-11	0.453D-11	0.440D-11	0.429D-11
30	0.417D-11	0.406D-11	0.396D-11	0.386D-11	0.376D-11
31	0.366D-11	0.357D-11	0.348D-11	0.339D-11	0.331D-11
32	0.322D-11	0.314D-11	0.307D-11	0.299D-11	0.292D-11
33	0.285D-11	0.278D-11	0.272D-11	0.265D-11	0.259D-11
34	0.253D-11	0.247D-11	0.241D-11	0.236D-11	0.230D-11
35	0.225D-11	0.220D-11	0.215D-11	0.210D-11	0.206D-11
36	0.201D-11	0.197D-11	0.192D-11	0.188D-11	0.184D-11
37	0.180D-11	0.176D-11	0.173D-11	0.169D-11	0.165D-11
38	0.162D-11	0.159D-11	0.155D-11	0.152D-11	0.149D-11
39	0.146D-11	0.143D-11	0.140D-11	0.137D-11	0.135D-11
40	0.132D-11	0.129D-11	0.127D-11	0.124D-11	0.122D-11
41	0.119D-11	0.117D-11	0.115D-11	0.113D-11	0.111D-11
42	0.108D-11	0.106D-11	0.104D-11	0.102D-11	0.101D-11
43	0.987D-12	0.969D-12	0.951D-12	0.934D-12	0.917D-12
44	0.900D-12	0.884D-12	0.868D-12	0.853D-12	0.837D-12
45	0.822D-12	0.808D-12	0.794D-12	0.780D-12	0.766D-12
46	0.753D-12	0.740D-12	0.727D-12	0.715D-12	0.703D-12
47	0.691D-12	0.679D-12	0.668D-12	0.657D-12	0.646D-12
48	0.635D-12	0.624D-12	0.614D-12	0.604D-12	0.594D-12
49	0.584D-12	0.575D-12	0.566D-12	0.556D-12	0.548D-12

Table 4. The error ratio of the integral from 0 to pi/2 of the quantity cosine of x with respect to x

L	I=0	2	4	6	8
0		0.228D-02	0.135D-03	0.263D-04	0.830D-05
1	0.339D-05	0.163D-05	0.882D-06	0.517D-06	0.322D-06
2	0.212D-06	0.144D-06	0.102D-06	0.740D-07	0.550D-07
3	0.418D-07	0.323D-07	0.253D-07	0.201D-07	0.162D-07
4	0.132D-07	0.109D-07	0.903D-08	0.756D-08	0.637D-08
5	0.541D-08	0.463D-08	0.398D-08	0.344D-08	0.299D-08
6	0.261D-08	0.229D-08	0.202D-08	0.178D-08	0.158D-08
7	0.141D-08	0.126D-08	0.113D-08	0.101D-08	0.914D-09
8	0.826D-09	0.748D-09	0.679D-09	0.618D-09	0.564D-09
9	0.516D-09	0.472D-09	0.433D-09	0.398D-09	0.367D-09
10	0.338D-09	0.312D-09	0.289D-09	0.268D-09	0.249D-09
11	0.231D-09	0.215D-09	0.200D-09	0.187D-09	0.174D-09
12	0.163D-09	0.153D-09	0.143D-09	0.134D-09	0.126D-09
13	0.118D-09	0.111D-09	0.105D-09	0.989D-10	0.933D-10
14	0.880D-10	0.832D-10	0.787D-10	0.744D-10	0.705D-10
15	0.668D-10	0.634D-10	0.601D-10	0.571D-10	0.543D-10
16	0.516D-10	0.491D-10	0.468D-10	0.445D-10	0.425D-10
17	0.405D-10	0.386D-10	0.369D-10	0.352D-10	0.337D-10
18	0.322D-10	0.308D-10	0.295D-10	0.283D-10	0.271D-10
19	0.260D-10	0.249D-10	0.239D-10	0.229D-10	0.220D-10
20	0.211D-10	0.203D-10	0.195D-10	0.188D-10	0.181D-10
21	0.174D-10	0.167D-10	0.161D-10	0.155D-10	0.150D-10
22	0.144D-10	0.139D-10	0.134D-10	0.130D-10	0.125D-10
23	0.121D-10	0.117D-10	0.113D-10	0.109D-10	0.105D-10
24	0.102D-10	0.986D-11	0.954D-11	0.923D-11	0.894D-11
25	0.866D-11	0.838D-11	0.812D-11	0.787D-11	0.763D-11
26	0.740D-11	0.718D-11	0.696D-11	0.675D-11	0.655D-11
27	0.636D-11	0.618D-11	0.600D-11	0.583D-11	0.566D-11
28	0.550D-11	0.535D-11	0.520D-11	0.505D-11	0.491D-11
29	0.478D-11	0.465D-11	0.452D-11	0.440D-11	0.429D-11
30	0.417D-11	0.406D-11	0.396D-11	0.386D-11	0.376D-11
31	0.366D-11	0.357D-11	0.348D-11	0.339D-11	0.330D-11
32	0.322D-11	0.314D-11	0.307D-11	0.299D-11	0.292D-11
33	0.285D-11	0.278D-11	0.272D-11	0.265D-11	0.259D-11
34	0.253D-11	0.247D-11	0.241D-11	0.236D-11	0.230D-11
35	0.225D-11	0.220D-11	0.215D-11	0.210D-11	0.206D-11
36	0.201D-11	0.197D-11	0.192D-11	0.188D-11	0.184D-11
37	0.180D-11	0.176D-11	0.173D-11	0.169D-11	0.165D-11
38	0.162D-11	0.159D-11	0.155D-11	0.152D-11	0.149D-11
39	0.146D-11	0.143D-11	0.140D-11	0.137D-11	0.135D-11
40	0.132D-11	0.129D-11	0.127D-11	0.124D-11	0.122D-11
41	0.119D-11	0.117D-11	0.115D-11	0.113D-11	0.111D-11
42	0.108D-11	0.106D-11	0.104D-11	0.102D-11	0.101D-11
43	0.987D-12	0.969D-12	0.951D-12	0.933D-12	0.916D-12
44	0.900D-12	0.884D-12	0.868D-12	0.852D-12	0.837D-12
45	0.822D-12	0.808D-12	0.794D-12	0.780D-12	0.766D-12
46	0.753D-12	0.740D-12	0.727D-12	0.715D-12	0.702D-12
47	0.690D-12	0.679D-12	0.667D-12	0.656D-12	0.645D-12
48	0.635D-12	0.624D-12	0.614D-12	0.604D-12	0.594D-12
49	0.584D-12	0.575D-12	0.565D-12	0.556D-12	0.547D-12

Table 5. The error ratio of the integral from zero to one of the quantity x squared with respect to x

I	I=0	2	4	6	8
0		0.125D-15	0.125D-15	-0.416D-16	0.125D-15
1	-0.125D-15	-0.125D-15	-0.167D-15	0.125D-15	-0.833D-16
2	-0.250D-15	-0.208D-15	-0.208D-15	-0.167D-15	-0.125D-15
3	-0.250D-15	0.125D-15	-0.208D-15	-0.208D-15	-0.291D-15
4	-0.250D-15	-0.167D-15	-0.208D-15	-0.208D-15	-0.250D-15
5	-0.208D-15	-0.250D-15	-0.167D-15	-0.125D-15	-0.125D-15
6	-0.208D-15	-0.208D-15	0.125D-15	-0.167D-15	-0.208D-15
7	-0.250D-15	-0.333D-15	-0.125D-15	-0.250D-15	-0.250D-15
8	-0.208D-15	-0.208D-15	-0.333D-15	-0.167D-15	-0.291D-15
9	-0.291D-15	-0.208D-15	-0.250D-15	-0.291D-15	-0.416D-15
10	-0.458D-15	-0.333D-15	-0.375D-15	-0.375D-15	-0.541D-15
11	-0.500D-15	-0.500D-15	-0.666D-15	-0.500D-15	-0.625D-15
12	-0.625D-15	-0.749D-15	-0.708D-15	-0.666D-15	0.125D-15
13	-0.874D-15	-0.999D-15	-0.749D-15	-0.791D-15	-0.958D-15
14	-0.666D-15	-0.112D-14	-0.916D-15	-0.999D-15	-0.125D-14
15	-0.108D-14	-0.117D-14	-0.999D-15	-0.125D-14	-0.112D-14
16	-0.142D-14	-0.108D-14	-0.137D-14	-0.117D-14	-0.121D-14
17	-0.104D-14	-0.104D-14	-0.121D-14	-0.142D-14	-0.121D-14
18	-0.158D-14	-0.125D-14	-0.112D-14	-0.129D-14	-0.125D-14
19	-0.117D-14	-0.154D-14	-0.133D-14	-0.154D-14	-0.162D-14
20	-0.158D-14	-0.179D-14	-0.133D-14	-0.137D-14	-0.183D-14
21	-0.171D-14	-0.158D-14	-0.162D-14	-0.162D-14	-0.171D-14
22	-0.142D-14	-0.150D-14	-0.175D-14	-0.154D-14	-0.167D-14
23	-0.175D-14	-0.154D-14	-0.179D-14	-0.146D-14	-0.167D-14
24	-0.167D-14	-0.196D-14	-0.216D-14	-0.183D-14	-0.179D-14
25	-0.216D-14	-0.179D-14	-0.162D-14	0.125D-15	-0.167D-14
26	-0.183D-14	-0.183D-14	-0.183D-14	-0.183D-14	-0.179D-14
27	-0.179D-14	-0.200D-14	-0.175D-14	-0.175D-14	-0.192D-14
28	-0.171D-14	-0.171D-14	-0.187D-14	-0.187D-14	-0.187D-14
29	-0.225D-14	-0.183D-14	-0.183D-14	-0.183D-14	-0.179D-14
30	-0.179D-14	-0.196D-14	-0.196D-14	-0.192D-14	-0.175D-14
31	-0.171D-14	-0.208D-14	-0.171D-14	-0.187D-14	-0.221D-14
32	-0.221D-14	-0.200D-14	-0.183D-14	-0.200D-14	-0.196D-14
33	-0.196D-14	-0.196D-14	-0.196D-14	-0.208D-14	-0.192D-14
34	-0.208D-14	-0.192D-14	-0.221D-14	-0.204D-14	-0.204D-14
35	-0.200D-14	-0.216D-14	-0.196D-14	-0.212D-14	-0.212D-14
36	-0.192D-14	-0.192D-14	-0.221D-14	-0.204D-14	-0.221D-14
37	-0.204D-14	-0.216D-14	-0.216D-14	-0.200D-14	-0.200D-14
38	-0.200D-14	-0.212D-14	-0.254D-14	-0.225D-14	-0.225D-14
39	-0.221D-14	-0.221D-14	-0.233D-14	-0.233D-14	-0.216D-14
40	-0.216D-14	-0.229D-14	-0.229D-14	-0.229D-14	-0.225D-14
41	-0.237D-14	-0.225D-14	-0.208D-14	-0.237D-14	-0.233D-14
42	-0.233D-14	-0.246D-14	-0.229D-14	-0.229D-14	-0.229D-14
43	-0.229D-14	-0.237D-14	-0.200D-14	-0.237D-14	-0.250D-14
44	-0.246D-14	-0.233D-14	-0.246D-14	-0.233D-14	-0.241D-14
45	-0.229D-14	-0.241D-14	-0.212D-14	-0.250D-14	-0.237D-14
46	-0.212D-14	-0.233D-14	-0.246D-14	-0.233D-14	-0.241D-14
47	-0.229D-14	-0.229D-14	-0.229D-14	-0.254D-14	-0.237D-14
48	-0.250D-14	-0.250D-14	-0.237D-14	-0.225D-14	-0.246D-14
49	-0.233D-14	-0.229D-14	-0.233D-14	-0.250D-14	-0.250D-14

Table 6. The error ratio of the integral from zero to one of the quantity x cubed with respect to x

I	I=0	2	4	6	8
0		0.0	0.0	-0.278D-15	0.0
1	-0.389D-15	-0.333D-15	-0.278D-15	0.0	-0.222D-15
2	-0.222D-15	-0.278D-15	-0.444D-15	-0.389D-15	-0.389D-15
3	-0.333D-15	0.0	-0.333D-15	-0.333D-15	-0.278D-15
4	-0.389D-15	-0.389D-15	-0.389D-15	-0.444D-15	-0.444D-15
5	-0.444D-15	-0.500D-15	-0.389D-15	-0.389D-15	-0.389D-15
6	-0.444D-15	-0.389D-15	0.0	-0.389D-15	-0.389D-15
7	-0.389D-15	-0.555D-15	-0.278D-15	-0.500D-15	-0.500D-15
8	-0.389D-15	-0.444D-15	-0.555D-15	-0.333D-15	-0.555D-15
9	-0.444D-15	-0.444D-15	-0.444D-15	-0.555D-15	-0.666D-15
10	-0.555D-15	-0.389D-15	-0.500D-15	-0.444D-15	-0.500D-15
11	-0.500D-15	-0.611D-15	-0.555D-15	-0.333D-15	-0.333D-15
12	-0.333D-15	-0.555D-15	-0.444D-15	-0.500D-15	0.0
13	-0.555D-15	-0.666D-15	-0.444D-15	-0.389D-15	-0.888D-15
14	-0.611D-15	-0.888D-15	-0.666D-15	-0.777D-15	-0.888D-15
15	-0.777D-15	-0.833D-15	-0.944D-15	-0.722D-15	-0.777D-15
16	-0.999D-15	-0.888D-15	-0.117D-14	-0.105D-14	-0.888D-15
17	-0.888D-15	-0.111D-14	-0.722D-15	-0.128D-14	-0.888D-15
18	-0.133D-14	-0.133D-14	-0.944D-15	-0.122D-14	-0.105D-14
19	-0.105D-14	-0.144D-14	-0.888D-15	-0.122D-14	-0.133D-14
20	-0.167D-14	-0.167D-14	-0.111D-14	-0.144D-14	-0.167D-14
21	-0.161D-14	-0.128D-14	-0.150D-14	-0.144D-14	-0.167D-14
22	-0.139D-14	-0.133D-14	-0.167D-14	-0.117D-14	-0.150D-14
23	-0.189D-14	-0.144D-14	-0.167D-14	-0.144D-14	-0.150D-14
24	-0.133D-14	-0.222D-14	-0.211D-14	-0.172D-14	-0.150D-14
25	-0.200D-14	-0.161D-14	-0.150D-14	0.0	-0.139D-14
26	-0.139D-14	-0.155D-14	-0.155D-14	-0.139D-14	-0.172D-14
27	-0.155D-14	-0.161D-14	-0.172D-14	-0.155D-14	-0.144D-14
28	-0.144D-14	-0.167D-14	-0.167D-14	-0.183D-14	-0.178D-14
29	-0.150D-14	-0.155D-14	-0.155D-14	-0.161D-14	-0.150D-14
30	-0.167D-14	-0.155D-14	-0.183D-14	-0.167D-14	-0.178D-14
31	-0.172D-14	-0.172D-14	-0.178D-14	-0.178D-14	-0.194D-14
32	-0.211D-14	-0.178D-14	-0.189D-14	-0.172D-14	-0.189D-14
33	-0.194D-14	-0.205D-14	-0.189D-14	-0.183D-14	-0.178D-14
34	-0.183D-14	-0.183D-14	-0.222D-14	-0.200D-14	-0.200D-14
35	-0.200D-14	-0.216D-14	-0.216D-14	-0.194D-14	-0.216D-14
36	-0.194D-14	-0.189D-14	-0.172D-14	-0.189D-14	-0.189D-14
37	-0.205D-14	-0.205D-14	-0.205D-14	-0.183D-14	-0.205D-14
38	-0.200D-14	-0.200D-14	-0.261D-14	-0.216D-14	-0.222D-14
39	-0.200D-14	-0.216D-14	-0.216D-14	-0.211D-14	-0.211D-14
40	-0.228D-14	-0.211D-14	-0.228D-14	-0.228D-14	-0.211D-14
41	-0.222D-14	-0.205D-14	-0.222D-14	-0.239D-14	-0.222D-14
42	-0.222D-14	-0.200D-14	-0.216D-14	-0.216D-14	-0.233D-14
43	-0.233D-14	-0.250D-14	-0.211D-14	-0.250D-14	-0.244D-14
44	-0.228D-14	-0.211D-14	-0.244D-14	-0.228D-14	-0.239D-14
45	-0.239D-14	-0.239D-14	-0.239D-14	-0.239D-14	-0.216D-14
46	-0.233D-14	-0.250D-14	-0.266D-14	-0.250D-14	-0.228D-14
47	-0.228D-14	-0.228D-14	-0.244D-14	-0.244D-14	-0.239D-14
48	-0.239D-14	-0.255D-14	-0.255D-14	-0.239D-14	-0.233D-14
49	-0.239D-14	-0.250D-14	-0.233D-14	-0.250D-14	-0.233D-14

Table 7. The error ratio of the integral from zero to one of the quantity the fourth power of x with respect to x

I	I=0	2	4	6	8
0		0.417D-01	0.260D-02	0.514D-03	0.163D-03
1	0.667D-04	0.322D-04	0.174D-04	0.102D-04	0.635D-05
2	0.417D-05	0.285D-05	0.201D-05	0.146D-05	0.108D-05
3	0.823D-06	0.636D-06	0.499D-06	0.397D-06	0.320D-06
4	0.260D-06	0.214D-06	0.178D-06	0.149D-06	0.126D-06
5	0.107D-06	0.912D-07	0.784D-07	0.678D-07	0.589D-07
6	0.514D-07	0.451D-07	0.397D-07	0.351D-07	0.312D-07
7	0.278D-07	0.248D-07	0.222D-07	0.200D-07	0.180D-07
8	0.163D-07	0.147D-07	0.134D-07	0.122D-07	0.111D-07
9	0.102D-07	0.931D-08	0.854D-08	0.785D-08	0.723D-08
10	0.667D-08	0.616D-08	0.570D-08	0.528D-08	0.490D-08
11	0.455D-08	0.424D-08	0.395D-08	0.368D-08	0.344D-08
12	0.322D-08	0.301D-08	0.282D-08	0.265D-08	0.248D-08
13	0.233D-08	0.220D-08	0.207D-08	0.195D-08	0.184D-08
14	0.174D-08	0.164D-08	0.155D-08	0.147D-08	0.139D-08
15	0.132D-08	0.125D-08	0.119D-08	0.113D-08	0.107D-08
16	0.102D-08	0.968D-09	0.922D-09	0.878D-09	0.837D-09
17	0.798D-09	0.762D-09	0.727D-09	0.695D-09	0.664D-09
18	0.635D-09	0.608D-09	0.582D-09	0.557D-09	0.534D-09
19	0.512D-09	0.491D-09	0.471D-09	0.452D-09	0.434D-09
20	0.417D-09	0.400D-09	0.385D-09	0.370D-09	0.356D-09
21	0.343D-09	0.330D-09	0.318D-09	0.306D-09	0.295D-09
22	0.285D-09	0.274D-09	0.265D-09	0.256D-09	0.247D-09
23	0.238D-09	0.230D-09	0.222D-09	0.215D-09	0.208D-09
24	0.201D-09	0.194D-09	0.188D-09	0.182D-09	0.176D-09
25	0.171D-09	0.165D-09	0.160D-09	0.155D-09	0.150D-09
26	0.146D-09	0.141D-09	0.137D-09	0.133D-09	0.129D-09
27	0.125D-09	0.122D-09	0.118D-09	0.115D-09	0.112D-09
28	0.108D-09	0.105D-09	0.102D-09	0.996D-10	0.969D-10
29	0.943D-10	0.917D-10	0.892D-10	0.868D-10	0.845D-10
30	0.823D-10	0.801D-10	0.781D-10	0.760D-10	0.741D-10
31	0.722D-10	0.704D-10	0.686D-10	0.669D-10	0.652D-10
32	0.636D-10	0.620D-10	0.605D-10	0.590D-10	0.576D-10
33	0.562D-10	0.549D-10	0.536D-10	0.523D-10	0.511D-10
34	0.499D-10	0.487D-10	0.476D-10	0.465D-10	0.455D-10
35	0.444D-10	0.434D-10	0.425D-10	0.415D-10	0.406D-10
36	0.397D-10	0.388D-10	0.380D-10	0.372D-10	0.363D-10
37	0.356D-10	0.348D-10	0.341D-10	0.334D-10	0.327D-10
38	0.320D-10	0.313D-10	0.307D-10	0.300D-10	0.294D-10
39	0.288D-10	0.282D-10	0.277D-10	0.271D-10	0.266D-10
40	0.260D-10	0.255D-10	0.250D-10	0.245D-10	0.241D-10
41	0.236D-10	0.231D-10	0.227D-10	0.223D-10	0.218D-10
42	0.214D-10	0.210D-10	0.206D-10	0.202D-10	0.199D-10
43	0.195D-10	0.191D-10	0.188D-10	0.184D-10	0.181D-10
44	0.178D-10	0.175D-10	0.172D-10	0.168D-10	0.165D-10
45	0.163D-10	0.160D-10	0.157D-10	0.154D-10	0.151D-10
46	0.149D-10	0.146D-10	0.144D-10	0.141D-10	0.139D-10
47	0.137D-10	0.134D-10	0.132D-10	0.130D-10	0.128D-10
48	0.126D-10	0.123D-10	0.121D-10	0.119D-10	0.118D-10
49	0.116D-10	0.114D-10	0.112D-10	0.110D-10	0.108D-10

Table 8. The error ratio of the integal from zero to one of the quantity the square root of (1-x**2) with respect to x

I	I=0	2	4	6	8
0		-0.527D-01	-0.185D-01	-0.100D-01	-0.649D-02
1	-0.464D-02	-0.353D-02	-0.280D-02	-0.229D-02	-0.192D-02
2	-0.164D-02	-0.142D-02	-0.125D-02	-0.110D-02	-0.988D-03
3	-0.891D-03	-0.809D-03	-0.738D-03	-0.678D-03	-0.625D-03
4	-0.578D-03	-0.538D-03	-0.501D-03	-0.469D-03	-0.440D-03
5	-0.414D-03	-0.390D-03	-0.369D-03	-0.349D-03	-0.331D-03
6	-0.315D-03	-0.300D-03	-0.286D-03	-0.273D-03	-0.261D-03
7	-0.250D-03	-0.239D-03	-0.230D-03	-0.221D-03	-0.212D-03
8	-0.204D-03	-0.197D-03	-0.190D-03	-0.183D-03	-0.177D-03
9	-0.171D-03	-0.166D-03	-0.160D-03	-0.155D-03	-0.151D-03
10	-0.146D-03	-0.142D-03	-0.138D-03	-0.134D-03	-0.130D-03
11	-0.127D-03	-0.123D-03	-0.120D-03	-0.117D-03	-0.114D-03
12	-0.111D-03	-0.109D-03	-0.106D-03	-0.103D-03	-0.101D-03
13	-0.987D-04	-0.964D-04	-0.943D-04	-0.922D-04	-0.902D-04
14	-0.883D-04	-0.864D-04	-0.846D-04	-0.829D-04	-0.812D-04
15	-0.796D-04	-0.780D-04	-0.765D-04	-0.750D-04	-0.736D-04
16	-0.722D-04	-0.709D-04	-0.696D-04	-0.684D-04	-0.672D-04
17	-0.660D-04	-0.648D-04	-0.637D-04	-0.626D-04	-0.616D-04
18	-0.605D-04	-0.596D-04	-0.586D-04	-0.576D-04	-0.567D-04
19	-0.558D-04	-0.550D-04	-0.541D-04	-0.533D-04	-0.525D-04
20	-0.517D-04	-0.509D-04	-0.502D-04	-0.495D-04	-0.487D-04
21	-0.480D-04	-0.474D-04	-0.467D-04	-0.461D-04	-0.454D-04
22	-0.448D-04	-0.442D-04	-0.436D-04	-0.430D-04	-0.425D-04
23	-0.419D-04	-0.414D-04	-0.408D-04	-0.403D-04	-0.398D-04
24	-0.393D-04	-0.388D-04	-0.384D-04	-0.379D-04	-0.374D-04
25	-0.370D-04	-0.365D-04	-0.361D-04	-0.357D-04	-0.353D-04
26	-0.349D-04	-0.345D-04	-0.341D-04	-0.337D-04	-0.333D-04
27	-0.330D-04	-0.326D-04	-0.322D-04	-0.319D-04	-0.315D-04
28	-0.312D-04	-0.309D-04	-0.305D-04	-0.302D-04	-0.299D-04
29	-0.296D-04	-0.293D-04	-0.290D-04	-0.287D-04	-0.284D-04
30	-0.281D-04	-0.279D-04	-0.276D-04	-0.273D-04	-0.270D-04
31	-0.268D-04	-0.265D-04	-0.263D-04	-0.260D-04	-0.258D-04
32	-0.255D-04	-0.253D-04	-0.251D-04	-0.248D-04	-0.246D-04
33	-0.244D-04	-0.242D-04	-0.240D-04	-0.237D-04	-0.235D-04
34	-0.233D-04	-0.231D-04	-0.229D-04	-0.277D-04	-0.225D-04
35	-0.223D-04	-0.221D-04	-0.220D-04	-0.218D-04	-0.216D-04
36	-0.214D-04	-0.212D-04	-0.211D-04	-0.209D-04	-0.207D-04
37	-0.205D-04	-0.204D-04	-0.202D-04	-0.201D-04	-0.199D-04
38	-0.197D-04	-0.196D-04	-0.194D-04	-0.193D-04	-0.191D-04
39	-0.190D-04	-0.188D-04	-0.187D-04	-0.186D-04	-0.184D-04
40	-0.183D-04	-0.181D-04	-0.180D-04	-0.179D-04	-0.177D-04
41	-0.176D-04	-0.175D-04	-0.174D-04	-0.172D-04	-0.171D-04
42	-0.170D-04	-0.169D-04	-0.167D-04	-0.166D-04	-0.165D-04
43	-0.164D-04	-0.163D-04	-0.162D-04	-0.161D-04	-0.159D-04
44	-0.158D-04	-0.157D-04	-0.156D-04	-0.155D-04	-0.154D-04
45	-0.153D-04	-0.152D-04	-0.151D-04	-0.150D-04	-0.149D-04
46	-0.148D-04	-0.147D-04	-0.146D-04	-0.145D-04	-0.144D-04
47	-0.143D-04	-0.143D-04	-0.142D-04	-0.141D-04	-0.140D-04
48	-0.139D-04	-0.138D-04	-0.137D-04	-0.136D-04	-0.136D-04
49	-0.135D-04	-0.134D-04	-0.133D-04	-0.132D-04	-0.132D-04

各々は，N＝２～498の範囲を前項のプログラムの場合と同様の形式で出力する。それらの特徴を次にのべていく。

TABLE 3とTABLE 4とはNが増加するにしたがい精度の上昇する常識的な場合であるが，誤差率は両者共全く同じ動きをする。これは位相がずれている点だけが異なり元々同じ形状の曲線のくり返えしだからである。

TABLE 5にて言えることは，N＝２～498のうち誤差率の最小はN＝６のとき得られ，その値は，-0.416×10^{-16} となる。その次に誤差率の小さいのはN＝１８の-0.833×10^{-16} となる。あとはNが１４０位までは10^{-15}の程度の誤差率で，Nをそれ以上ふやすと，10^{-14}程度に下がってしまう。

TABLE 6で言えることは，N＝２，４，８，１６，３２，６４，１２８，２５６と２の整数べき乗のとき，誤差率が０になることである。あとは全般的に，170以上では誤差率が１ケタ下がり10^{-14}となることである。

TABLE 7では，Nがふえるにしたがい精度の上昇する常識的のものであるが，全般的に他より誤差率の程度が低く，N＝498でも0.108×10^{-10}に過ぎぬ。

TABLE 9.では前例と同じ傾向にあるが更に精度が低い。これは$\sqrt{\quad}$内の計算がたとえ10^{-16}の精度で行われても平方に関らくことによりその半分の精度に落ちてしまうことによるものと思われる。

参 考 文 献

(1)：森口繁一：「科学」Vol. 32, №12 p.669～670等

(2)：森口繁一：「科学」Vol. 33, №1