単位区間上の微分．IV

芳賀義則*

（平成元年８月31日受理）

Derivations on the Unit Interval. IV

Yoshinori HAGA**

Abstract—In the present paper we study the absolutely continuous part of measure valued derivations to obtain the following results. Let f be an essentially bounded function on the unit interval I with supp f = I. For an absolutely continuous measure μ on I, we consider the function $\mu_f^a(t) = a1(t) + \int_0^t f(s)\mu(ds)$. Then the map A_f defined by $A_f(\mu_f^a) = \mu$ on the set $\mathscr{D}(A_f) = \{\mu_f^a : a \in \mathrm{R}, \mu$ absolutely continuous$\}$ is a measure valued closed derivation in C(I). Conversely, a closed derivation δ in C(I) satisfying the conditions that the range $\mathscr{R}(\delta)$ is the set of all absolutely continuous measures and the kernel $\mathscr{K}(\delta)$ is $\{a1 : a \in \mathrm{R}\}$, is the derivation A_f with respect to a uniquely determined essentially bounded function f on I with supp f = I.

１．［１］～［３］に引き続いて単位区間上の測度値微分についての考察を行うが，これまでの結果の多くは“単位区間”を“コンパクト空間”に置き換えても成り立つ。それ故これまでやや説明不足であった点を補足しつつ，最初にコンパクト空間上の測度値微分について述べることにする。つぎの節で単位区間の場合に戻る。以下Xは常にコンパクトHaussdorff空間とする。

X上の実数値連続関数の全体C(X)は通常の和，実数倍および一様収束ノルム

$$\|f\| = \sup\{|f(t)| : t \in \mathrm{X}\}$$

によって実Banach空間であり，さらに通常の積に対して

$$\|fg\| \leqq \|f\|\|g\|, \quad \|f^2\| = \|f\|^2$$

が成り立つから，対合を$f^* = f$とすることにより実C*-環である(実C*-環については［７］が参考になる)。

X上のRadon測度とはBanach空間C(X)上の実数値連続線形汎関数μをいい(［４］,［６］)，その全体すなわちC(X)の双対空間をM(X)で表す。

M(X)は双対ノルム

$$\|\mu\| = \sup\{|\mu(f)| : f \in \mathrm{C(X)}, \|f\| \leqq 1\}$$

によって実Banach空間である。C(X)は通常の大小関係$f \leqq g$によってBanach束でもある。そしてC(X)上の任意の正値線形汎関数μは常に連続であるから正値Radon測度とよんでよい。正値のμに対しては，XのBorel集合族（Xの開集合全体から生成された完全加法族）の上で定義されたいわゆるBorel測度μ_1で，$\mu_1(\mathrm{X}) = \|\mu\|$であるものが存在し

$$\mu(f) = \int_{\mathrm{X}} f(t) d\mu_1(t) \qquad (f \in \mathrm{C(X)}) \tag{1}$$

となる(Riesz-Markov-角谷の定理，［４］定理５．９,［６］IV．４．10)。逆に$\mu_1(\mathrm{X}) < \infty$を満たすBorel測度$\mu_1$に対し(1)で定義される$\mu$は容易に分かるように

＊茨城大学工学部共通講座(応用数学)(日立市中成沢町)

＊＊Common Chairs (Applied Mathematics), Faculty of Engineering, Ibaraki University, Hitachi 316, Japan

C(X)上の正値線形汎関数であって，$|\mu(f)| \leqq \mu_1(X)\|f\|$となる。このBorel測度$\mu_1$が正則であることによって，正値Radon測度$\mu$と有限Borel測度$\mu_1$の(1)による対応は１対１であることが分かる。C(X)において定義されたμの定義域をBorel可測関数にまで拡張することができ，そのときBorel集合Ｅに対しその特性関数をχ_Eとすれば$\mu_1(E)=\mu(\chi_E)$である。以後μ_1をμと同一視し同じμで表すことにする。すべての$\mu \in M(X)$は一意的に２つの正測度μ^+, μ^-の差として表される：$\mu=\mu^+-\mu^-$. よってＸ上のRadon測度はいわゆる“符号つき測度”あるいは“完全加法的集合関数”でもある。このとき$|\mu|=\mu^+ + \mu^-$として

$$\|\mu\| = |\mu|(1) = \int d|\mu|$$

である([６] Ⅲ.１.６)。

さて，$\mu \in M(X)$とするとき，任意の$g \in C(X)$に対して写像

$$f \to \mu(fg) = \int f(t)g(t)\mu(dt)$$

はC(X)上の連続線形汎関数であるからM(X)の元である。これを$g\mu$で表し関数gと測度μの積とよぶ。このとき$\|g\mu\| \leqq \|g\|\|\mu\|$であるからM(X)はBanach C(X)加群である。従ってC(X)からM(X)への微分をつぎのように定義することができる。すなわち，定義域$\mathscr{D}(\delta)$がC(X)の稠密な部分環であるような線形写像

$$\delta : C(X) \to M(X)$$

であって，すべての$a, b \in \mathscr{D}(\delta)$に対して微分律

$$\delta(ab) = b\delta(a) + a\delta(b)$$

を満足するものを**Ｘ上の微分**あるいは**C(X)での微分**とよぶことにする。微分δが閉写像であるときδを閉微分とよぶ。δが閉微分ならば，fを実数直線Ｒ上の連続微分可能関数とすれば，$a \in \mathscr{D}(\delta)$に対して合成関数$f(a)$もまた$\mathscr{D}(\delta)$に属し

$$\delta(f(a)) = f'(a)\delta(a) \tag{2}$$

であることは[１]の定理１と同様である。またδが閉微分ならば，定義域$\mathscr{D}(\delta)$はノルム

$$\|a\|_\delta = \|a\| + \|\delta(a)\|$$

によって可換な実Banach環になることは容易に確められるが，さらにそれはC(X)のSilov部分環であることを示そう。まず[11]や[８]の複素環の場合と同様に実Silov環を次のように定義する。C(X)の部分環$\mathscr{A}$がSilov環であるとは，その極大イデアル空間がＸと一致し，Ｘの任意の閉部分集合Ｆと任意の$t \in F^c$に対し$\alpha|F=0$かつ$\alpha(t)=1$となる$\alpha \in \mathscr{A}$が存在することである。つぎの定理ＡはδがC(X)→C(X)の閉微分である場合について[11]において示されたものであるが，われわれの場合については[12]の証明がそのまま通用する。

定理Ａ，コンパクト空間Ｘ上の微分δ：C(X)→M(X)が閉微分ならば$\{\mathscr{D}(\delta), \|\ \|_\delta\}$はC(X)のSilov部分環である。

証明。まずBanach環$\mathscr{D}(\delta)$の極大イデアル空間がＸに一致することを示そう。t_0を$\mathscr{D}(\delta)$の極大イデアルとし，これがＸの１点から誘導されるイデアルではないとする。しかるとき，どんな$t \in X$に対しても$a_0(t) \neq 0$となる$a_0 \in t_0$が存在する。Ｘはコンパクトであるから従ってＸの有限個の点$t_1, t_2, \cdots, t_n$とそれぞれの開近傍$U_1, U_2, \cdots\cdots, U_n$および$t_0$の元$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$を適切に選べば，$\{U_i\}$はＸの開被覆であって$a_i(1 \leqq i \leqq n)$は各$U_i$において０にならないようにできる。そこで$b(t)=\sum\{a_i(t)\}^2$とおけば，$b(t)$は$t_0$の正の元であってＸ上で０になることはない。いまこの$b(t)$の値域においては関数$1/s$と一致するような$f \in C^1(R)$を考えれば，式(2)において述べたように，合成関数$f(b)$は$\mathscr{D}(\delta)$に属し，従って$f(b)b=1$もt_0に属することになるから$t_0=\mathscr{D}(\delta)$となって矛盾である。よって$\mathscr{D}(\delta)$の極大イデアル空間はＸと一致する。

さてＦをＸの閉集合とし$t_0 \in F^c$とする。$x \in C(X)$は$x|F=0$, $x(t_0)=1$なる関数とすると，定義域の稠密性により$\|x-a\|<1/2$となる関数$a \in \mathscr{D}(\delta)$がある。このとき

$$\|a|F\| = \|(a-x)|F\| < 1/2$$
$$a(t_0) = \{a(t_0)-x(t_0)\} + x(t_0) > 1/2$$

であるから，$h|a(F)=0$, $h(a(t_0))=1$となる関数$h \in C^1(R)$が存在する。式(2)において述べたように，合

成関数$h(a)$は$\mathscr{D}(\delta)$に属し

$$h(a)(\mathrm{F})=h(a(\mathrm{F}))=0$$
$$h(a)(t_0)=h(a(t_0))=1$$

である。よって $\alpha=h(a)$とすればよい。

つぎの２つの系は［10］Prop.（３．５），［12］Prop. １．１．３や［８］Lem. １．１．５，［２］定理３と同様に証明できる。

系１． 定理Ａの条件の下で，Ｘの互いに素な２つの閉集合Ｅ，Ｆに対して $\alpha|\mathrm{E}=1$ かつ $\mathrm{supp}\alpha\subset\mathrm{F}^c$，$0\leqq\alpha\leqq1$ となる $\alpha\in\mathscr{D}(\delta)$ が存在する。このαは hull Ｊ＝Ｆなる任意のイデアルＪから選べる。

系２． $\delta:\mathsf{C}(\mathrm{X})\to\mathsf{M}(\mathrm{X})$を閉微分とする。$\alpha\in\mathscr{D}(\delta)$がＸの開集合Ｕ上で定数値をとるならば，$\delta(\alpha)$はＵ上の測度として０である。

さて，Ｘ上の１つの正値Radon測度（有限Borel測度）mを定め，mに関してはＸの１点集合はすべて測度０であるとする。mの他にＸのBorel集合族に対して定義されたRadon測度$\mu\in\mathsf{M}(\mathrm{X})$を考える。すべての１点集合Ｅに対して$\mu(\mathrm{E})=0$となるとき$\mu$は**連続**であるという。また $m(\mathrm{E})=0$なる集合Ｅに対して常に$\mu(\mathrm{E})=0$であるときμはmに関して**絶対連続**であるという。μがどのBorel集合$\mathrm{E}\subset\mathrm{E}_0{}^c$に対しても$\mu(\mathrm{E})=0$となるとき$\mu$は集合$\mathrm{E}_0$の上に集中しているというが，$m(\mathrm{E}_0)=0$のある集合$\mathrm{E}_0$の上に集中している$\mu$は$m$に関して**特異**であるという。特に$\mathrm{E}_0$がたかだか可算集合であるときは$\mu$は**離散的**であるという。絶対連続で特異な測度は０に等しい。

任意のRadon測度 $\mu\in\mathsf{M}(\mathrm{X})$は

$$\mu(\mathrm{E})=A(\mathrm{E})+S(\mathrm{E})+D(\mathrm{E})\quad(\mathrm{E}:\text{Borel集合})\tag{3}$$

の形に一意に表すことができる。ただしmに関して，Aは絶対連続であってある$\varphi\in\mathrm{L}^1(\mathrm{X},\ m)$によって

$$A(\mathrm{E})=\int_{\mathrm{E}}\varphi(t)\,m(dt)$$

と表され，Sは連続かつ特異，Dは離散的な測度である（［５］§９．定理２）。なお測度mはBorel集合族$\mathscr{B}$からその完備化$\mathscr{B}_m$にLebesgue式測度として拡張できるが(3)の表し方はその完備化までは拡張できない。なぜなら$\mathscr{B}_m$は一般にRadon測度μに関する$\mathscr{B}$の完備化$\mathscr{B}_\mu$には含まれないからである。

δをＸ上の微分とし，各測度$\delta(a)$（$a\in\mathscr{D}(\delta)$）を上述のように絶対連続部分$A(a)$，連続特異部分$S(a)$，離散部分$D(a)$に分ければ，A，S，Dは関数aにそれぞれこれら３種の測度を対応させる写像と見ることができる。これらの写像は明らかに線形であるが，微分律をも満たす。実際，δの微分律によって，a，$b\in\mathscr{D}(\delta)$に対し

$$\begin{aligned}A(ab)+S(ab)+D(ab)&\\=b\,\{A(a)+S(a)+D(a)\}&\\+a\,\{A(b)+S(b)+D(b)\}&\end{aligned}$$

となるが，絶対連続，連続特異，離散的の各性質は連続関数を乗じても変わらず，しかも(3)の表し方が一意的であるから上の等式の各部分を比較することによってA，S，Dそれぞれの微分律が得られる。従って任意の微分$\delta:\mathsf{C}(\mathrm{X})\to\mathsf{M}(\mathrm{X})$はこれら３つの部分に分けて考察することができる。

離散測度値の微分Dについては，$\mathscr{D}(\delta)=\mathsf{C}(\mathrm{X})$ならば恒等的に０であることは［２］と同様に示される。また自明な微分０以外のDは一般に可閉微分でない（［２］定理４）。

２． Ｘが単位区間$\mathrm{I}=[0,\ 1]$の場合へ戻る。この場合にはRadon測度に対して次に述べるようにその母関数が存在するので通常の微分や積分の演算と関連を持たせることができる。いま開区間$(0,\ 1)$で右連続かつ$\alpha(0)=0$なるＩ上の有界変動関数（normalized functions of bounded variation）α全体にノルム$\|\alpha\|$としてαの全変動$V(\alpha)$を与えた空間を$\mathsf{NBV}(\mathrm{I})$で表せば，各$\alpha\in\mathsf{NBV}(\mathrm{I})$に対してそれを母関数とするＩ上のRadon測度$d\alpha$が

$$d\alpha([a,\ b])=\alpha(b)-\alpha(a-0)\qquad(0<a\leqq b\leqq1)$$

$$d\alpha([0,\ b])=\begin{cases}\alpha(b) & (0<b\leqq1)\\ \alpha(+0) & (b=0)\end{cases}$$

によって生成される。このとき$\|d\alpha\|=V(\alpha)$となるから対応$d\alpha\leftrightarrow\alpha$によって$\mathsf{M}(\mathrm{I})$は$\mathsf{NBV}(\mathrm{I})$と同一視できる。Ｉ上のLebesgue測度は$x(t)=t$なる$x\in\mathsf{NBV}(\mathrm{I})$に対応する。このときは$dx(t)$を単に$dt$と書くことにする。

いま，mとしてこのLebesgue測度をとり，前節に述

べたように任意の$\mu \in$ M(I)をmに関して絶対連続なA，連続特異なS，離散的なDの3測度に分ける。このとき $\mu = d\alpha$ ($\alpha \in$ NBV(I))とすれば，この分割に対応して関数αも

$$\alpha(t) = A(t) + S(t) + D(t)$$

と分解される。ただし，$A(t)$は実1変数関数として絶対連続で，ほとんどいたるところで導関数$A'(t) = \varphi(t)$をもち，$\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I}, m)$であって

$$A(t) = \int_0^t \varphi(s)\,ds\ ,$$

の形に表される([5] §10. 定理2の系2)。また$S(t)$は連続特異([5] §9.7)かつ$S(0) = 0$，$D(t)$は右連続な跳躍関数([5]§9.8)である。この分解は一意的で，$\varphi(t)$は測度0の集合を除いて一意的に定まる([5]§9. 定理6)。3測度A, S, DはそれぞれNBV(I)の関数$A(t), S(t), D(t)$と前述の意味で同一視できるわけである。これは単位区間を任意の閉区間に置き換えてももちろん同様である。またIの左端0で0になる関数だけを考えたとき絶対連続な関数全体，連続特異な関数全体，右連続な跳躍関数全体はそれぞれNBV(I)の閉部分空間をなす([5] §9. 問題参照)。従ってまた各関数に対応する測度の空間もM(I)の閉部分空間である。離散測度値微分は可閉でない([2]定理4)から閉微分を考察するときはAとSだけを考えればよい。

今回は本質的に有界な関数によって誘導される絶対連続測度値の微分を考察することにする。この微分は閉微分の構造を解析するときに有用なものになると思われる。

Lebesgue 測度mに関する絶対連続測度(absolutely continuous measure)の全体をACM(I)で表す。前述のように任意の $\mu \in$ ACM (I) に対して $\alpha \in$ NBV (I) と$\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I}, m)$があって

$$\mu(\mathrm{E}) = \int_{\mathrm{E}} d\alpha = \int_{\mathrm{E}} \varphi(t)\,dt \quad (\mathrm{E}：\mathrm{Borel集合})$$

と表される。すなわちこの関係によって

$$\mu \in \mathrm{ACM}(\mathrm{I}) : \|\mu\| = |\mu|(1)$$
$$\alpha \in \mathrm{NBV}(\mathrm{I}) : \|\alpha\| = V(\alpha)$$
$$\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I}, m) : \|\varphi\| = \int |\varphi(t)|\,dt$$

の3つを同一視できる。いま$f \in \mathrm{L}^\infty(\mathrm{I}, m)$と定数$a$を定めて

$$\mu_f^a(t) = a\,1(t) + \int_0^t f(s)\mu(ds)$$
$$= a\,1(t) + \int_0^t f(s)\varphi(s)\,ds$$

とおけば，$f\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I}, m)$だから$\mu_f^a(t)$は絶対連続関数である([5]§9. 定理3の系)。ただし$1(t)$は恒等的に1の定数関数である。このときまずつぎのようにfに対応する閉微分が得られる。

定理1． supp $f = \mathrm{I}$のとき
$\mathscr{D}(A_f) = \{\mu_f^a : a \in \mathrm{R},\ \mu \in \mathrm{ACM}(\mathrm{I})\}$
を定義域とする写像A_fを

$$A_f(\mu_f^a) = \mu$$

によって定義すれば，A_fはI上の閉微分である。

証明。まずA_fが一意に定義されることを示そう。μ_f^aがI上で常に0ならば，任意の区間$[b, c] \subset \mathrm{I}$に対して

$$\int_b^c f(s)\mu(ds) = \mu_f^a(c) - \mu_f^a(b) = 0$$

となり，supp $f = \mathrm{I}$だから$\mu = 0$である。従ってI上で常に$\mu_f^a(t) = \nu_f^b(t)$ならば $\mu = \nu$. よって$A_f(\mu_f^a) = A_f(\nu_f^b)$となる。

$\mathscr{D}(\delta_f)$がC(I)の部分空間で，A_fが線形写像であることは明らかであるから，つぎに$\mathscr{D}(A_f)$が環であってA_fが微分律を満足することを示そう。

$\mu \in$ ACM(I)，$h \in$ C(I)ならば$h\mu \in$ ACM(I)だから$(h\mu)_f^0 \in \mathscr{D}(A_f)$であることと，$A_f(\mu_f^a) = A_f(\mu_f^0) = \mu$に注意しながら

$$\mu_f^a \nu_f^b = (a1 + \mu_f^0)(b1 + \nu_f^0)$$
$$= ab1 + b\mu_f^0 + a\nu_f^0 + \mu_f^0 \nu_f^0$$

と

$$\nu_f^b A_f(\mu_f^a) + \mu_f^a A_f(\nu_f^b)$$
$$= (b1 + \nu_f^0)\mu + (a1 + \mu_f^0)\nu$$
$$= A_f(b\mu_f^0 + a\nu_f^0 + (\nu_f^0\mu)_f^0 + (\mu_f^0\nu)_f^0)$$

を比較すれば，等式

$$\mu_f^{\circ}\nu_f^{\circ}=(\nu_f^{\circ}\mu)_f^{\circ}+(\mu_f^{\circ}\nu)_f^{\circ}$$

さえ示せれば，積 $\mu_f^{\circ}\nu_f^{\circ}$ も $\mathscr{D}(A_f)$ に属し，微分律の成り立つことが分かる。そして実際

$$(\nu_f^{\circ}\mu)_f^{\circ}+(\mu_f^{\circ}\nu)_f^{\circ}$$

$$=\int_0^t\{\int_0^s f(u)\nu(du)\}f(s)\mu(ds)$$

$$+\int_0^t\{\int_0^u f(s)\mu(ds)\}f(u)\nu(du)$$

$$=\int_0^t f(s)\int_0^s f(u)\nu(du)\mu(ds)$$

$$+\int_0^t f(s)\int_s^t f(u)\nu(du)\mu(ds)$$

$$=\int_0^t f(s)\mu(ds)\int_0^t f(u)\nu(du)$$

$$=\mu_f^{\circ}\nu_f^{\circ}$$

となる。

$\mathscr{D}(A_f)$ が定数関数をすべて含み，I の点を分離することは明らかだから Stone-Weierstrass の定理によって $\mathscr{D}(A_f)$ は C(I) で稠密である。最後に A_f が閉写像であることを示そう。そのためには

$$a_n 1(t)+\int_0^t f(s)\mu_n(ds)\to\alpha(t)\in \mathrm{C}(\mathrm{I})$$

かつ

$$\mu_n\to\mu\in \mathrm{M}(\mathrm{I})\qquad(n\to\infty)$$

のとき

$$\alpha\in\mathscr{D}(A_f),\qquad A_f(\alpha)=\mu$$

であることを示せばよい。$a_n(n=1,2,\cdots)$ は A_f の値に無関係だから，収束列においてはすべて 0 としてよい。また絶対連続測度全体は M(I) の閉部分空間になるから，μ は絶対連続である。f の L^∞ ノルムを M とすれば

$$\|(\mu_n)_f^{\circ}-\mu_f^{\circ}\|$$

$$=\sup\{\,|\int_0^t f(s)(\mu_n-\mu)(ds)|\,:\,0\leqq t\leqq 1\}$$

$$\leqq M\|\mu_n-\mu\|\to 0\qquad(n\to\infty)$$

従って　$\alpha(t)=\mu_f^{\circ}(t)\in\mathscr{D}(A_f)$ であり $A_f(\alpha)=\mu$ である。

この定理で f を $\mathrm{L}^1(\mathrm{I}, m)$ 等の関数とすることはできない。例えば $f(t)=1/\sqrt{t}$ とすると $\mu=d(\sqrt{t})$ に対して $f\varphi=(1/\sqrt{t})(\sqrt{t})'=1/2t$ は $\mathrm{L}^1(\mathrm{I}, m)$ に属さず $\mu_f^a(t)$ が定義できないからである。つぎにこの定理の逆を証明しよう。この証明によれば実際 f は $\mathrm{L}^\infty(\mathrm{I}, m)$ の関数に限られることが分かる。証明は[9] Th. 2.3, [12] Th 3.1.3 に類似する。

定理 2． 閉微分 δ : C(I)→M(I) の値域を $\mathscr{R}(\delta)$，核を $\mathscr{K}(\delta)$ で表すとき

$$\mathscr{R}(\delta)=\mathrm{ACM}(\mathrm{I}),\ \mathscr{K}(\delta)=\{a1 : a\in\mathrm{R}\}$$

であるならば，$\mathrm{supp}\,f=\mathrm{I}$ なる $f\in\mathrm{L}^\infty(\mathrm{I}, m)$ がただ 1 つ存在し $\delta=A_f$ となる。

証明．$A_f=A_g$, $\mathrm{supp}\,f=\mathrm{supp}\,g=\mathrm{I}$ ならば，$\mathscr{D}(A_f)=\mathscr{D}(A_g)$ によって任意の μ_f^a に対し適当な b をとれば $A_f(\mu_f^a)=A_g(\mu_g^b)$ すなわち

$$a+\int_0^t f(s)\mu(ds)=b+\int_0^t g(s)\mu(ds)$$

となる。$\mu\in\mathrm{ACM}(\mathrm{I})$ は任意だから $a=b$ かつ $f=g$ (m-a. e.) である。従って f の存在を示せば十分である。

$$\mathrm{C}_0(\mathrm{I})=\{\alpha\in\mathrm{C}(\mathrm{I}) : \alpha(0)=0\}$$

とし

$$\mathscr{D}_0=\mathscr{D}(\delta)\cap\mathrm{C}_0(\mathrm{I})$$

とする。このとき仮定により　$\delta_0=\delta|\mathscr{D}_0$ は $\mathscr{D}_0$ から ACM(I) の上への 1 対 1 の閉写像になる。従って逆写像 δ_0^{-1} は ACM(I) 全体から $\mathrm{C}_0(\mathrm{I})$ の中への閉写像であり，閉写像定理により δ_0^{-1} は連続写像であることが分かる。

$t\in\mathrm{I}$ を 1 つ定めておく。$\mu,\nu\in\mathrm{ACM}(\mathrm{I})$ が区間 $[0,t]$ 上の測度として一致するならば，関数 $\delta_0^{-1}(\mu-\nu)\in\mathrm{C}_0(\mathrm{I})$ は [3] の定理 4 により $[0,t]$ で定数である。よって

$$\delta_0^{-1}(\mu)(t)-\delta_0^{-1}(\nu)(t)=\delta_0^{-1}(\mu-\nu)(0)=0$$

すなわち

$$\delta_0^{-1}(\mu)(t)=\delta_0^{-1}(\nu)(t)$$

となる。従って$\mu\in$ACM([0, t])に対して$\widetilde{\mu}\in$ACM(I)をI上へのμの拡張とするとき，ACM([0, t])上の汎関数

$$\mu\to\delta_0^{-1}(\widetilde{\mu})(t) \tag{4}$$

は一意に定義され，上に示したようにそれは連続である(区間[0, t]上で$\mu_n\to\mu$のとき[t, 1]ではすべて0測度であるとして拡張すれば，$\widetilde{\mu}_n$, $\widetilde{\mu}\in$ACM(I)が得られ$\widetilde{\mu}_n\to\widetilde{\mu}$である)。前述したように，閉区間[0, t]上の任意の絶対連続測度μはある$\varphi\in L^1([0, t], m)$によって$\varphi(t)dt$と表される。そして周知のように$L^1$の双対空間は$L^\infty$であるから，上の連続線形汎関数(4)は一意的に定まる$f_t\in L^\infty([0, t], m)$によって

$$\delta_0^{-1}(\widetilde{\mu})(t)=\int_0^t f_t(s)\varphi(s)\,ds$$

$$=\int_0^t f_t(s)\mu(ds) \tag{5}$$

と表せる。$\mu\in$ACM(I)を[t, 1]では0の測度であるとすれば，[3]の定理4により

$$\delta_0^{-1}(\mu)(t)=\delta_0^{-1}(\mu)(1)$$

である。すなわち(5)により任意の$\mu\in$ACM(I)に対して

$$\int_0^t f_t(s)\mu(ds)=\int_0^t f_1(s)\mu(ds)$$

である。従って関数f_1を[0, t)に制限したものはすべてのtについて関数f_tとほとんどいたる所で一致する。f_1をfと書けば，すべての$\mu\in$ACM(I)に対して

$$\delta(\mu_f^a)=\delta(a1+\int_0^t f(s)\mu(ds))$$

$$=\delta_0(\int_0^t f(s)\mu(ds))=\mu$$

である。よって$\delta=A_f$であり，また前節の定理Aにより$\mathscr{D}(\delta)$はSilov環であるからsupp $f=$ Iでなければならない。

上のA_fでfを特に定数関数1としたときの微分A_1は[1]で定義した標準的な微分dの定義域CV(I)(連続な有界変動関数全体)を$\mathscr{D}(A_1)$に，すなわち絶対連続関数だけに制限したものに他ならない。なお容易に分かるようにess. inf $|f(t)|>0$のときは$\mathscr{D}(A_f)$は絶対連続関数全体と一致する。付言すれば，絶対連続関数全体は一様ノルムの空間C(I)では稠密であるが，全変動ノルムの空間CV(I)では閉部分空間を作る。

A_1の値域は$\varphi\in L^1(I, m)$による測度$\varphi(t)dt$全体であるから，値を関数$\varphi(t)$であると見なすならばA_1を通常の微分作用素$\dfrac{d}{dt}$と同一視することもできる。一般にA_fは，積分$\int_0^t f(s)\varphi(s)ds$を測度$\mu=f(s)ds$による$\varphi(s)$の積分と見ることによって[12] §3.1で定義された微分$\delta_\mu=\dfrac{d}{d\mu}$の拡張と考えることができる。ただし，値域の位相が相異なることに注意しなければならない。

参 考 文 献

[1] 芳賀：単位区間上の微分. I, 茨城大学工学部研究集報，34(1986)，171-174.

[2] 芳賀：同上. II，同上，35(1987)，209-213.

[3] 芳賀：同上. III，同上，36(1988)，209-212.

[4] 伊藤. 小松：解析学の基礎，岩波(1977)

[5] シーロフ・グーレヴィチ：積分・測度・導函数，東京図書，(1968)

[6] N.Bourbaki : Intégration, Actualites Sci. Indust., Hermann, (1952)

[7] K. R. Goodearl : Notes on Real and Complex C*-algebras, Shiva Publishing, (1982).

[8] F. M. Goodman : Closed derivations in commutative C*-algebras, J. Funct. Anal., 39(1980), 308-346.

[9] H. Kurose : An example of a non quasi well-behaved derivation in C(I), J. Funct. Anal., 43(1981), 193-201.

[10] R. D. Mosak : Banach Algebras, Univ. of Chicago Press, (1975).

[11] S. Sakai : The theory of unbounded derivations in C*-algebras, Lecture notes, Copenhagen Univ. and Univ. of Newcastle upon Tyne, (1977).

[12] J. Tomiyama : The theory of closed derivations in the algebra of continuous functions on the unit interval, Lecture at National Tsin Hua Univ., Taiwan(1983).