# 有向グラフの完全連結性

西尾　克義*，中本　律男**

（平成２年８月31日受理）

# On the Complete Connectivity of a Directed Graph

Katsuyoshi NISHIO* and Ritsuo NAKAMOTO**

*ABSTRACT* — In [2], Y.Takenaka and G.Kitagawa gave some characterizations of complete connectivity of a directed graph. In this paper, we shall present fundamental correlations between complete connectivity and strong connectivity, together with some applications.

## 1　準　　備

グラフの連結性については既に数多くの研究がなされているが，ここでは有向グラフにおけるいわゆる強連結といわれる性質とそれよりさらに強い完全連結性との関係について調べる。以下においては専ら有向グラフを扱うのでそれを単にグラフということにする。また閉路は有向閉路を，道は有向道を意味するものとし，特に同じ点を二度以上通らない閉路，道をそれぞれ単純な閉路，単純な道という。

点の集合が $V$，辺の集合が $E$ のグラフを $G(V, E)$，あるいは単に $G$ と表す。$V=\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ のとき，$G$ の**隣接行列** $A$ とはその $(i, j)$ 成分 $a_{ij}$ が $v_i$ から $v_j$ への辺の個数（辺がないときは0）である $p\times p$ 行列のことである。$A$ を $G$ の隣接行列とするとき，正の整数 $s$ に対して，$A^s$ を隣接行列とするグラフを $G^{(s)}$ と表す。$G^{(s)}$ の点集合は $G$ の点集合 $V$ と等しく，また $G^{(s)}$ において点 $v$ から点 $w$ への辺があるということは $G$ において $v$ から $w$ への長さが $m$ の道があることと同値である（参照［1：定理3.1］）。

グラフ $G$ の任意の二点 $v, w$ に対して $v$ から $w$ へ常に到達可能であるとき，$G$ は**強連結**であるといわれる。従って，$G$ が強連結であるということはその隣接行列を $A=[a_{ij}]_{1<i,\ j<p}$，$G^{(s)}$ の隣接行列を $A^{(s)}=[a_{ij}^{(s)}]_{1<i,j<p}$ とするとき，任意の $i, j$ $(1\leq i, j\leq p)$ に対して $a_{ij}^{(s)}>0$ となる正の整数 $s$ がとれることと同値である。一方，正の整数 $m$ で $A^m\geq J$（$A^m-J$ が非負行列）を満たすものが存在するとき $G$ は**完全連結**であるといわれる，ここで $J$ は$A$と同じサイズの行列で各成分がすべて１である行列を表す。明らかに，$G$ が完全連結であれば強連結である。

竹中－北川（参照［２］）は完全連結性についての特徴付けを与えている（証明は不完全であるように思われる）がわれわれはグラフ $G^{(s)}$ で考えることにより完全連結性と強連結性との相互の関係を明確に捉えることができたので，ここにその非負行列への一つの応用をもあわせて報告する。

定理の証明のためにここに次の補題を準備しておく。

＊茨城大学工学部共通講座　数理情報工学（日立市中成沢町）
Common Chairs (Numerical Science), Faculty of Engineering, Ibaraki University, Hitachi 316, Japan
＊＊茨城大学工学部共通講座　応用数学（日立市中成沢町）
Common Chairs (Applied Mathematics), Faculty of Engineering, Ibaraki University, Hitachi 316, Japan

**補 題**. $l_1, l_2, \cdots, l_n$ は正の整数でそれらの最大公約数は1とする。このとき任意の正の整数 $s$ と任意の整数 $r$ に対し，正の整数 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ と $\gamma$ を選んで

$$r+\gamma_1 l_1+\gamma_2 l_2+\cdots+\gamma_n l_n=\gamma s$$

を満たすようにできる。

**証 明**. 初等整数論でよく知られているように $l_1, l_2, \cdots, l_n$ の最大公約数が1のときは，任意の整数 $r$ に対し

$$r+a_1 l_1+a_2 l_2+\cdots+a_n l_n=0$$

を満たす整数 $a_i$ $(1\leq i\leq n)$ が存在する。各 $i$ に対し $a_i+b_i s\geq 0$ となるように正の整数 $b_i$ をとり，$\gamma_i=a_i+b_i s$ $(1\leq i\leq n)$ とすると

$$\begin{aligned} r+\gamma_1 l_1+\gamma_2 l_2+\cdots+\gamma_n l_n &= r+\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i s)\,l_i \\ &= r+\sum_{i=1}^{n} a_i l_i+\left(\sum_{i=1}^{n} b_i l_i\right)s \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} b_i l_i\right)s \end{aligned}$$

ここで $\gamma=\sum_{i=1}^{n} b_i l_i$ とすればよい。

Q.E.D.

## 2 定 理

**定 理**. 有向グラフ$G$について次の命題(1)－(3)は同値である。

(1) $G$が完全連結である。

(2) $G$が強連結であり，さらに$G$の単純な閉路でそれらの長さの最大公約数が1となるものがある。

(3) 任意の正の整数 $s$ に対し，$G^{(s)}$ は強連結である。

**証 明**.

(1)⇒(2) $G$ が完全連結とすると正の整数 $m_0$ が存在して $m\geq m_0$ なるすべての正の整数 $m$ に対して $A^m\geq J$ を満たす。従って，$A^m$ の対角要素は1以上であり，これは長さ $m$ の閉路があることを保証する。$m\geq m_0$ なる連続する2数 $m_1, m_2$ をとればその最大公約数は1である。またそれぞれ長さ $m_1, m_2$ の閉路をとり $C_1, C_2$ とする。すべての閉路は単純な閉路の和であるから $C_1, C_2$ の少なくとも一方に含まれる単純な閉路の全集合はそれらの長さの最大公約数が1となる。何故なら，もしそれらの長さの最大公約数が $t$ $(\neq 1)$ であれば $m_1, m_2$ は共に $t$ の倍数でなければならない。

(2)⇒(3) 任意の正の整数 $s$ をとりそれを固定したとき，$G$の任意の2点 $u, w$ に対して $u$ から $w$ への道でその長さが $s$ の倍数であるものがあることを示せばよい。

$C_1, C_2, \cdots, C_n$ をそれぞれ長さが $l_1, l_2, \cdots, l_n$ の単純な閉路で $\{l_1, l_2, \cdots, l_n\}$ の最大公約数は1であるとする。また各 $C_i$ から任意に点を一つとり，それらを $v_1, v_2, \cdots, v_n$ とする。次に $u$ から $v_1$ への道を一つ選びそれを $R_1$，同様に $v_{i-1}$ から $v_i$ への道 $R_i$ $(2\leq i\leq n)$ を，$v_n$ から $w$ への道 $R_{n+1}$ をとる。各道 $R_i$ の長さは $r_i$ $(1\leq i\leq n+1)$ とする。このような道がとれることは $G$ が強連結であることから保証される。今 $u$ から出発し上記の道を順次通りかつ各閉路 $C_i$ 上を $\gamma_i$ 回 $(1\leq i\leq n)$ 回って $w$ へ到達する道を考えるとき，その道の長さ $L(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)$ は

$$\begin{aligned} L(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n) &= r_1+\gamma_1 l_1+\cdots+r_n+\gamma_n l_n+r_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} r_i+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i l_i \end{aligned}$$

となる。$r=\sum_{i=1}^{n+1} r_i$ として補題を適用すれば正の整数 $\gamma_i$ $(1\leq i\leq n)$ を選んで

$L(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)=ms$ ここで，$m$は正の整数

とできる。よって，$G$ の任意の二点 $u, w$ に対して $u$ から $w$ への道でその長さが $ms$ となるものがとれたことになり，これは $G^{(s)}$ においては $u$ から $w$ への長さが $m$ の道であることと同値である。

(3)⇒(1) 仮定より $G$ 自身も強連結であるから $G$ は単純な閉路を含む。$G$ の単純な閉路の一つ $C$ をと

り，その長さを $s$ とする。このとき，$G^{(s)}$ が強連結であるという仮定のもとで整数 $m$ が存在して任意の点からちょうど $m$ ステップですべての点へ到達可能であることを示せばよい。

$G$ の位数を $p$ とする。そのとき，任意の点から $C$ 上の各点へは $p-s$ ステップ以下で到達可能であり，一度 $C$ 上に到達したならばそのあとは $C$ 上を移動していることにするとちょうど $m_1$ ($\leq p-s$) ステップで任意の点から$C$上のいずれかの点へ到達可能である。さらに，グラフ $G^{(s)}$ は強連結かつ $C$ 上の各点にはループがあることを考え合わせると $G^{(s)}$ においては $C$ 上の各点から $G^{(s)}$ のすべての点へある $m_2$ ($\leq p-1$) ステップでちょうど到達できる。グラフ $G$ 上では $m_2 s$ ステップかかることになる。合わせて $m=m_1+m_2 s$ とすればよい。

Q. E. D.

## 3 系

**系1．** $G$ は位数 $p$ の有向グラフで完全連結とする。$G$ に長さ $s$ の単純な閉路があれば

$$m\leq p+s(p-2)$$

なる正の整数 $m$ で $A^m\geq J$ を満足するものがある。

**証　明．** 定理の証明(3)⇒(1)において $m=m_1+m_2 s$ であり，さらに $m_1\leq p-s$ かつ $m_2\leq p-1$ を満たすようにとれることから示される。

Q. E. D.

**注　意．** 系1において，$G$ に互いに異なる点よりなる長さ $s$ の単純な閉路が $t$ 個あれば，最初に出発点からどれかの閉路に入ればよいので，$m_1\leq p-ts$ とできる。従ってこの場合 $m\leq p+s(p-t-1)$ となる。

一般に，既約な非負行列 $A$ は $A^m>0$ なる正の整数 $m$ があるとき，**原始的** (primitive) であるといわれる。$A^m>0$ となる最小の整数 $m$ を $\gamma(A)$ で表し，$A$ の**指数** (index) という。完全連結なグラフには少なくとも2個の単純な閉路があるはずだから，系1において $s\leq p-1$ とできる。従って次の系を得る。

**系2．** $p\times p$ 原始行列$A$に対して

$$\gamma(A)\leq p^2-2p+2$$

**系3．** $p\times p$ 原始行列 $A$ の対角要素が少なくとも $d$ 個が正のとき，

$$\gamma(A)\leq 2p-d-1$$

**証　明．** 注意において，$s=1$, $t=d$ とすればよい。

Q. E. D.

## 参 考 文 献


(1) M. ベサット，G. チャートランド，L. レスニヤック・ホスター，グラフとダイグラフの理論，共立出版，1981

(2) Y. Takenaka and G. Kitagawa, Complete connectivity of a graph, *Keio Engineering Report*, 31 (1978), 131-138

(3) H. Wielandt, Unzerlegbare, nicht negative matrizen, *Math. Z.*, 52 (1950), 642-648