二次元抵抗領域の抵抗値を与える母数の種々の電極配置相互間の関係

寺 門 龍 一, 荒 又 光 夫

Relations among Moduli for obtaining Resistances between Electrodes Variously Arranged on the Perimeter of the Two-dimensional Domain

Ryûiti TERAKADO and Mitsuo ARAMATA

Abstract: — In general, the resistance value between two electrodes attached on the perimeter of the resistance plate can be calculated by conformal mapping. In the first procedure of the calculation, the domain is mapped to a half-plane or a circle, and modulus corresponding to arrangement of electrodes is calculated. Next, the resistance value can be obtained as function of modulus in the tables of elliptic integrals. This modulus is invariant by conformal mapping. When electrodes are attached on the perimeter of the domain according to some rules, the relations between moduli for several different arrangement of electrodes are given in this paper. As an example, the relations are applied to a rectangular domain as follows. Two electrodes are attached on the opposite sides of a rectangle, and edges of electrodes are placed on the points by which each side is divided into four parts in equal length. If the modulus between electrodes attached on whole length of the opposite sides can be known, any modulus between electrodes arranged as stated above can be calculated by application of the relations.

---

1. まえがき

二次元抵抗領域の周辺に二電極を付けたときの電極間の抵抗値を計算する方法を，この集報に幾つか発表してきた。[(1)(2)(3)] それらの方法はいずれも，領域を半平面あるいは円に等角写像してだ円積分の母数を計算し，だ円積分表によって抵抗値を求めるものである。この母数は等角写像の不変量で電極をある規則に従って領域の周辺に付けるときには，その種々な電極配置の母数間にある関係が成立する。この論文ではそれら母数間に成立する関係式について述べている。またその応用として，長方形の対辺を四等分し，電極端がこの

分点のいずれかにくるように対辺上に両電極を付けた場合の母数を，対辺全部を電極としたときの母数から求める計算式を示す。この式は，一般にはだ円関数表によらなければ求め得ないものを直接与える。また，この論文で用いている母数は前記文献で用いた母数と異なっているので，この新しい母数の計算式を半平面と円の場合について付録に示した。

2. 抵抗値を与える母数

面抵抗率1の二次元抵抗領域の周辺に付けた二電極間の抵抗値は，領域をまず半平面に写像し，ついで長方形領域に電極が対辺にくるように写像する方法で計算される。その半平面と長方形との対応はだ円関数によって得られるが，その写像関数はただ一つのだ円関数に限られたものではなく，母数を異にする幾つかの写像の方法があり，そのいずれによっても同じ抵抗値が得られる。その中で一般的なものは次の二つである。

その一つは，図1（a）のように与えられた領域を電極が等長となるように半平面に写像して長方形との対応をとる方法で，長方形に写像する写像関数および抵抗値 R は

$$w=\mathrm{sn}z,\ R=\frac{2K(\bar{k})}{K'(\bar{k})}\quad\cdots\cdots(1)$$

であり，そのときの半平面の電極配置と母数 $\bar{k}$ とは図の関係にある。

他の一つは，同じ領域を半平面に写像する際に，図1（b）のように一電極が半無限長となるように写像する方法で，半平面と長方形との対応を与える写像関数および抵抗値は次式で表わされ，母数 k との関係は図に示される。

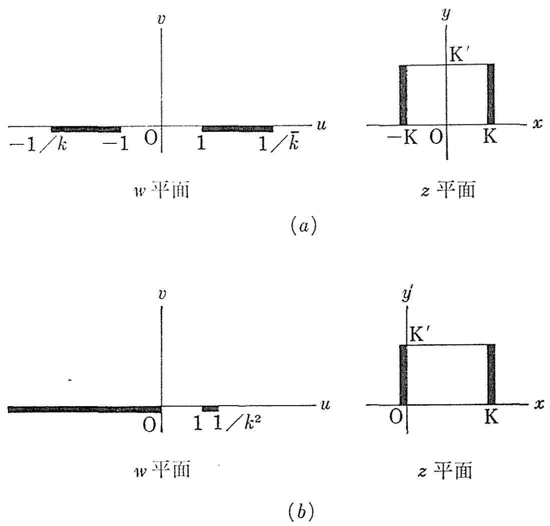


図1　抵抗値計算の二つの方法

$$w=\mathrm{sn}^2z,\quad R=\frac{K(k)}{K'(k)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

次に，電極配置を今電極でなかった部分を二電極とするものとし，そのときの抵抗値を R' とすれば，$RR'=1$ である。[4] この R' を与える上述二法それぞれの母数を $\bar{k}', k'$ とすると，まず第二の方法については，図1（b）の w 平面の電極でない部分を電極と考えたときの母数 k' は，付録の母数計算式によって

$$k'=\sqrt{1-k^2}$$

となり，k' は k の補母数の関係にあることを知る。また，第一法について第二法との関係を求めると，図1（a）の w 平面の電極配置を，第二の方法によって表わせば同じく付録の補母数の計算式に代入して

$$k'=\frac{1-\bar{k}}{1+\bar{k}}$$

となる。これらの関係をさらにまとめて次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}&k^2+k'^2=1\\&\left(\frac{1-\bar{k}}{1+\bar{k}}\right)^2+\left(\frac{1-\bar{k}'}{1+\bar{k}'}\right)^2=1\\&\bar{k}=\frac{1-k'}{1+k'}\ ,\quad \bar{k}'=\frac{1-k}{1+k}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

このように第二の方法の k と k' は母数と補母数の関係にあって相互の変換が容易であるのに対し，第一の方法の $\bar{k}$, $\bar{k}'$ の関係は簡単でなく，また母数 k の方が $\bar{k}$ よりも一般にはより簡易な計算式で求められ扱いに便利なので，以後は母数としてすべて第二の方法の k を用いる。したがって，抵抗値は常にその母数から $R=K/K'$ として得られる。

3.　母数相互間の関係

<3.1>　任意領域の場合

図2 (a) のように，任意領域の周辺に任意に付けた二電極 AB, CD のいずれか一方，たとえば AB をその上の任意の点 E で二つに分けるものとすると，図(b), (c) のような図 (a) と関連ある電極配置が考えられる。この，図 (a), (b), (c) おのおのの抵抗値を与える母数をそれぞれ図に示すように k_0, k_1, k_2 とすると次の関係がある。

$$k_0=k_1k_2\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(4) 式は次のようにして導かれる。抵抗値を与える母数は等角写像の不変量であるから，半平面領域に写像して関係式を求め，それを一般式とすることができる。与えられた図2 (a) の領域を半平面に写像し，図3に示すような電極配置が得られたとすると，図2 (a), (b), (c) の電極配置に対応する母数は次式で表わされる。(付録参照)

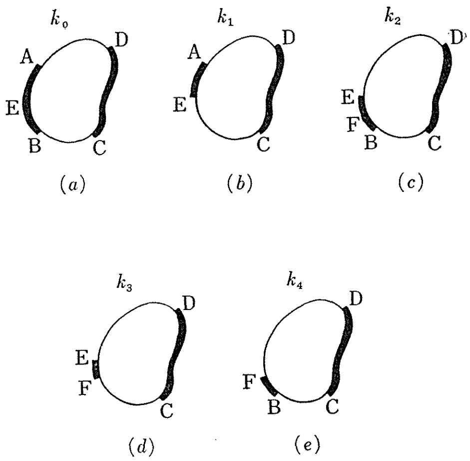


図 2　任意領域の場合の関係

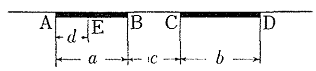


図 3　図 2 (a) の半平面への写像

$$\left.\begin{aligned}&k_0=\sqrt{\frac{c(a+b+c)}{(a+c)(b+c)}}\\&k_1=\sqrt{\frac{(a+c-d)(a+b+c)}{(a+c)(a+b+c-d)}}\\&k_2=\sqrt{\frac{c(a+b+c-d)}{(a+c-d)(b+c)}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(5) 式から直ちに (4) 式の関係が得られる。次に図2 (c) の電極 EB を図2 (d), (e) のようにさらに二つに分けるものとし，その母数をそれぞれ k_3, k_4 とすれば，(4) 式の関係を適用して

$$k_2=k_3k_4$$

したがって

$$k_0=k_1k_3k_4 \quad \cdots\cdots (6)$$

の関係が得られる。一般に一方の電極を n 個に分割し，その分けられたおのおのに $1\sim n$ の番号を付し，その i 番目だけを電極としたときの母数を k_i とすれば，もとの母数 k_0 は

$$k_0=\prod_{i=1}^{n} k_i \quad \cdots\cdots (7)$$

で表わされる。

この関係をさらに拡張すれば，一方の電極を m 個に，他方を n 個に分割し，その分けられたおのおのにそれぞそ $1\sim m$ および $1\sim n$ の番号を付し，それぞれ第 i 番目および第 j 番目だけを電極としたときの母数を k_{ij} とすれば，もとの母数 k_0 との間には

$$k_0=\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n} k_{ij} \quad \cdots\cdots (8)$$

の関係があることは容易に導き出せる。

＜3.2＞　線対称領域の場合

線対称領域に図4 (a) のように二電極ともそれ自身対称に配置されたものを基本とし，それと関連ある図 (b)～(e) を考え，図 (a)～(e) おのおのの抵抗値を与えるだ円積分の母数を図に示すように k_0, k_1, k_2, k_3, k_4 とする。まず前節の関係式をこの場合に適用して次の式が得られる。

$$k_0=k_1{}^2k_2{}^2=k_3{}^2 \quad \cdots\cdots (9)$$

また，抵抗値が 1:2 の関係を式に表わして

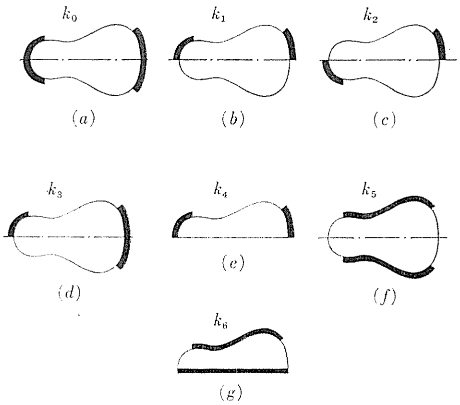


図 4　線対称領域の場合の関係

$$k_0=\frac{1-k'_4}{1+k'_4}\ ,\quad k_4=\frac{2\sqrt{k_0}}{1+k_0} \quad \cdots\cdots (10)$$

となり，さらに対称図形の性質から次の関係が求まる。

$$\left.\begin{array}{l} k_1'^2=k'_4\ ,\quad k_1{}^2=\dfrac{2k_0}{1+k_0} \\ k_2{}^2=\dfrac{1}{1+k'_4}=\dfrac{1+k_0}{2}\ ,\quad k_1=k_2k_4 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (11)$$

この (10), (11) 式の導出は，前節 (4) 式の誘導と同様な半平面への写像の方法によって容易になされる。また図4 (f) のように，図4 (a) の電極でない部分に電極を付けたときの母数を k_5，これを図 (g) のように二つに分けたときの母数を k_6 とすると (10) 式

と同様な次の関係が得られる。

$$k_5=k_0'=\frac{2\sqrt{k_6}}{1+k_6}\ ,\qquad k_5'=k_0=\frac{1-k_6}{1+k_6}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (12)$$

これら各式を組み合わせることによってさらに多くの関係式を導くことができるが，ここにはその基本式だけを示した。

＜3.3＞ 対称領域に複電極を付けた場合

線対称領域に一方の電極は前節同様それ自身対称に，他の電極は図5 (a) のように対称配置の二個で一電極を形成するように付けたものを基本とし，それと関連ある図 (b)～(f) を考え，図 (a)～(f) おのおのの抵抗値を与える母数を k_0～k_5 とする。この場合は前節と類似しているが，複電極であるため，前節の関係のすべては適用できず，この場合に成立する関係式は次式となる。

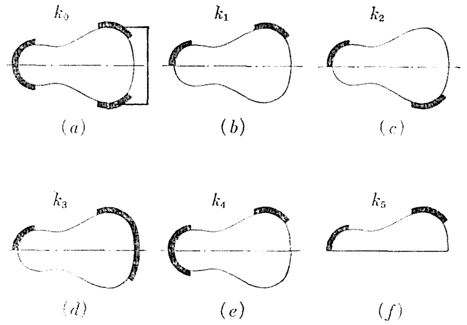


図 5 一方の電極が複電極の場合の関係

$$\left.\begin{array}{ll} k_0=\dfrac{1-k_5'}{1+k_5'}\ , & k_5'=k_1'k_3' \\ k_1=k_2k_5\ , & k_4=k_1k_2 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (13)$$

次に両電極とも図6 (a) のように複電極の場合には，図 (a)～(g) の母数を図のように定義して (14) 式が成立する。

$$\left.\begin{array}{ll} k_0=\dfrac{1-k_6'}{1+k_6'}\ , & k_1=k_2k_6 \\ k_6'=k_3'k_4'=k_1'k_5' & \end{array}\right\}\cdots\cdots(14)$$

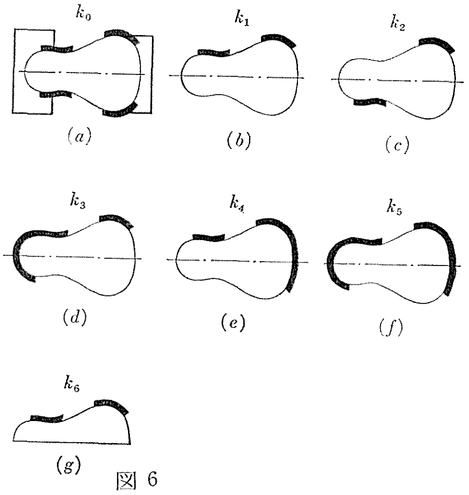


図 6
両電極とも複電極の場合の関係

4. 長方形領域への応用

以上の関係式の応用はいろいろな面に考えられるが，最も直接的な例として，長方形領域の一組の相対する辺をおのおの四等分し，電極端がこの五つの分点のいずれかにくるように両電極をそれぞれ対辺上に付けた図7のような場合の母数の計算に適用する。この電極配置は全部で31種得られるが，そのすべての母数をその中の一つである長方形の対辺全部に電極を付けたときの母数 k の値から，以上の関係式を適宜用いることによって正確に計算することができる。その方法によって得られた計算式を図7に示す。ただし，図中の記号は次の式を表わす。

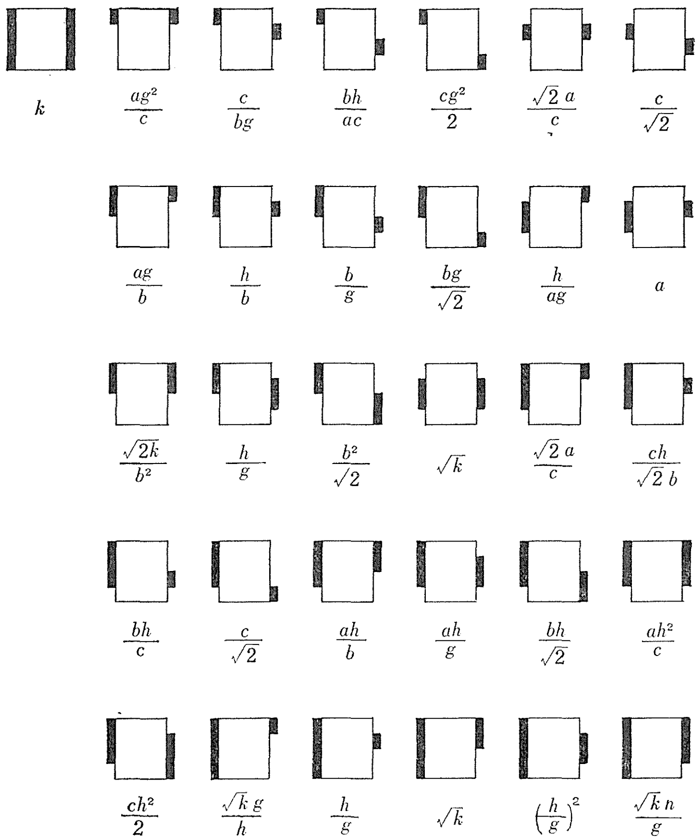


図 7　　長方形対辺上の種々の電極配置の母数

$$\left.\begin{array}{l} a=\sqrt{\sqrt{k}}\ ,\quad b=\sqrt{\sqrt{1+k}}\ ,\quad c=\sqrt{1+\sqrt{k}}\ ,\quad d=\sqrt{1-\sqrt{k}} \\ g=\sqrt{\sqrt{1+k}+1-\sqrt{k}}\ ,\quad h=\sqrt{\sqrt{1+k}-1+\sqrt{k}}\ \ (gh=\sqrt{2}\,a) \end{array}\right\}$$

この計算は普通はだ円関数を利用して行なうものであるが，この方法では，だ円積分表を用いないで簡単な算式で直接求めることが可能である。

5. む す び

種々の電極配置の母数間の関係について述べたが，それはだ円関数の本質に関連あるものと考えられ，その一面を見ているのであろうか。したがって，さらに多くの関係を見い出すことも可能であろうし，母数の性質を体系的にまとめることも可能であろう。この論文がその方向への第一歩であれば幸いである。

参　考　文　献

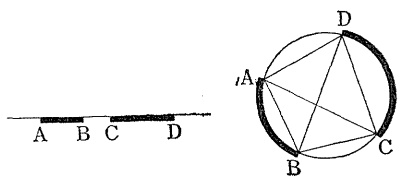
(1) 荒又，寺門； 茨城大学工学部研究集報，第13巻（昭41） p. 79
(2) 荒又，寺門； 茨城大学工学部研究集報，第14巻（昭42） p. 11
(3) 荒又，寺門，安納； 茨城大学工学部研究集報，第15巻（昭42） p. 43
(4) 荒又，寺門； 電気学会雑誌，87巻（昭42） p. 1994

付　録

半平面と円の場合の母数計算法

すでに発表した抵抗値計算法の文献[(1)(2)(3)]では，いずれも抵抗値を与える母数として第2章に述べた $\bar{k}$ を用いており，抵抗値は $R=2K/K'$ として得られるが，この論文では抵抗値が $R=K/K'$ で得られる母数を採用しているので，この母数および補母数の計算式を半平面と円の場合について文献（1）で求めたのと同様の方法で導き，それをまとめた結果，半平面と円の場合に限り，どちらにも共通な計算法が存在することを見い出した。

半平面および円の周辺の二電極を付図1のように順に AB, CD とする。そのとき，電極の四つの端点 A, B, C, D を結ぶ6本の線分長，すなわち両電極の隣り合わない端点間の距離 $\overline{AC}$，$\overline{BD}$，両電極の隣り合う端点間の距離 $\overline{AD}$，$\overline{BC}$ およびそれぞれの電極端間の距離 $\overline{AB}$，$\overline{CD}$ を用いて，母数 k，補母数 k' は次の式で計算される。



付図 1　母数計算説明図

$$k^2=\frac{\overline{AD}\cdot\overline{BC}}{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}, \quad k'^2=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}$$

この式が $k^2+k'^2=1$ を満足することは初等幾何の定理から明らかである。