異径管路における圧力変動の研究
（第2報　インピーダンス法による検討）

吹田　年*，川又正昭*，中島信行**

（昭和52年9月6日受理）

Study on Pressure Variation in Series Pipe Systems
(2 nd Report, An Investigation by the Impedance Method)

MINORU SUITA, MASAAKI KAWAMATA and NOBUYUKI NAKAJIMA

Abstract:—Our study on pressure variation in the series pipe systems neglecting the losses was discussed in the first report. In this paper we deal with the pressure variations in the series pipe systems by the impedance method. Dimensionless impedances for the series systems are calculated assuming that the down stream end of the systems are opened to the atmosphere, and the initial pressure variations are transmitted to the up stream end of the systems. At first, the values of the calculculated impedances in lower angular frequencies by a digital computer, are confirmed experimentally. The calculated results are in approximate agreement with the experiments. Subsequently, the impedances for the various series systems which have a constant total length of 500 m and consist of two parts having different length and different diameter, are calculated dy a digital computer, changing the angular frequency over a wide range. These results are shown with the dimensionless impedance vs. dimensionless anguler frequency diagrams. Some dangerous cases are found in these diagrams.

1. まえがき

第1報[1]において異径管路の圧力変動を管路の損失を無視できるものとして検討した。本報においては管摩擦損失を考慮したインピーダンス法[2]によりさらに巾広い管路条件を設定し検討した。すなわちインピーダンス法により異径管路に適用すべき一般式を求め，これを実験により検討したところ両者はほぼ一致した。次にやや一般の管路条件として全長500mの異径管路を設定し，これが第1，第2の直径の異なる管路部分より成立っているものと考え，各々の部分の長さの比と，直径の比をかえ，また管路の一端に加える圧力変動の振動数を変化させ，電子計算機により管内の数点に対する流体インピーダンスを求めた。これらの結果は流体インピーダンス—周波数曲線として表示した。これらの曲線の中には危険と考えられる状態が表われている。

2. 理論式

インピーダンス法は定常的振動をともなう管内流れの計算に対してすぐれた方法であることはよく知られている。ここでは説明の都合上まず簡単にインピーダンス法にふれ，つぎに異径管路に対する計算について述べる。

2.1 インピーダンス法の理論

水撃に対する管摩擦損失を考慮した運動方程式および

* 茨城大学工学部機械工学科（日立市中成沢町）
** 石川島播磨重工業株式会社（東京都港区佃島）

連続式は，偏微分を添字で表わすとそれぞれ次式で表わされる。

$$H_x+\frac{1}{gA}Q_t+\frac{fQ^n}{2gDA^n}=0 \quad \cdots\cdots (1)$$

$$Q_x+\frac{gA}{a^2}H_t=0 \quad \cdots\cdots (2)$$

ここで，xは管軸にそった座標，tは時間，Dは管の直径，Aは管の断面積，aは圧力波の伝ぱ速度，Hは水頭，Qは流量，gは重力の加速度をそれぞれ表わす。水頭Hについて，平均圧力水頭$\overline{H}$と変動成分h'の和で表わす。Qについても同様に表わす。すなわち，

$$\left.\begin{array}{ll} H_x=\overline{H}_x+h'_x, & Q_x=\overline{Q}_x+q'_x \\ H_t=\overline{H}_t+h'_t, & Q_t=\overline{Q}_t+q'_t \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (3)$$

定常状態に対しては，

$$\overline{Q}_x=\overline{Q}_t=\overline{H}_t=0 \quad \cdots\cdots (4)$$

式(1)，(2)，(3)，(4)より任意の位置における水頭および流量の変動成分は次式のように求められる。

$$h'(x,\ t)=H(x)\,e^{i\omega t}$$
$$=H_R\cosh\gamma x-Q_R Z_C\sinh\gamma x \quad \cdots\cdots (5)$$

$$q'(x,\ t)=Q(x)\,e^{i\omega t}$$
$$=-\frac{H_R}{Z_C}\sinh\gamma x+Q_R\cosh\gamma x \quad \cdots\cdots (6)$$

ここで添字Rは管路の上流端を表わし，ωは角振動数を表わす。iは虚数単位である。Z_Cは管路の特性インピーダンスを表わし，式(9)で定義される。流体インピーダンスは水頭の変動成分h'と流量の変動成分q'の比として次式で定義される。

$$Z(x)=\frac{h'(x,\ t)}{q'(x,\ t)} \quad \cdots\cdots (7)$$

流体インピーダンスは，位相角をϕqとする次式で表わされる。

$$Z(x)=|Z(x)|\,e^{i\phi q} \quad \cdots\cdots (8)$$

式(5)，(6)における管路の特性インピーダンスZ_Cは次式で定義される。

$$Z_C=\frac{\gamma a^2}{i\omega gA}=\frac{a^2}{\omega gA}(\beta-i\alpha) \quad \cdots\cdots (9)$$

ここでγは複素定数で次式で示される。

$$\gamma^2=(\alpha+i\beta)^2$$

$$=\omega\frac{gA}{a^2}\sqrt{\left(\frac{\omega}{gA}\right)^2+R^2}\ \exp\left[i\left(\pi-\tan^{-1}\frac{RgA}{\omega}\right)\right] \cdots (10)$$

ここでα，βは実定数であり，Rは線形化された管路の単位長さ当りの抵抗で乱流に対しては，nを速度の指数($n=2$)，fをワイスバッハの摩擦係数とするとき次式で表わされる。

$$R=nf\overline{Q}^{(n-1)}/2gDA^n \quad \cdots\cdots (11)$$

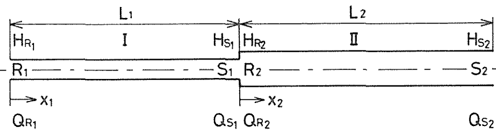
Fig.1に示すような管路Ⅰ，管路Ⅱから成る異径管路を考える。R_1は上流端を，S_2は下流端を示す。この管路で下流端を大気に開放し，上流端で流量変動を与えるとすれば端末条件は次のようになる。

$$Q_{R1}=Q(o)\,e^{i\omega t},\ H_{S2}=0 \quad \cdots\cdots (12)$$

異径点における接続条件は，

$$H_{R2}=H_{S1},\quad Q_{R2}=Q_{S1} \quad \cdots\cdots (13)$$

これらの条件を用い管路Ⅰおよび管路Ⅱの任意の位置における圧力変動および流量変動の式を，式(5)，(6)，(12)，(13)より計算した結果の諸式を得た。



Fig．1. Series system.

$$h'(x_1)=Q_{R1}\frac{Z_{C2}\tanh\gamma L_2+Z_{C1}\tanh\gamma L_1}{\frac{Z_{C2}}{Z_{C1}}\tanh\gamma L_2\tanh\gamma L_1+1}$$
$$\times\cosh\gamma x_1-Q_{R1}Z_{C1}\sinh\gamma x_1 \quad \cdots\cdots (14)$$

$$q'(x_1)=Q_{R1}\cosh\gamma x_1$$
$$-Q_{R1}\frac{Z_{C2}\tanh\gamma L_2+Z_{C1}\tanh\gamma L_1}{Z_{C1}+Z_{C2}\tanh\gamma L_2\tanh\gamma L_1}\sinh x_1$$
$$\cdots\cdots (15)$$

$$h'(x_2)=\frac{Q_{R1}Z_{C2}}{\frac{Z_{C2}}{Z_{C1}}\tanh\gamma L_2\sinh\gamma L_1+\cosh\gamma L_1}$$
$$\times(\tanh\gamma L_2\cosh\gamma x_2-\sinh\gamma x_2) \cdots (16)$$

$$q'(x_2)=\frac{Q_{R1}}{\frac{Z_{C2}}{Z_{C1}}\tanh\gamma L_2\sinh\gamma L_1+\cosh\gamma L_1}$$

$$\times(\cosh\gamma x_2-\tanh\gamma L_2\sinh\gamma x_2)\ \cdots\cdots(17)$$

ここで，L_1，L_2 は管路Ⅰ，Ⅱの長さを，Z_{C1}，Z_{C2} は管路Ⅰ，Ⅱの特性インピーダンスを表わす。流体インピーダンスは式(7)の関係により $Z(x_1)$，$Z(x_2)$ のように求める。

2.2 異径管路に対する無次元式

2.2.1 単一管路に対する無次元式

単一管路に対し次の無次元量を定義する。

$$\left.\begin{aligned}&x'=\frac{x}{L},\quad t'=\frac{t}{2L/a},\quad v=\frac{V}{V_o},\ \omega'=\frac{\omega}{\omega_A}\left(\mathrm{or}=\frac{\omega}{\omega_F}\right)\\&h_*=\frac{H}{H_o},\quad q_*=\frac{Q}{Q_o},\quad \omega_F=\frac{2\pi}{4\Sigma\frac{L}{a}}\end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

ここで，Lは管路長さ，V_oは定常状態での流速，H_o，Q_oはそれぞれ定状態における水頭，流量を表わす。ω_A はみかけの角振動数を表わし，異径管を単一な管とみなした場合の振動数に相当し，太い方の管を上流に置く場合とこれに反対の場合とでは異なり，実験的に求める。ω_F は理論角振動数である。単一管路の場合は$\omega_F=\omega_A$ である。

無次元化された運動方程式，連続式は式(18)を式(1)，(2)に代入し，次のように求められる。

$$h'_{*x'}+\frac{aV_o}{2gH_o}q'_{*t'}+f\frac{L}{D}\frac{V_o^2}{gH_o}q'_*=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

$$q'_{*x'}+\frac{gH_o}{2aV_o}h'_{*t'}=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

ここで，$h'_*=h'/H_o$，$q'_*=q'/Q_o$ である。式(19)，(20)における係数を次のように表わす。

$$B=\frac{gH_o}{aV_o},\qquad h_{fo}=f\frac{L}{D}\frac{V_o^2}{gH_o}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

B，h_{fo} は何れも無次元であり，h_{fo} は管路の定常状態の損失水頭を無次元化したものである。式(21)により，式(19)，(20)は，

$$h'_{*x'}+\frac{1}{2B}q'_{*t'}+h_{fo}q'_*=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

$$q'_{*x'}+\frac{B}{2}h'_{*t'}=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

式(22)，(23)を解いた結果，

$$\gamma'^2=(\alpha'+i\beta')^2=\omega'\left(-\frac{\omega'}{4}+iR'\right)\ \cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

$$R'=\frac{Bh_{fo}}{2}$$

$$(\alpha'+i\beta')^2=\omega'\sqrt{\left(\frac{\omega'}{4}\right)^2+R'^2}\ \exp\left[i\left(\pi-\tan^{-1}\frac{4R'}{\omega'}\right)\right]\ \cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

$$\alpha'=\sqrt{\omega'}\left[\left(\frac{\omega'}{4}\right)^2+R'^2\right]^{1/4}\sin\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{4R'}{\omega'}\right)\ \cdots\cdots(26)$$

$$\beta'=\sqrt{\omega'}\left[\left(\frac{\omega'}{4}\right)^2+R'^2\right]^{1/4}\cos\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{4R'}{\omega'}\right)\ \cdots\cdots(27)$$

$$Z'_C=\frac{2\gamma'}{iB\omega'}=\frac{2}{B\omega'}(\beta'-i\alpha')\ \cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

$$\begin{aligned}h'_*(x',t')&=H'(x')\,e^{i\omega't'}\\&=H'_R\cosh\gamma'x'-Q'_RZ'_C\sinh\gamma'x'\ \cdots(29)\end{aligned}$$

ここで，$H'_R=H_R/H_o$，$Q'_R=Q_R/Q_o$

$$\begin{aligned}q'_*(x',t')&=Q'(x')\,e^{i\omega't'}\\&=-\frac{H'_R}{Z'_C}\sinh\gamma'x'+Q'_R\cosh\gamma'x'\ \cdots(30)\end{aligned}$$

の式がそれぞれ得られる。無次元インピーダンス$Z'(x')$は式(29)，(30)の比として求められる。

2.2.2 異径管路に対する無次元式

異径管路に対する無次元式は2.2.1節の方法により，2.1節と同様の計算を行って次のように求められる。

$$h'_*(x'_1)=Q'_{R1}\frac{Z'_{C2}\tanh\gamma'_2+Z'_{C1}\tanh\gamma'_1}{\frac{Z'_{C2}}{Z'_{C1}}\tanh\gamma'_2\tanh\gamma'_1+1}$$

$$\times\cosh\gamma'_1x'_1-Q'_{R1}Z'_{C1}\sinh\gamma'_1x'_1\ \cdots\cdots(31)$$

$$q'_*(x'_1)=Q'_{R1}\cosh\gamma'_1x'_1-Q'_{R1}$$

$$\times\frac{Z'_{C2}\tanh\gamma'_2+Z'_{C1}\tanh\gamma'_1}{Z'_{C1}+Z'_{C2}\tanh\gamma'_2\tanh\gamma'_1}\sinh\gamma'_1x'_1$$

$$\cdots\cdots(32)$$

$$h'_*(x'_2)=\frac{Q'_{R1}Z'_{C2}}{\frac{Z'_{C2}}{Z'_{C1}}\tanh\gamma'_2\sinh\gamma'_1+\cosh\gamma'_1}$$

$$\times(\tanh\gamma'_2\cosh\gamma'_2x'_2-\sinh\gamma'_2x'_2)\ \cdots(33)$$

$$q'_*(x'_2)=\frac{Q'_{R1}}{\dfrac{Z'_{C2}}{Z'_{C1}}\tanh\gamma'_2\sinh\gamma'_1+\cosh\gamma'_1}$$

$$\times(\cosh\gamma'_2x'_2-\tanh\gamma'_2\sinh\gamma'_2x'_2)\cdots(34)$$

ここで，γ'_1，γ'_2 は管路I，IIに対する伝ぱ定数(複素数)，Z'_{C1}，Z'_{C2}はそれぞれの管路に対する特性インピーダンスを表わす。これらの量に含まれるB，h_{fo}は管路I，IIに対しそれぞれ次のようになる。

$$B_1=\frac{gH_o}{a_1V_{o1}},\qquad h_{f1}=f_1\frac{L_1}{D_1}\frac{V_{o1}^2}{gH_o}\qquad\cdots\cdots(35)$$

$$B_2=\frac{gH_o}{a_2V_{o2}},\qquad h_{f2}=f_2\frac{L_2}{D_2}\frac{V_{o2}^2}{gH_o}\qquad\cdots\cdots(36)$$

V_{o1}，V_{o2} は管路I，IIにおける定常状態における流速を表わす。無次元流体インピーダンスは管路I，IIに対し次のように求められる。

$$Z'(x'_1)=\frac{h'_*(x'_1)}{q'_*(x'_1)}\qquad\cdots\cdots(37)$$

$$Z'(x'_2)=\frac{h'_*(x'_2)}{q'_*(x'_2)}\qquad\cdots\cdots(38)$$

3. 実験装置

Fig. 2は実験装置を示す概略図である。水は上部タンクH_1より異径管路I，IIを通り下部タンクH_2に落ちる。管路には圧力ピックアップP_1〜P_6 が取付けられている。管路の上流部にRPで示す往復ポンプが接続されており，異径管路に脈動流を発生させる。管路の流量は電磁流量計により測定した。圧力は動歪計を通じ電磁流量計と共に記録計に記録した。異径管路は管路Iに対し内径50㎜の管を，管路IIに対しては内径80㎜のものを使用した。Fig. 3は脈動流発生装置の写真である。

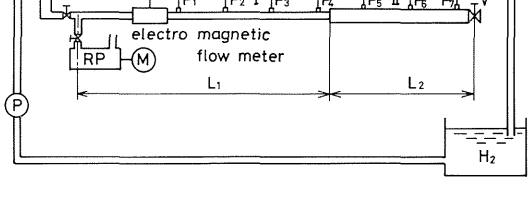


Fig. 2. Experimental arrengement.

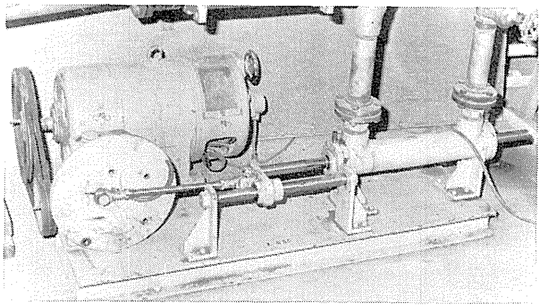


Fig. 3. Reciprocating pump for generating pressure pulse.

4. 実験結果

まず**2.2.2** 節に述べた異径管路に対する無次元式の検討を行った。Fig. 4は縦軸に無次元流体インピーダンスの絶対値$|Z'|$をとり，横軸に管路長さx_1/L_1とx_2/L_2

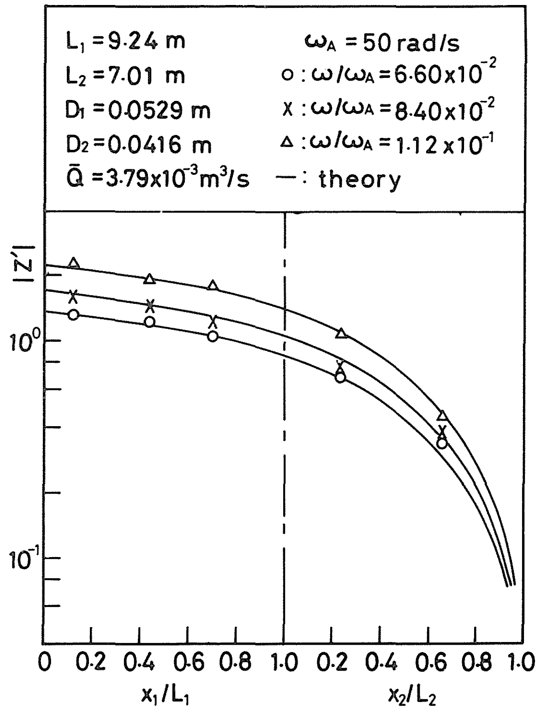


Fig. 4. Calculated impedances to experimental results for $L_1=9.24\,m$, $L_2=7.01\,m$.

をとって表わしてある。みかけの振動数ω_Aは実験から求めたものである。○，×，△はそれぞれの振動数の場合の実験点を表わし，曲線は前記の理論により電子計算機で計算した結果を示す。両者はかなりよく一致する。Fig. 5はFig. 4の場合とほとんど同じ管路で角振動数を

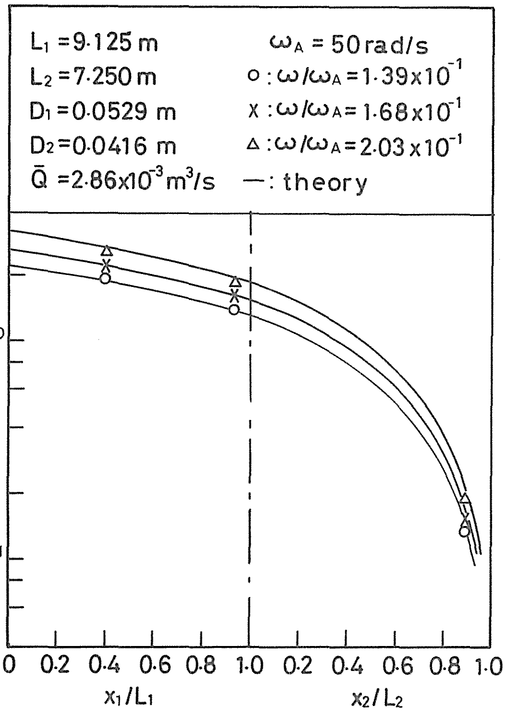


Fig. 5. Calculated impedances to experimental results for $L_1 = 9.125\,m$, $L_2 = 7.25\,m$.

大きくし実験した結果である。Fig. 6は管路IIに内径80.7 mm のものを用いた場合である。実験結果と計算結果はよく一致している。

次に一般の管路の場合を検討するため，前述の式を用い，管路寸法を設定し計算により結果を求めた。次に設定した条件を示す。

(1)　異径管路の全長一定，$L_1 + L_2 = 500\,m$

(2)　異径点の位置は次の４通りと考えた。

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1}$$

(3)　管路内の内径，$D_1 = 4''$，$D_2 = 5''$，$6''$，$8''$

(4)　理論角周波数，$\omega_F = 2\pi / 4\Sigma \dfrac{Li}{ai}$

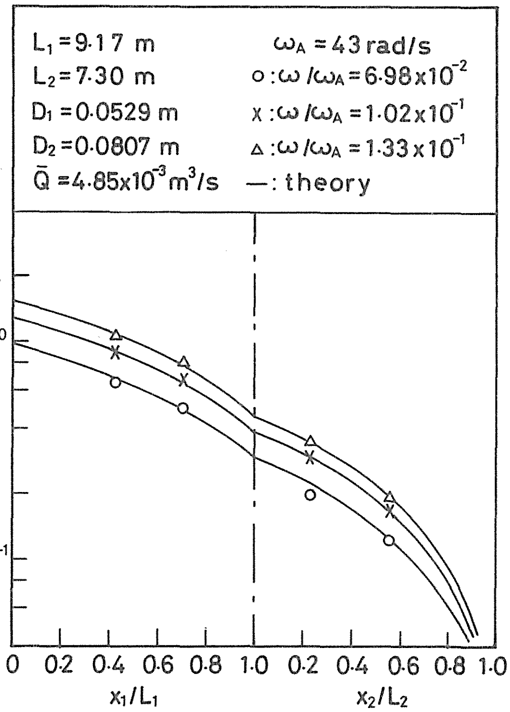


Fig. 6. Calculated impedances to experimental results for $L_1 = 9.17\,m$, $L_2 = 7.30\,m$, $D_2 = 0.0807\,m$.

平均流量，　$V_{01} = 2\,m/s$

流量変化の割合い，平均流量の１０％

(5)　使用した無次元パラメーター，上記の諸量を用い，無次元パラメーターには*Table* 1の諸量を使用した。以下この表の区分により，*Case* 1，2，… と呼ぶ。

(6)　管路I，IIにおける計算位置と図示に用いた曲線は*Table* 2にこれを示す。

上記条件に従って電子計算機による計算を行ない，*Table* 1に示す*Case* 1～8の場合につき，無次元流体インピーダンスの絶対値$|Z'_{x_1}|$，$|Z'_{x_2}|$とω/ω_Aとの関係を求めた。その結果をFig. 7～Fig. 14に示す。図中の曲線の種類は*Table* 2に示す区分により表わされている。

Fig. 7～Fig. 14に示したところを要約すると，

(1)　設定した条件の範囲内において，管路Iでは管路寸法の組合せに関係なくω/ω_Aの２～３付近において第１次の共振状態を生じている。このとき$|Z'_{x_1}|$

Table 1. List of dimensionless parameters.

Case	$B_1 \times 10^2$	h_{f1}	$B_2 \times 10^2$	$h_{f2} \times 10$
1	2.8	0.806	4.4	11.32
2	2.8	0.806	5.7	2.59
3	3.5	1.28	5.6	6.73
4	3.5	1.28	9.7	1.14
5	4.3	1.59	7.7	3.72
6	4.3	1.59	14.4	0.51
7	5.0	1.81	7.9	1.59
8	5.0	1.81	18.6	0.20

Table 2. Curves indicating positions.

Curves	Positions
———————	$x_1/L_1, x_2/L_2 = 0$
——— – ———	$x_1/L_1, x_2/L_2 = 0.2$
——— – – ———	$x_1/L_1, x_2/L_2 = 0.4$
——— – – – ———	$x_1/L_1, x_2/L_2 = 0.6$
—— – – – – ——	$x_1/L_1, x_2/L_2 = 0.8$
—— – – – – – ——	$x_1/L_1, x_2/L_2 = 1.0$

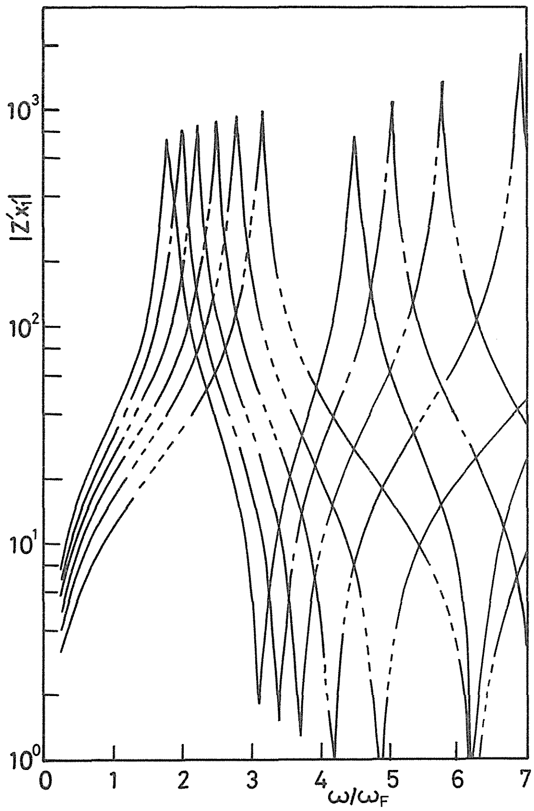


Fig. 7(a) Impedances for the case 1 at the pipe line I.

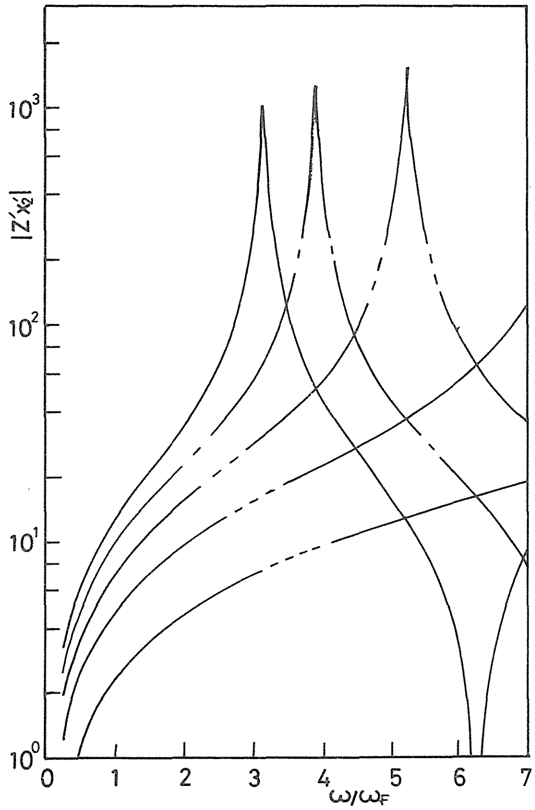


Fig. 7(b) Impedances for the case 1 at the pipe line II.

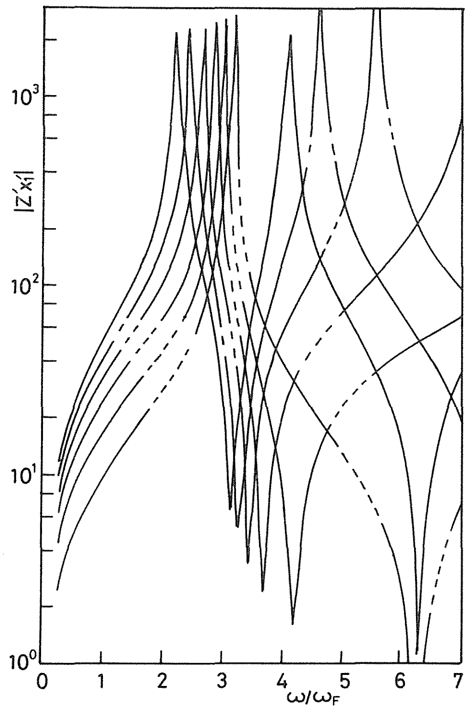


Fig. 8(a) Impedances for the case 2 at the pipe line I.

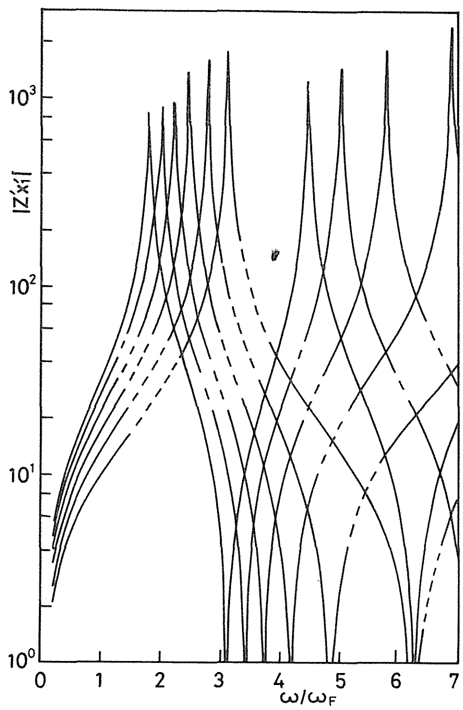


Fig. 9(a) Impedances for the case 3 at the pipe line I.

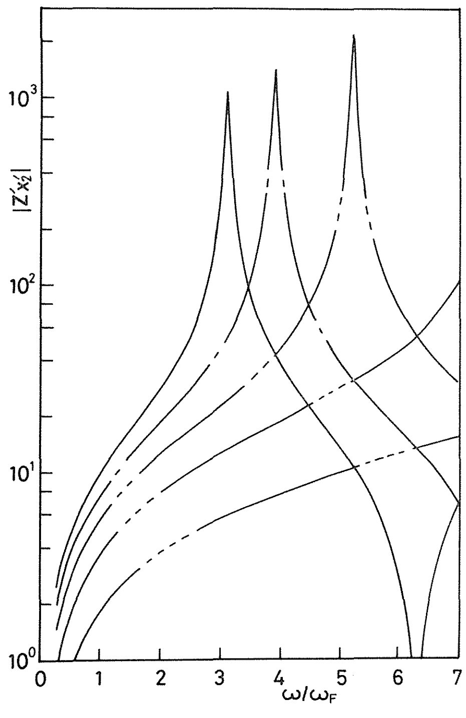


Fig. 8(b) Impedances for the case 2 at the pipe line II.

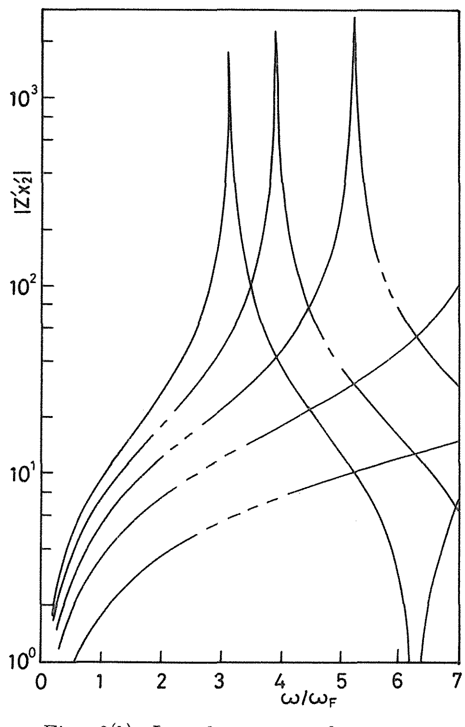


Fig. 9(b) Impedances for the case 3 at the pipe line II.

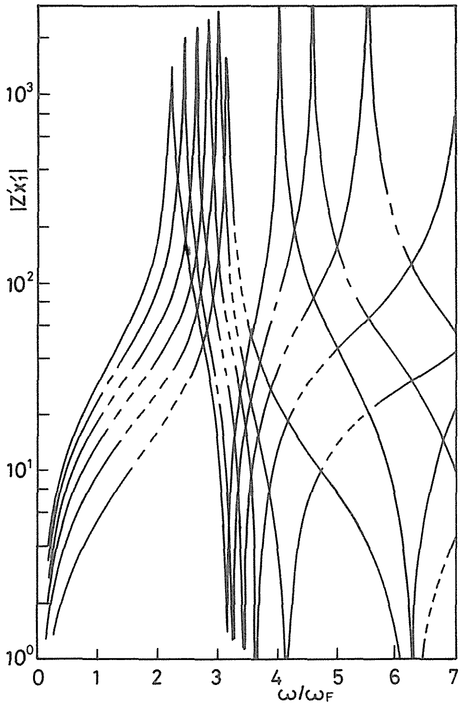


Fig. 10(a)　Impedances for the case 4 at the pipe line I.

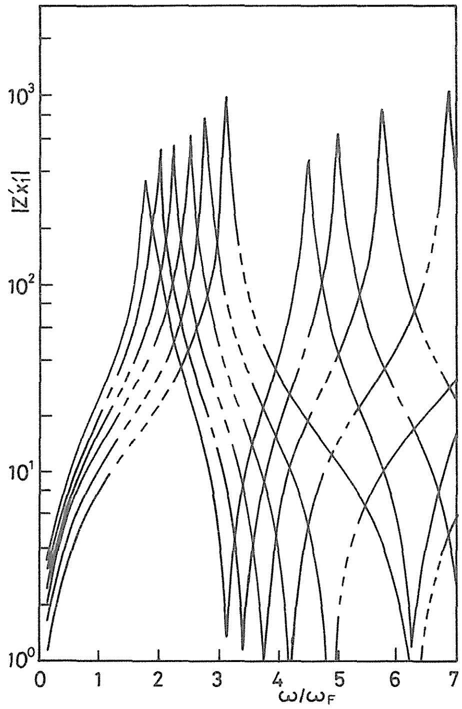


Fig. 11(a)　Impedances for the case 5 at the pipe line I.

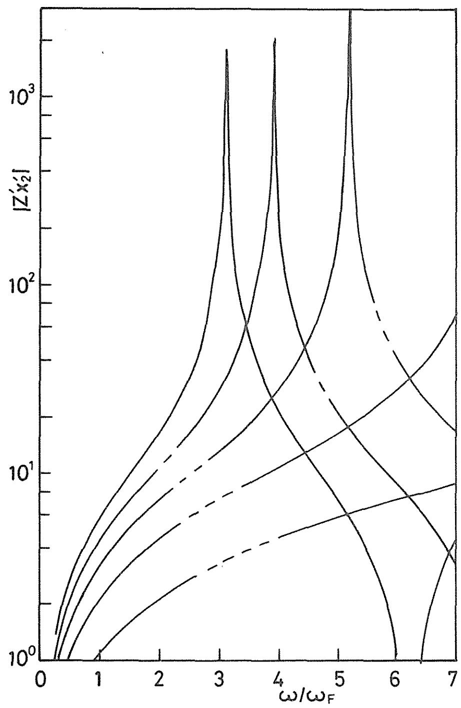


Fig. 10(b)　Impedances for the case 4 at the pipe line II.

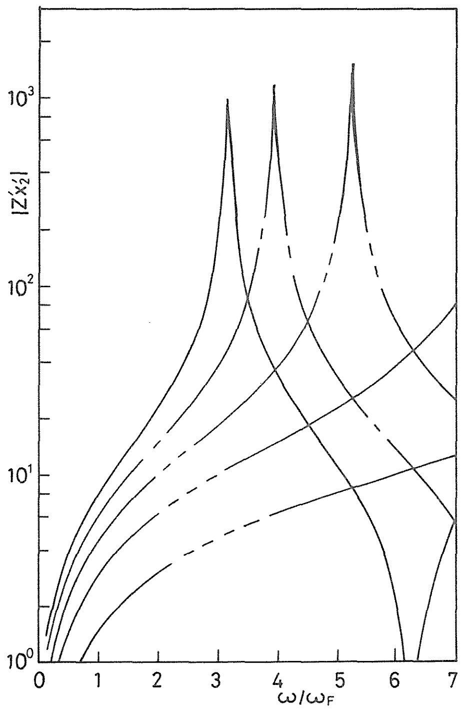


Fig. 11(b)　Impedances for the case 5 at the pipe line II.

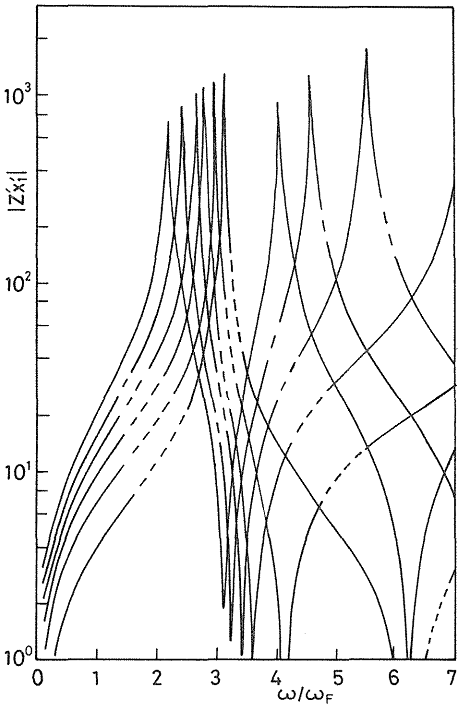


Fig. 12(a) Impedances for the case 6 at the pipe line I.

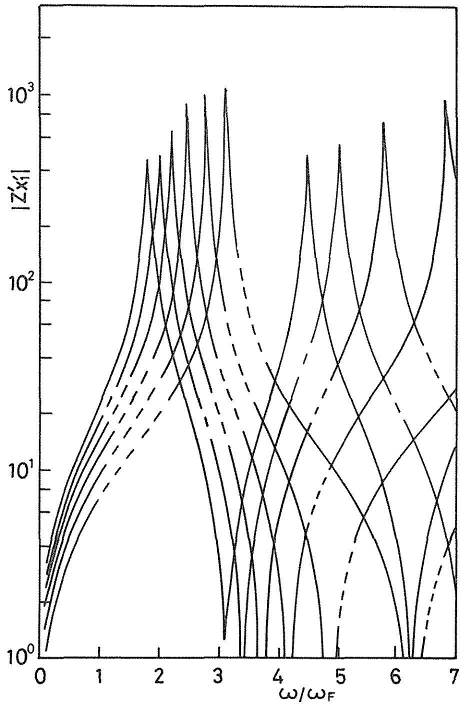


Fig. 13(a) Impedances for the case 7 at the pipe line I.

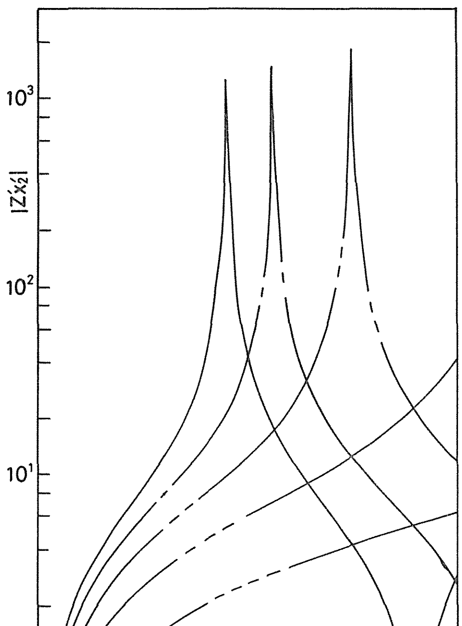


Fig. 12(b) Impedances for the case 6 at the pipe line II.

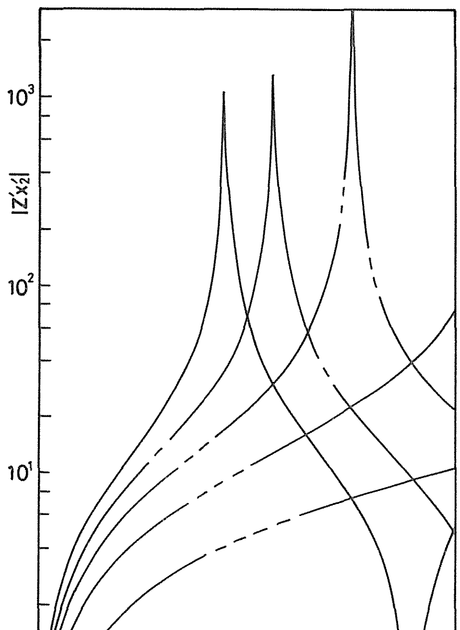


Fig. 13(b) Impedances for the case 7 at the pipe line II.

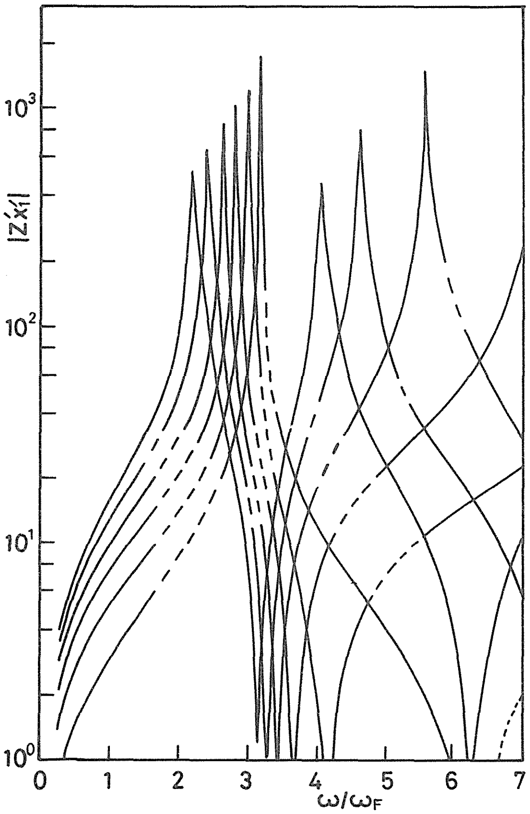


Fig . 14(a) Impedances for the case 8 at the pipe line Ⅰ.

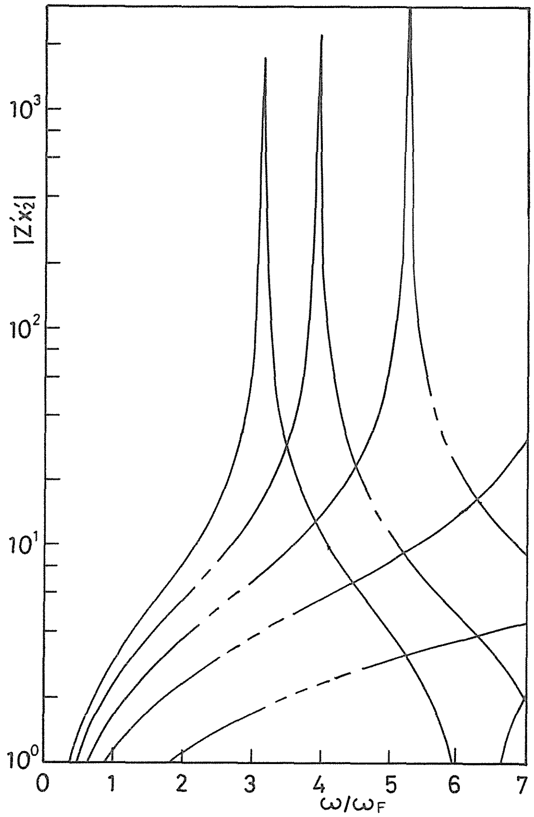


Fig. 14(b) Impedances for the case 8 at the pipe line Ⅱ.

は 10^3 程度である。

(2) 管路Ⅰにおいて第1次の共振状態の約2倍の ω/ω_F 4～7 付近において第2次の共振状態を生ずる。この場合の $|Z'_{x'_1}|$ は第1次のものより大きくなる。

(3) $|Z'_{x'_1}|$ は無次元位置 x_1/L_1 が大きい程大きい。また x_1/L_1 が変れば第1次の共振を起す ω/ω_F は変化する。

(4) 管路Ⅱにおいては，本研究の設定条件の範囲内では，ω/ω_F の3～5でかつ，x_2/L_2 の0～0.4 で第2次の共振状態を生じ，$|Z'_{x'_2}|$ の数値は $|Z'_{x'_1}|$ の場合と同じく 10^3 程度である。

(5) 管路Ⅱで生ずる共振状態は，管路Ⅰの共振状態が $x_1/L_1=1$ で表わされているのに続き，あたかも管路Ⅰ，Ⅱが同一直径で接続されている場合の，x_1/L_1 が1を超えた場合に似て生じている。

(6) 管路Ⅰ，Ⅱの長さの和すなわち全長が等しいときは，各々の管路の長さが変化しても，共振状態に与える影響は小さくほぼ同じ ω/ω_F で共振状態を生ずる。

(7) Fig. 7～Fig. 14 は無次元表示されているが，ここで無次元化しない生の数値例をあげれば，$L_1=100m$，$L_2=50m$，$D_1=0.0529m$，$D_2=0.0807m$ の場合，$\omega=5\,rad/s$ で，$h'_{x_1=0}=6.78\,mAq$ であるのに対し，$\omega=15\,rad/s$ の場合は，$h'_{x_1=0}=357\,mAq$ である。また $\omega=30\,rad/s$ の場合は，$h'_{x_1=0}=1.05\,mAq$ であり，もしこれを基準にとれば，$\omega=15\,rad/s$ では $h'_{x_1=0}$ は350倍に相当する。キャビテーションの問題もあり，また計算と実際との一致について問題を残しているが，設計に当っては充分配慮しなければならない点である。

5. むすび

以上述べたところを要約すると，

(1) 異径管路の管Ⅰ，管Ⅱに対する無次元インピーダンスは式(37)，式(38)で示される。
(2) 本研究の実験範囲で式(37)，式(38)は実験結果と一致する。
(3) 異径管路では加わる水頭変動の数百倍にも達する水頭変動を生ずることがあるから，管路設計に当っては充分な配慮をする必要がある。

終りに臨み本研究を進めるに当って熱心に協力された卒業研究の学生諸君に謝意を表します。

参考文献

1) 吹田・佐野川，川又：茨城大学工学部研究集報，第25巻，（昭52）
2) V.L. Streeter, Hhdraulic Transients. McGRAW−HILL (1967), 101
3) 秋元，水撃作用と圧力脈動，日本工業新聞社（昭47）
4) 市川，高山：日本機械学会論文集，39−325（昭48−9），2807
5) F.B.Wylie, Trans ASME, J−Basic.Eng, 87−4 (1965−12), 960