特殊な多角形を接合した領域の周辺二電極間の正確な抵抗

荒 又 光 夫*, 寺 門 龍 一*

(1971年 9 月 8 日受理)

Exact Resistance Values between two Electrodes attached specially on the Perimeter of the Domain composed of some particular Polygons

Mitsuo ARAMATA and Ryûiti TERAKADO

Abstract: — There are cases that some special points on the perimeter of particular polygon can be easily transformed into definite points on the perimeter of a circle, satisfying the condition of conformal representation between both the domains. Then, the circle can be transformed into a semicircle or a sector with corresponding points to the above mentioned points. A domain composed of the above mentioned polygons can be transformed into a circular domain composed of the above mentioned semicircles or sectors. Thus, the special points on the perimeter of the polygonal resistive plate can be transformed into definite points on the perimeter of a circular resistive plate. From this fact, the resistance between two electrodes ending at any special points of the composed polygonal resistive plate, is the one between two electrodes ending at the corresponding points on the circular resistive plate which can be easily calculated. By these manipulations, the number of kinds of arrangements of two electrodes, as such that the resistance between them exactly calculable, can be multiplied. Moreover, special doubly-connected domains are described.

1. はじめに

任意の形の領域と円領域（半平面領域）との間には理論的に等角写像関数が無限にあることを Riemann が証明した。しかし，その関数をあからさまに得るのはむずかしいことが多い。著者らの研究は，抵抗領域のへりに付けた二電極間の抵抗値を求めることにあるから，二つの領域のへりの各点の間の対応を知ることで足りる。ところが，双方のへりのあらゆる点の一対一対応を求めることも一般には困難である。しかし，特殊な多角形のへ

* 茨城大学工学部電気工学科

りの特別な点に対応する円周上の点は容易に知られる場合があり，その性質に基づく抵抗計算法はすでに述べた。[1]

この論文では，そのような特殊な多角形の複数個を結合したもっと複雑な形の領域のへりに，前述の特別な点を端点とするように任意に付けた二電極間の正確な抵抗値を求める方法を述べる。また，穴のある抵抗領域についても言及している。なお，抵抗領域は等方性で，面抵抗率は１と基準化している。

2. 単連結領域の場合

＜2.1＞ 二つの特殊な多角形の接合

例として図１(a) のような台形をとる。これを円に写像する仕方は無限にあるが，最も簡単なのは，台形の特別な点 O, A, B, C, D を扇形に (b) 図のように対応させ，その扇形を (c) 図に示すような半円領域を経て (d) 図のように広げるものである。[1]

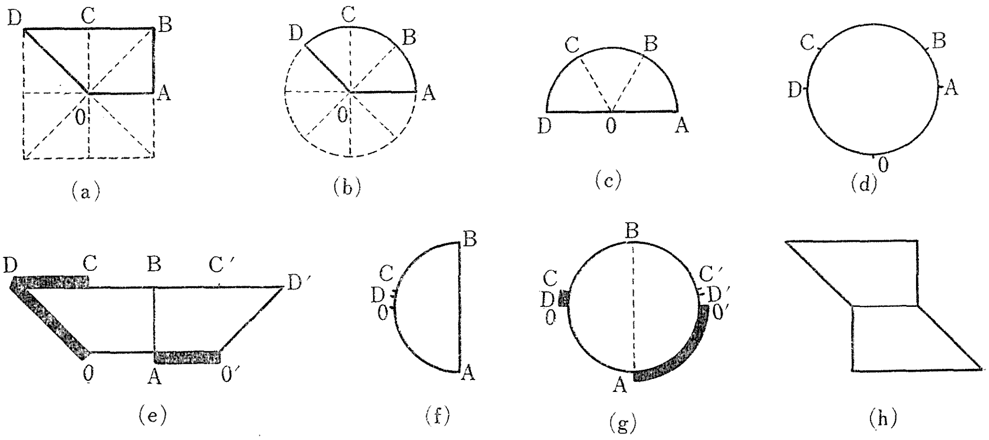


図１ 特殊な台形の接合方法の説明図。(h) 図のようなものには用いられない。

いま，(a) 図の台形と $\overline{AB}$ に関して対称な形のものを $\overline{AB}$ を共通にするよう結合した領域(e)図を作る。一方，(d)図を $\widehat{AB}$ が $\overline{AB}$ なる直径に移るように半円 (f) 図に写像し，それと対称な半円を合わせて円にするならば，その円に (e) 図に示した合成台形は写像され，特別な点はすべて (g) 図のように一つの円のへりに写される。したがって，もし (e) 図で折れ線 CDO と線分 AO′ に二電極を付けるならば，その間の抵抗は (g) 図で円弧 $\widehat{CDO}$ と $\widehat{AO'}$ に付けた二電極間の抵抗になるから正確に計算できる。実際の計算は(c)図を半平面に写像して接合する方法が容易で，抵抗値は1.63となる。(付録 (1) 参照)

この方法は，等角写像法の対称の原理によっているので，適用の条件は，接合された線分の両端点を二電極として電流を流すとき，その線分に沿う電流線があることである。したがって，図１(h) のような形に接合されたものには用いられない。

図１(a) の台形２個を他の線分で接合する場合も，同様の方法によって円との対応が可能で，たとえば BC で接合すれば図２(a) のような切れ目のある領域となり，この二つをさらに組み合わせれば (b) 図となる。このように望むなら幾回でも接合できよう。

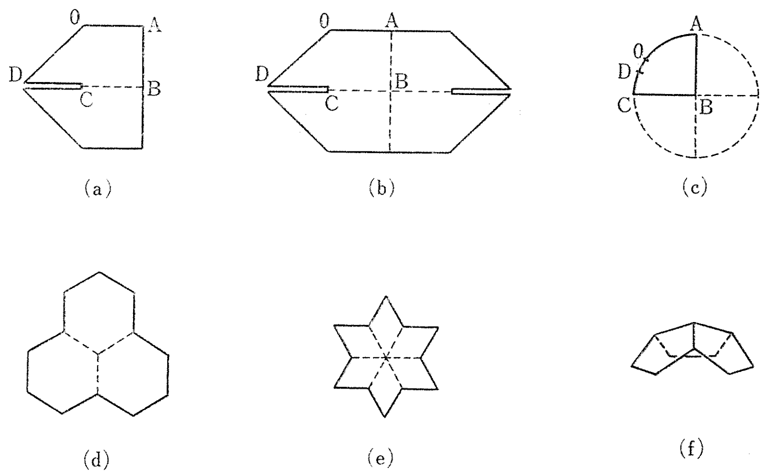


図 2 幾つかの基本多角形を接合して得られる種々な領域

＜2.2＞ 三つ以上の特殊多角形を一度に接合する場合

図2(b) の場合は基本となる図1(a) の台形4個を同時に接合しても円との対応が得られる。基本台形図1 (a) に対応する図1 (d) の円領域を図2 (c) のような¼円に写像し，この4個を接合すればよい。(付録 (2) 参照)

図2(b) の場合は，抵抗を正確に計算できる電極配置の端点として周辺の12個の点が利用できる。この領域を文献(2)の方法で直接円に対応させる場合には周辺の4点が利用できるだけである。

図2(d) は正六角形3個，(e) 図は60°ひし形を6個集めたもので同様に円に対応でき，それぞれ24個の周辺上の点が電極端点として用いられる。文献(2)の方法では，(d) 図で6個，(e) 図で12個の対称軸との交点が用いられるに過ぎない。

また，同一平面上にない幾つかの多角形からなる領域，たとえば(f)図のような正12面体の一部を形成する正五角形3個が接合された領域なども，同様の方法で円に写像できる。この場合には周辺の18個の点が電極端点として利用できる。

3. 二重連結領域の場合

穴の一つある有限領域のことである。図3(a)のように図1(a)を8個集めた領域，すなわち正方形の一辺の½の長さの辺よりなる正方形の穴が中央にあって，内外辺が平行である場合，内，外のへり全体をそれぞれ電極とするときの抵抗の正確な計算法を文献(1)に述べた。それと等しい抵抗を持つ同心円領域 (b) 図の b/a は1.848である。この同心円領域のへりに付けた二電極間の抵抗が等角写像の考え方で正確に計算できる場合は限られている。[(3)] その計算可能な場合に対応する(a)図のへりの電極配置，たとえば (c) 図，(d) 図などの場合の抵抗値は計算可能である。

内外辺の比が1:2の空心正六角形領域(e)図などについても，同様の方法で扱うことができる。

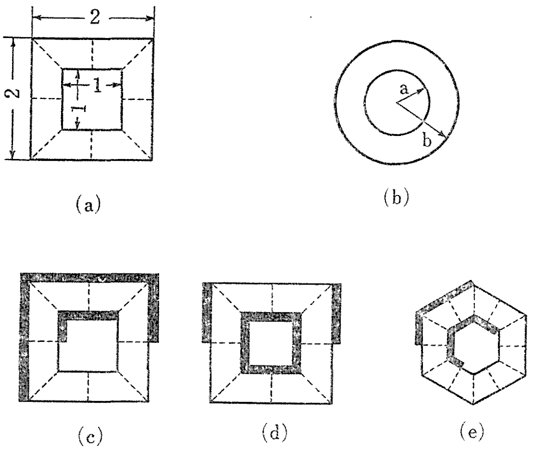


図 3 穴のある領域で抵抗の正確に計算できる場合の例

4. おわりに

基本となる多角形が幾つか接合されたより複雑な特殊多角形の周辺上の特別な点を，扇形を接合して得られる円の周辺に対応させることによって，特別な点を端点とする二電極間の抵抗値を計算する方法を述べた。この方法は，等角写像法の対称の原理(鏡像の原理)によったもので，原理的に正確なものである。

この方法によって，従来の特殊多角形の対称軸上の点だけを円に対応させる方法に比べて，領域の周辺の二電極の大きさ，配置の種類の数をかなり増すことができた。したがって，電極配置が全く任意の場合には適用できないが，そのときの大体の見当をつけやすくなるであろう。さらに，穴のある二重連結の場合は，ある制限はあるが，幾つか正確に計算できることを見い出した。

参 考 文 献

(1) 荒又，寺門： 茨城大学工学部研究集報，第18巻，(昭45) p. 61
(2) 荒又，寺門： 茨城大学工学部研究集報，第14巻，(昭42) p. 20
(3) 荒又，寺門： 茨城大学工学部研究集報，第14巻，(昭42) p. 12
(4) 寺門，荒又： 茨城大学工学部研究集報，第16巻，(昭43) p. 75

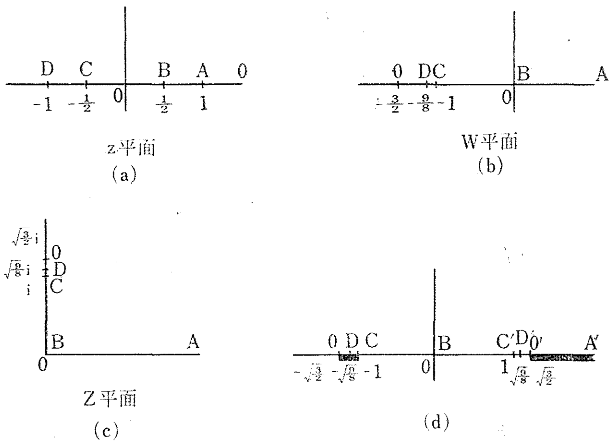
付　　録

（1） 本文図１(e) の抵抗値の計算

本文図 l (c) を w 平面とし，この半円領域を写像関数

$$z=\frac{1}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)$$

によって z 上半平面に写像し，付図 l (a) となる。これをさらに，A点が∞，B 点が 0，C 点が −1 となるような半平面に写像する関数を求め



付図 1　本文図１ (e) の抵抗値計算説明図

$$W=-\frac{3}{4}\frac{2z-1}{z-1}$$

をうる。この関数によって D 点は−9/8，O 点は−3/2に写像され (b) 図となる。(b) 図を

$$Z=W^{\frac{1}{2}}$$

により Z 平面に写像し，(c) 図のような¼平面となる。(c) 図と AB に関して対称な領域を AB で接合すると，本文図１ (e) に対応する半平面領域が得られ，(d) 図の電極配置となる。だ円積分の母数を計算して[4]

$$k^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{6}}=0.0918$$

したがって求める抵抗値は，この母数に対する第一種完全だ円積分により

$$R=\frac{K'}{K}=1.63$$

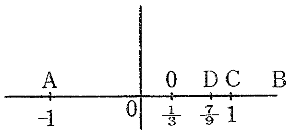
となる。

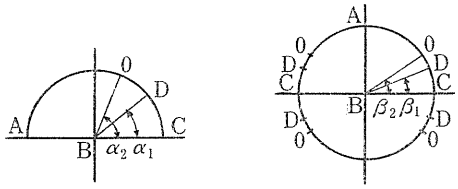
(2)　本文図2 (b) の領域と円との対応

本文図1 (a) の基本台形に対応する半平面領域付図1 (a) を，A 点が-1，B 点が∞，C 点が1となる半平面に写像する関数を求め

$$W=\frac{1}{3}\frac{2z-5}{2z-1}$$

となり，D, O 点はそれぞれ$7/9$，$1/3$に写像され付図2 (a) が得られる。この W 平面の領域を





付図 2　本文図2 (b) と円との対応を求める方法の説明図

$$W=\frac{1}{2}\left(Z+\frac{1}{Z}\right)$$

によって Z 平面の半円に写像し (b) 図となり，図で

$$\alpha_1=\cos^{-1}\frac{7}{9},\quad \alpha_2=\cos^{-1}\frac{1}{3}$$

である。これをさらに

$$w=Z^{\frac{1}{2}}$$

によって$1/4$円に写像し，4個接合して (c) 図が求まる。図の

$$\beta_1=\cos^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3}\fallingdotseq 20°,\quad \beta_2=\cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}\fallingdotseq 35°$$

である。