# パラノーマル作用素のクラスについて

古　田　孝　之，武　田　二　郎

# On the Class of Paranormal Operators

by

Takayuki FURUTA and Zirō TAKEDA

**Abstract**: — We discuss a class of non-normal operators. A bounded linear operator T on a Hilbert space H is called *paranormal* if $\|T^2x\| \geqq \|Tx\|^2$ for every unit vector $x$ in $H$. Then the class of such operators includes hyponormal operators and is included in the class of normaloid operators. We show these inclusion relations are proper and hence paranormal operators constitute a new class broader than hyponormal operators and narrower than normaloid operators. As well known every hyponormal operator is convexoid. In §2 we discuss the inclusion relation between classes of paranormal operators and convexoid operators by several examples. The last section is devoted to a fundamental inequality for paranormal operators and its applications.

---

## 緒　　言

この論文では非正規作用素のクラスについて議論する。以下作用素とはつねにヒルベルト空間 $H$ 上の有界線形作用素を意味するものとする。ヒルベルト空間 $H$ 上のあらゆる単位ベクトル $x$ について，$\|T^2x\| \geqq \|Tx\|^2$ をみたす作用素を**パラノーマル**（paranormal）と呼ぶことにする。これは〔5〕でクラス N の作用素と呼ばれている。$T^*T \geqq TT^*$ である作用素は**ハイポノーマル**（hyponormal）と名づけられているが，ハイポノーマルならパラノーマルであることはつぎのようにして容易にわかる。あらゆる単位ベクトル $x$ について

$$\|Tx\|^2 = (Tx,\ Tx) = (T^*Tx, x) \leqq \|T^*Tx\| \leqq \|T^2x\|$$

はなぜならハイポノーマル作用素 $T$ ではつねに

$$\|Tx\| \geqq \|T^*x\|$$

したがってパラノーマル作用素のクラスはハイポノーマル作用素全部を含んでいるが，そ

---

註）この論文は日本数学会第5回関数解析シンポジュームでの著者の講演の詳報である。

の包含関係は proper であることが証明される。つまりハイポノーマルではないがパラノーマルである作用素の例が示される。$\|T^n\|=\|T\|^n (n=1, 2, \cdots)$ をみたす作用素は**ノーマロイド** (normaloid) といわれるが，パラノーマル作用素のクラスはノーマロイドのそれに完全に含まれることもわかる。また正規作用素のコンパクト性に関する一定理を更に広いクラスであるパラノーマル作用素とコンパクト性に関するものにまで拡張できることを示す。ハイポノーマル作用素ではそのスペクトルの convex hull が**数値域** (numerical range) の閉苞に一致しているが，この性質はパラノーマル作用素にまで保存されるかどうか？ これらのことについて以下順に論じてゆく。

**1. 補助定理 1.** $T$ をパラノーマル作用，$x$ を任意の単位ベクトルとすると

(1) $\|T^3x\| \geqq \|T^2x\|\ \|Tx\|$

証明，$x=0$ のときは，明らかであるから，$Tx\neq 0$ としてよい。

$$\|T^3x\|=\|Tx\|\left\|T^2\frac{Tx}{\|Tx\|}\right\| \geqq \|Tx\|\left\|T\frac{Tx}{\|Tx\|}\right\|^2=\frac{\|T^2x\|^2}{\|Tx\|}$$

$$\geqq \frac{\|T^2x\|\cdot\|Tx\|^2}{\|Tx\|}=\|T^2x\|\cdot\|Tx\| \qquad \text{q. e. d.}$$

**補助定理 2.** $T$ をパラノーマル作用素，$x$ を任意の単位ベクトルとすると，

($P_k$) $\|T^{k+1}x\|^2 \geqq \|T^kx\|^2 \cdot \|T^2x\|$

ただし $k$ は正の整数とする。

証明。数学的帰納法による。$k=1$ のとき

$$\|T^2x\|^2=\|T^2x\|\ \|T^2x\| \geqq \|Tx\|^2\|T^2x\|$$

であるから，($P_1$) は明らか。つぎに ($P_k$) は真と仮定する。前にのべたように $\|Tx\|\neq 0$ としてよいから，補助定理 1 と ($P_k$) とから

$$\|T^{k+2}x\|^2=\|Tx\|^2\left\|T^{k+1}\frac{Tx}{\|Tx\|}\right\|^2 \geqq \|Tx\|^2\left\|T^k\frac{Tx}{\|Tx\|}\right\|^2\left\|T^2\frac{Tx}{\|Tx\|}\right\|$$

$$=\|T^{k+1}x\|^2\frac{\|T^3x\|}{\|Tx\|} \geqq \|T^{k+1}x\|^2\cdot\|T^2x\|$$

よって ($P_{k+1}$) は真，数学的帰納法により証明完了。

**定理 1.** $T$ がパラノーマル作用素であれば任意の正の整数 $n$ に対して，$T^n$ もまたパラノーマル作用素である。

証明。$T$ と $T^k$ がパラノーマルであるとき，$T^{k+1}$ もまたパラノーマルであることを示せば充分である。$\|T^2x\|\neq 0$ としても一般性を失なわないから，補助定理 2. ($P_{k+1}$) により

$$\|T^{2(k+1)}x\|=\left\|T^{2k}\frac{T^2x}{\|T^2x\|}\right\|\cdot\|T^2x\| \geqq \left\|T^k\frac{T^2x}{\|T^2x\|}\right\|^2\|T^2x\|$$

$$=\frac{\|T^{k+2}x\|^2}{\|T^2x\|} \geqq \frac{\|T^{k+1}x\|^2\cdot\|T^2x\|}{\|T^2x\|}=\|T^{k+1}x\|^2$$

よって $T^{k+1}$ もまたパラノーマルである。 q. e. d.

**定理 2.** ハイポノーマルでないパラノーマル作用素が存在する。

証明。Halmos は〔4〕で $T$ がハイポノーマルで $T^2$ がハイポノーマルではない例を与えている。この $T^2$ は定理 1 によりパラノーマルである。よってハイポノーマルでないパラノーマル作用素の存在が確認された。 q. e. d.

正規作用素（normal Operator）の概念を拡張して，Brown, Halmos, Stampfli, Berberian, Wintner, Istratescu 等が各種の非正規作用素のクラスを導入したが，われわれの論んじているパラノーマル作用素はつぎの図式で示される位置に位している。

$$\text{Normal} \subsetneqq \text{Quasi-normal} \subsetneqq \text{Subnormal} \subsetneqq \text{Hyponormal}$$
$$\subsetneqq \text{Paranormal} \subsetneqq \text{Normaloid}$$

これらのクラス間の包含関係はすべて proper である。ハイポノーマルより左側の関係については Stampfli〔9〕に示されている。

堀江，中本の両氏はつぎの定理を証明した。

**定理 3.** パラノーマル作用素 $T$ がコンパクトであるための必要かつ十分な条件は $T^n$ がコンパクトであることである。

この定理は，正規作用素に対して Halmos〔4〕が証明しているのを，両氏はパラノーマル作用素にまで拡張するのに成功されたのである。著者の 1 人古田は両氏との共著の論文〔2〕において，この定理はノーマロイド作用素にまで拡張は不可能なことを例をあげて示した。よって定理 3. はパラノーマル作用素とノーマロイド作用素の差異は本質的なものであることを示すことになる。著者の例については次節で再論することになる。

2. 本節ではパラノーマル作用素のクラスとコンベクソイド作用素のクラスの相互関係について論んずる。

**定義 1.** $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |(Tx, x)|$ であるとき，$T$ を**ノーマロイド作用素**という。

ノーマロイドの条件は作用素 $T$ のスペクトル半径 $r(T)=\|T\|$，あるいは $\|T^n\|=\|T\|^n$, $(n=1, 2,\cdots)$ と同等である。（〔1〕,〔4〕,〔6〕,〔8〕,〔9〕）。

**定義 2.** 数値域の閉苞 $\overline{W(T)}=\overline{\{(Tx, x) \mid \|x\|=1\}}$ がスペクトル $\sigma(T)$ の convex hull に等しいような作用素 $T$ を**コンベクソイド作用素**（convexoid operator）という。

コンベクソイドであってノーマロイドでない作用素およびノーマロイドであってコンベクソイドでない作用素の例は Halmos〔4〕によって知られている。ここではパラノーマルに関して，いくつかの作用素の例を示す。

例 1 非コンベクソイド，非パラノーマル，ノーマロイド作用素の例（〔2〕，〔3〕）。

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots \\ 0 & M & 0 & 0 & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & M & 0 & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & M & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

ここで $M$ は $2\times 2$ 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。$T$ はノーマロイドになることは明らかであるが，パラノーマルでないことはつぎのようにしてわかる。

$$T^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

であるから $\|T^n\|=\|T\|^n=1$ $(n=1, 2,\cdots)$。よって $T$ はノーマロイドであるが $\|T^2x\|\geqq\|Tx\|^2$ は必らずしも成り立たない。実際単位ベクトルとして $e_2=(0, 1, 0,\cdots)$, $e_4=(0, 0, 0, 1, 0,\cdots)$ をとれば $\|T^2x\|\geqq\|Tx\|^2$ をみたさないことは容易にわかる。$T$ はまたコンベクソイドでない。$T$ の数値域 $\overline{W(T)}$ は半径½の円板 $\{Z \mid |Z|\leqq 1/2\}$ と1点1より張られる凸閉集合である。一方 $\sigma(T)$ は $\sigma(T)=\{0\}\cup\{1\}$ であるから $\sigma(T)$ の convex hull は単位閉区間〔0. 1〕である。この単位区間は $\overline{W(T)}$ に完全に含まれている。よって $T$ はコンベクスソイドではない

$T^2$ はコンパクト作用素であるが $T$ はコンパクトでないノーマロイド作用素である。これは §1 定理3をノーマロイド作用素まで拡張出来ないことを示す反例である。

例 2 非パラノーマル，コンベクスソイドノーマロイド例用素の例（〔4〕）

$T=\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $N$ は単位閉円板 $\overline{D}$ をスペクトルにもつ正規作用素とする。

$\|T\|=1$, $\sigma(T)=\{0\}\cup\{\overline{D}\}=\overline{D}$, $\overline{W(T)}=W(M)\cup W(N)$ の convex hull$=\overline{D}$ であるから $T$ はコンベクスソイドでかつノーマロイドである。しかし $T$ はパラノーマルではない。$Te_1=e_2$,, $T^2e_1=0$ であって $x=e_1$ に対して $\|T^2x\|\geqq\|Tx\|^2$ が成り立たないからである。

例 3 $T^2$ はコンベクソイドでない，非パラノーマル，コンベクソイドノーマロイド，作用素の例

$$T=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & & & \\ \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&2i\\2i&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & & \\ \vdots & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \\ \vdots & \vdots & & \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} & \\ \vdots & \vdots & & & \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$ の数値域は0, 1を焦点とし，長径，短径がそれぞれ$\sqrt{2}$，1 である楕円である。$T$ のスペクトルは $\pm2$，$\pm2i$，1，0 の6点であるから例2と同様に，$T$ は非パラノーマル，コンベクスソイド，ノーマロイドであることが示される。しかし $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ がべき零作用素であることに注意して $T^2$ を計算すれば $T^2$ のスペクトルは実数だけであることがわかる。しかし $\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$ がべき等作用素であってその数値域が楕円であることから $T^2$ はコンベクスソイドではあり得ない。

この例は§1 定理3でパラノーマル作用素をコンベクソイド，ノーマロイド作用素に置き換えれ定理は最早成立しないことを示している。$T^2$ はコンパクトであるが $T$ はコンパクトではない。

例 4 非ハイポノーマル，パラノーマル，コンベクスソイド作用素の例（〔4〕）。

$C=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$ とし $T$ を下記の無限行列で与えると $T^2$ は下に示す行列となる。

$$T=\begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & C^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & 0 & C^{\frac{1}{2}} & (0) & 0 & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & 0 & 0 & D^{\frac{1}{2}} & 0 & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 & D^{\frac{1}{2}} & \cdots\cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

（ ）は（0, 0）行列要素の位置を示す。

$$T^2=\begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & C & 0 & (0) & 0 \\ & 0 & C & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & D^{\frac{1}{2}}C^{\frac{1}{2}} & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & D \\ & & & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

明らかに $D\geqq C$ であるが $D^2\geqq C^2$ とはならない。

この事実によって $T$ はハイポノーマルであるが $T^2$ はハイポノーマルにはならない。定理 1 によってこの $T^2$ はパラノーマル作用素である。あらゆるハイポノーマル作用素はコンベクスソイドであることは知られている（〔7〕,〔9〕）が，この非パラノーマル，パラノーマル作用素もまたコンベクスソイドであることを以下で示そう。

$D$ は2次元空間 $E$ 上の正値作用素であり，その固有値は $(3+\sqrt{5})/2$, $(3-\sqrt{5})/2$ である。いま $\mu=(3+\sqrt{5})/2$ とおけば $\mu>1$ であり，$\|T^2\|=\mu$, $\|T\|=\sqrt{\mu}$ である。$\varphi=(\varphi_1, \varphi_2)$ を固有値 $\mu$ に対する $D$ の固有ベクトル，$\psi=(\varphi_1, 0)$, $0=(0, 0)$ とおく。行列 $T$ は直和 $\oplus_{n=-\infty}^{n=\infty} E_n(E_n\simeq E)$ 上に作用する作用素と考えられる。$1<|\lambda|<\mu$ なる任意の複素数 $\lambda$ をとり，$\Phi$ をつぎのように置く。

$$\Phi=\left(\cdots 0,\ \frac{1}{\lambda^3}\psi,\ 0,\ \frac{1}{\lambda^2}\psi,\ 0,\ \frac{1}{\lambda}\psi,\ \hat{0},\ \varphi,\ 0,\ \frac{\lambda}{\mu}\varphi,\ 0,\ \frac{\lambda^2}{\mu^2}\varphi,\ 0,\ \cdots\right)$$

各成分はそれぞれ $E_n(-\infty<n<\infty)$ 内のベクトルである。$\wedge$ は0座標の位置を示す。$\Phi$ は $\oplus_{n=-\infty}^{n=\infty}E_n$ にぞくするベクトルであることは明らかであり容易に $T^{*2}\Phi=\lambda\Phi$ であることが示される。すなわち $\lambda$ は $T^{*2}$ の点スペクトルに属する。したがって $\lambda$ は $T^2$ の点スペクトルか剰余スペクトルに属する。いずれにしても $\lambda\varepsilon\sigma(T^2)$。$\lambda$ は $1<|\lambda|<\mu$ である任意の複素数でよかったから $T^2$ のスペクトルの convex hull は半径 $\mu$ の閉円板 $\{Z|\ |Z|\leqq\mu\}$ に一致する。一方 $\|T^2\|=\mu$ であり，$T^2$ の数値域はこの円板に含まれる。しかも一般に数値域の閉苞は，スペクトルの convex hull を含むことが知られている。いまの例ではこの両者は完全に一致している。よって $T^2$ はコンベクスソイドである。

この例から一般に任意のパラノーマル作用素はコンベクスソイドであるか？ が問題になるがこれは現在まで解決されていない。これは上の例以外にハイポノーマルでないパラノーマル作用素の例が知られていないためで，パラノーマル作用素の具体的研究が困難なことに起因する。

**3.** この節では §1 の補助定理や定理 1 をふくめて，パラノーマル作用素の既知の事実を極めて簡潔に導出する不等式についてのべる。この不等式は今後のパラノーマル作用素の研究に基本的な役目を果たすことになると思われる。

**定理 4.** $T$ はパラノーマル作用素，$x$ は $Tx\neq 0$ なる任意のベクトルとすると

$$\|T\|\geqq\cdots\geqq\frac{\|T^{n+1}\|}{\|T^nx\|}\geqq\cdots\geqq\frac{\|T^5x\|}{\|T^4x\|}\geqq\frac{\|T^4x\|}{\|T^3x\|}\geqq\frac{\|T^3x\|}{\|T^2x\|}\geqq\frac{\|T^2x\|}{\|Tx\|}\geqq\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

さらに，もし $T$ に逆作用素 $T^{-1}$ が存在すれば

$$\frac{\|x\|}{\|T^{-1}x\|}\geqq\frac{\|T^{-1}x\|}{\|T^{-2}x\|}\geqq\cdots\geqq\frac{\|T^{-n+1}x\|}{\|T^{-n}x\|}\geqq\cdots\geqq\frac{1}{\|T^{-1}\|}$$

証明 $T$ はパラノーマルであるから $\|x\|=1$ なる $x$ に対して $\|T^2x\|\geqq\|Tx\|^2$ よって

$$\frac{\|T^2x\|}{\|Tx\|}\geqq\frac{\|Tx\|}{1}$$

$T$ の斉次性から，任意の $x$ に対して

$$\frac{\|T^2x\|}{\|Tx\|} \geqq \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

$x$ の代りに $Tx$ を代入して

$$\frac{\|T^3x\|}{\|T^2x\|} \geqq \frac{\|T^2x\|}{\|Tx\|}$$

以下同様。全く同様にして $T^{-1}$ が存在すれば第2の不等式も成り立つ。 q. e. d

単位ベクトル $x$ に対して基本不等式から

$$\frac{\|T^{2n}x\|}{\|T^nx\|} \geqq \frac{\|T^nx\|}{\|x\|} = \|T^nx\|$$

よって $T$ がパラノーマルならば $T^n$ もまたパラノーマル。また $T$ がパラノーマルなら $T$ はノーマロイド。なぜなら基本不等式から

$$\frac{\|T^nx\|}{\|x\|} \geqq \left(\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\right)^{n-1}$$

§ 1 補助定理2の不等式は

$$\left(\frac{\|T^{k+1}x\|}{\|T^kx\|}\right)^2 \geqq \frac{\|T^2x\|}{\|Tx\|}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|T^2x\|$$

より明らか，もし $T$ に逆作用素 $T^{-1}$ があれば，第2の不等式から，あらゆる単位ベクトル $x$ に対して $\|T^{-2}x\| \geqq \|T^{-1}x\|^2$。すなわち $T$ がパラノーマルなら $T^{-1}$ もまたパラノーマルである。

## 参　考　文　献


(1) T. Andô: On hyponormal operators. Proc. Amer. Math. Soc., 14, 290-291 (1963).

(2) T. Furuta, R. Nakamoto and M Horie: A remark on a class of operators. Proc. Japan Acad 43 607-609 (1967).

(3) T. Furuta; On the class of paranormal operators. ibidem. 594-598

(4) P. R. Halmos: Hilbert space problem book. Van Nostrand. The University Series in Higher Mathematics. (1966).

(5) V. Istratescu, T. Saitô and T. Yoshino: On a class of operators. Tôhoku. Math. Journ., 18, 410-413 (1966).

(6) G. H. Orland: On a class of operators. Proc. Amer. Math. Soc., 15, 75-79 (1964).

(7) T. Saitô and T. Yoshino: On a conjecture of Berberian. Tôhoku. Math. Journ., 17, 147-149 (1965).

(8) J. G. Stampfli: Hyponormal operators. Pacific Journ. math., 12, 1453-1458 (1962).

(9) ——: Hyponormal operators and spectral density. Transaction of Amer. Math. Soc., 117-5, 469-476 (1965).