回転曲面抵抗薄膜上の電流線と等電位線

荒 又 光 夫， 寺 門 龍 一

Current Lines and Equipotential Lines on the Resistance Film in the Shape of Surface of Revolution

Mitsuo ARAMATA and Ryûiti TERAKADO

Abstract: — In the last volume of this journal, the methods were reported for drawing graphically the current lines and equipotential lines between two electrodes attached on the circumference of a resistance plate in various shape, and also in the same paper the maps actually drawn were shown. In this paper, on the basis of the former paper a study is advanced concerning the current lines and equipotential lines on the resistance film in the shape of surface of revolution.

1. まえがき

種々の形の抵抗板の周辺に，2電極をつけたときの電流線，等電位線を図式的に描く方法と，実際の図面を，この集報の前巻に報告した。[(1)] 引き続いて，それを基として，回転曲面抵抗薄膜上の電流線，等電位線について同様の研究を行なったので，報告する。

2. 曲面上の電流

任意の曲面は，空間内で，助変数 (p, q) を用いて，方程式

$$x_i = x_i(p, q) \qquad i=1, 2, 3,$$

で表わすことができ，p, q をそれぞれ一定としたときの，p 曲線，q 曲線は，曲面上に斜交座標をつくる。今この曲面に電流を流すとき，曲面上に描かれる電流線と等電位線を示す曲線が，それぞれ

$$u(p, q)=c, \quad v(p, q)=k \qquad c, k \text{ は定数}$$

で示されるものとすれば，u, v はそれぞれベルトラミーの方程式を満足することが知られている。[(2)] もし，(p, q) の代わりに，曲面上の直交座標を用いれば，ベルトラミーの方程式はラプラスの方程式となって，平面上と何ら変わるところがなく，これは曲面上の電流界

は，平面上の領域との相互写像によって考え得ることを示している。

3. 曲面と平面との対応と電流線，等電位線の描き方

任意の曲面は，平面との等角対応可能であるが，回転曲面は特にその対応が容易であり，昨年の集報にその関係式を示した。[(3)] ここでは，円柱面，円すい面，球面，円環面を中心に，電流線，等電位線の描き方を述べる。

＜3.1＞ 展開可能曲面

平面状に切り開くことのできる曲面，たとえば，円柱面，円すい面等は，そのまま平面に対応できるので，電流線，等電位線は，展開図形上に描けばそれでよい。しかし，切り開くことによって電流界が乱されないよう，電流線または等電位線に沿って切り開く注意が必要である。文献（1）の付図10を，円柱側面にはりつけて，円柱面上の電流線，等電位線を示す図1が得られ，同じく付図8の半分から，円すい面の電流界，図2が求まる。

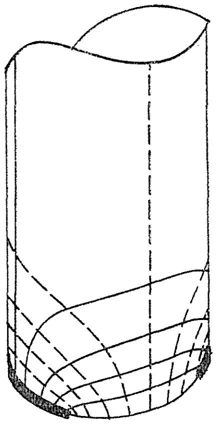

図 1

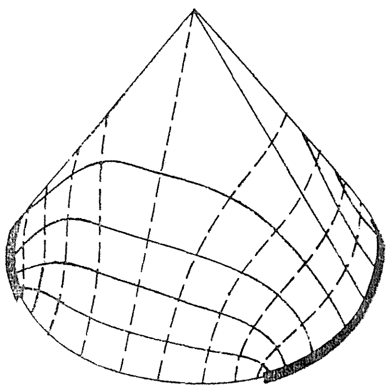

図 2

これらは，いずれも側面のみを考えたが，底面までをも含めた場合も，円領域図を付加するだけで容易に得られる。しかし，その場合，底面と側面の境界線以外の位置に電極をつけるときは，境界線を電流が通らなくなるので，後述の一般回転曲面の場合として扱わなければならない。

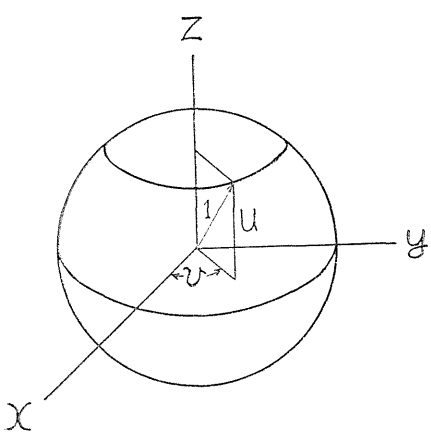

図 3

＜3.2＞ 球 面

球面と平面との等角対応は古くから知られており，地図の平射図法がその一つで，球面は全平面に対応する。それを数式で表現すれば，球の半径を1として，図3のように助変数 u, v をとると，球面の方程式は

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{1-u^2}\ \cos v \\ y &= \sqrt{1-u^2}\ \sin v \\ z &= u \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

となり，第一基本量は

$$\left.\begin{aligned} E_1&=\frac{1}{1-u^2} \\ F_1&=0 \\ G_1&=1-u^2 \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots (2)$$

となる。これを平面上の円群

$$\left.\begin{aligned} x&=r\ (u)\ cosv \\ y&=r\ (u)\ sinv \\ z&=0 \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots (3)$$

$$\left.\begin{aligned} E_2&=\{r'(u)\}^2 \\ F_2&=0 \\ G_2&=\{r(u)\}^2 \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots (4)$$

に対応させて，

$$\frac{1/1-u^2}{\{r'(u)\}^2}=\frac{1-u^2}{\{r(u)\}^2}$$

$$r=\sqrt{\frac{1+u}{1-u}} \qquad \cdots\cdots (5)$$

または

$$u=\frac{r^2-1}{r^2+1} \qquad \cdots\cdots (6)$$

の関係を得る。(6) 式によって，球面上に，文献 (1) の基本図 **C** の座標に対応する座標を描いておけば，文献 (1) の付図のうち，円領域に描かれた任意のものを，基本図 **C** に重ね，**C** の座標から球面上の座標に写像すれば，球面上の電流線，等電位線が得られる。この対応にあたっては，円領域の周辺を，球面上の座標のどの円に対応させてもよく，球面上では，その円を境に両側全く対等な電流界となるから，一つの円領域の図面を，球面

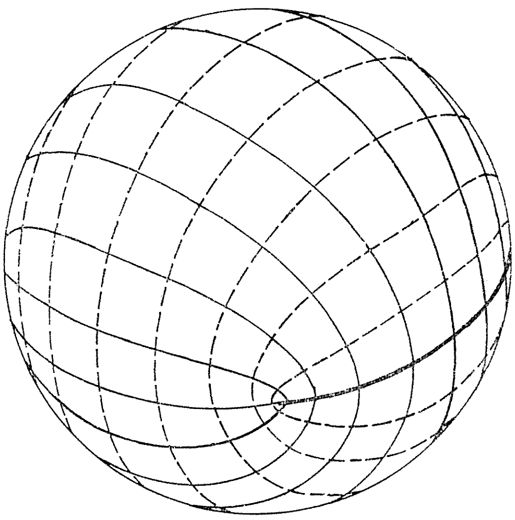

図 4

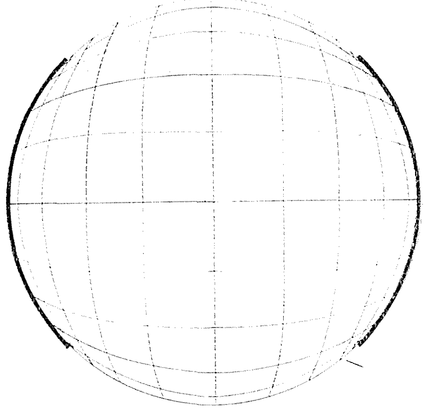

図 5

上の一つの円を境に両側に写像すればよい。

図4は文献 (1) 付図1を円周が球の大円に対応するように写像したものの鳥かん図であり，図5は投影図である。

<3.3>　一般の回転曲面

一般の回転曲面についても，文献 (3) の方法によって平面との対応を求め，その積分が計算できれば，曲面上に平面との対応を与える座標線を描いて，文献 (1) の付図の適当な図を写像できる。

回転曲面が1つの周辺を持つものであれば円領域に対応し，文献 (1) 付図1～6等を写像できる。また，円すい台側面のように2つの周辺を持てば，同心円領域に対応し，文献(1) 付図23, 24, 34等を写像できる。ただし，これらの付図は，穴の半径 r が外半径1に対して

$$r=e^{-\frac{\pi}{2}}\fallingdotseq 0.208$$

の関係にあるので，これに相当する領域にのみ写像可能である。たとえば，円すい台では，方程式が図6のように

$$\left.\begin{aligned} x&=u\cos v\\ y&=u\sin v\\ z&=\frac{h}{a-b}(a-u)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(7)$$

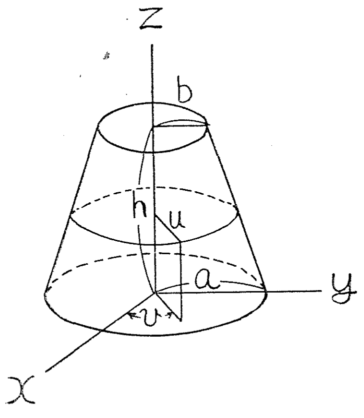

図　6

と表わされるので，平面との対応をとると，文献 (3) の (21) 式により，円の半径は，

$$r=f(u)=A\,exp\int\frac{\pm\sqrt{1+\left(\frac{h}{a-b}\right)^2}}{u}du$$

$$=Aue^{\pm\sqrt{1+\left(\frac{h}{a-b}\right)^2}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(8)$$

したがって，$u=a$ に対応する平面上の円の半径を1としたとき，$u=b$ に対応する半径 r は

$$r=\frac{b}{a}$$

となるので，

$$\frac{b}{a}=e^{-\frac{\pi}{2}}\fallingdotseq 0.208$$

の円すい台側面にのみ写像可能である。

次に，回転だ円面のような回転閉曲面は，全平面と対応するので，その対応を与える積分が計算できれば，球面と同様の方法で電流線，等電位線を描くことができる。たとえば図7のような底面まで含めた円すい閉曲面の，底面に平行な円周上に電極をつけるときの電流界は，

側面の方程式

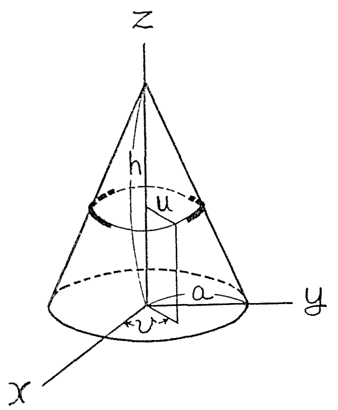

図 7

$$\left.\begin{aligned} x&=u\cos v\\ y&=u\sin v\\ z&=\frac{h}{a}(a-u)\\ &0\leqq u\leqq a \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

底面の方程式

$$\left.\begin{aligned} x&=u\cos v\\ y&=u\sin v\\ z&=0\\ &0\leqq u\leqq a \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

をそれぞれ文献（3）の（21）式で，u の値に対応する平面上の円の半径を求めると

側面については

$$r=A\exp\int\pm\frac{\sqrt{1+\left(\frac{h}{a}\right)^2}}{u}du$$

$$=Aue^{\pm\sqrt{1+\left(\frac{h}{a}\right)^2}},\quad 0\leqq u\leqq a\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

底面については

$$r=A\exp\int\frac{\pm 1}{u}du=Au \text{ または } \frac{A}{u},\quad 0\leqq u\leqq a\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

平面上での両者の接続がすきまがなく，しかも重なりあう部分がないよう，A の値と符号をそれぞれ適当に選んで，

側面では

$$r=\frac{u}{a},\quad \left.\begin{aligned} &u=0 \text{ のとき } r=0\\ &u=a \text{ のとき } r=1 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

底面では

$$r=\frac{a}{u},\quad \left.\begin{aligned} &u=a \text{ のとき } r=1\\ &u\to 0 \text{ のとき } r\to\infty \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

とする。あるいはこれを逆に解いた

側面 $\quad u=ar,\ 0\leqq r\leqq 1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (15)

底面 $\quad u=\frac{a}{r},\ 1\leqq r \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (16)

の関係式によって，文献（1）の基本図 **C** の座標を写像しておけば，球の場合と同様に，任意の円に沿って電極をつけたときの電流線，等電位線を描くことができる。

＜3.4＞ 円環面

円環面も，もちろん回転閉曲面であるが，示性数において球面等と異なり，球面等の 0 に対して円環面では 1 である。示性数 1 の他の環面についても同様の扱いができるが，ここでは，円環面についてのみ述べる。

文献（3）の（27），（28）式によって，円環面と長方形の対応が与えられているので，

長方形内に描いた辺に平行な直交座標を，(27) 式の関係あるいは逆に解いた

$$u=2\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{R+r}{R-r}}\tan\left\{\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{2r}\left(\xi-\frac{\pi}{2}\right)\right\}\right]\quad 0\leqq\xi\leqq\frac{2\pi r}{\sqrt{R^2-r^2}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ (17)$$

によって円環面上に描いておけば，文献 (1) の付図13，14，15等を長方形の座標から円環面座標に写像して，電流線，等電位線が求められる。

図８は，円環面上に描いた座標線と，文献 (1) の付図14を写像して得られた電流線，等電位線を示す透視図である。

円環面上の電極配置が図９であれば，これに対応する長方形の電極配置は図10 (a) となるが，図10 (a) の電流線は，文献 (1) の付図10の電流線図とほとんど等しい。なぜなら，付図10は，文献 (1) の付図1を写像したものであるが，図10 (a) の電流線は，図10 (b) のように，半径１の円に，半径

$$r=e^{-2\pi}=0.00188$$

の穴のあいた領域の周辺に，対向等長２電極をつけたときの電流線を写像して得られる。

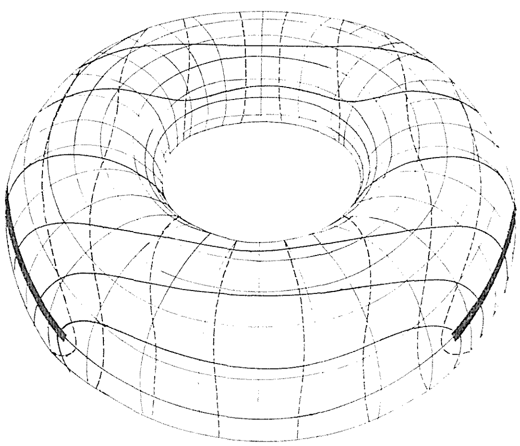

図　　8

文献 (1) の付図１と図10 (b) の領域では，電流界にほとんど差がないと考えられる。したがって，図９は，文献 (1) の付図10を写像して描いたものである。

また図11は，文献 (1) 付図15を円環面上に写像したものである。

ただし，ここに描いた円環面は，縦横比２の長方形に対応するもの，すなわち，文献 (3) の (29) 式から

$$\frac{r}{R}=0.448$$

の関係の円環面である。

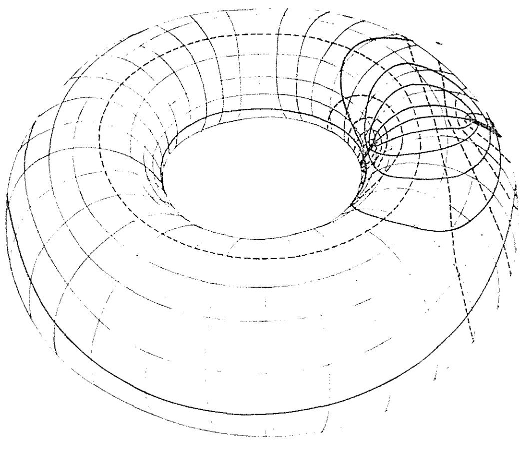

図　　9

<3.5>　任意の曲面

回転曲面以外の曲面も，平面との対応がつけば，電流線，等電位線を描くことができる。全く任意の曲面については，数学的対応を見いだすことは困難であろうが，実験的には求めることができる。周辺が１つの曲面では，たとえば，周辺全体と内部の１点に電極をつけて電流を流し，電流線，等電位線を描いて，これを曲面上の直交座標とみなして平面との対応をつくり，平面上の図面を写像する。周辺が２つの曲面では，２つの周辺をそれぞれ電極とし，また，完全閉曲面で

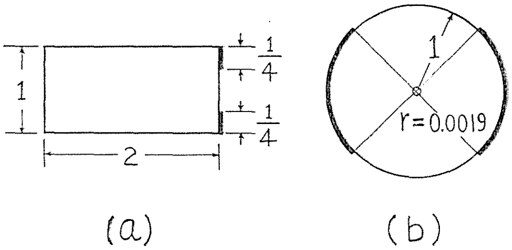

図 10

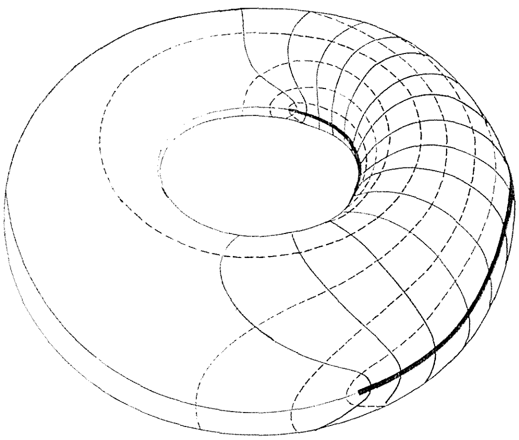

図 11

は，面上の任意の2点を電極として同様の方法で座標曲線を描けばよい。

4. むすび

平面領域の電流線、等電位線の図面から，写像によって回転曲面上の電流線，等電位線を描く方法を述べたが，回転曲面はそれを描く立場から2種に分類できる。1つは，周辺が1つの回転曲面や，球面のような閉曲面で，1枚の円領域の電流線，等電位線の図面から，どのような形状の回転曲面にでも写像できる。ところが，周辺が2つの回転曲面や，円環面のような閉曲面では，平面上の1つの同心円領域や長方形領域に対応する回転曲面の形状は定まってしまって，それ以外のものには写像できない。したがって，描くことのできるこの種の回転曲面の形状を拡張しようとすれば，対応する平面図形をいろいろに変えたものを描かなければならない。この集報の他のところで，その方法を述べている。

この2種の性質は，同時に，対応する平面図形の性質でもある。その連結数が性質を表わし，閉曲面の示性数がこれに対応していると考えられる。このことは，位相幾何等とも関連して興味深い。

また，ここに述べた方法は，電流界だけでなく，伝熱等の他の2次元界にも応用できるであろう。

この一連の研究は，常に一貫して池田芳郎先生の等角写像の考え方に導かれたことを付記して厚くお礼申し上げます。また図面作成に援助された笠原英司，名野隆夫の両君に深謝いたします。

参 考 文 献

(1) 荒又，寺門，皆川： 茨城大学工学部研究集報，第14巻（昭42） p. 27

(2) G. Springer: Introduction to Riemann Surfaces, Addison-Wesley Publishing Company (1957) p. 20

(3) 荒又，寺門： 茨城大学工学部研究集報，第14巻（昭42） p. 11