

等価回路より求めた3相誘導電動機の 電源電圧特性について

関 山 正 憲*

(昭和50年9月5日受理)

On the Influence of the Power Source Voltage to the Running Behavior of the 3-phase Induction Motors, Discussed by means of the Equivalent Circuit

MASATOSHI SEKIYAMA

Abstract:—It is important that we investigate how the 3-phase induction motors behave when the source voltage changes. Up to this time, the influences of the source voltage are respectively obvious to the starting current, to the starting torque and to the maximum torque, but to the slip and to the running current remain obscure yet. So, I induced the formula about the slip and the running current to the source voltage, using the formula from the equivalent circuit of the 3-phase induction motor.

1. は し が き

現在この地球上で回転している電動機の7割は誘導電動機であるといわれている。また、同じ配電線に属する需要家の電力消費により供給される電圧にも変動がおこる。このような状況において、電源電圧の変動により3相誘導電動機の特性が如何に変わるかを論ずることは、電動力応用工学の立場から大いに意義のあることと思う。

従来、3相誘導電動機の起動電流は電源電圧に比例し、起動回転力および最大回転力は電源電圧の2乗に比例することは手近な書籍¹⁾にもべられているが、滑りおよび1次側電流については増減の傾向のみを示し如何なる関数になるかは報ぜられていない。これを明かにした所が本論文の骨子である。等価回路から説きおこし種々の関係式を求めてからそれらより近似式として求め得たものである。

2. 基 礎 理 論

三相誘導電動機の回転子は空隙により固定子と切放されているが、磁束の姿でそこを渡って来たエネルギーにより動力を発生する。これは変圧器の1次側より2次側

に磁束の姿で電力が伝えられるのと同じ関係にある。その等価回路も変圧器のものほとんど同じとなり、1相について示せば図1のようになる。変圧器のそれと異なる所は負荷をつなぐべき所に $r_2(1-s)/s$ をつないだ点である。

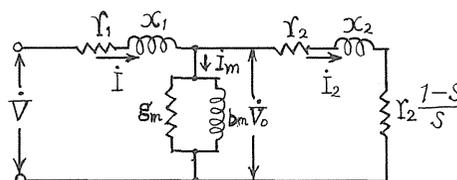


Fig. 1 The equivalent circuit of the 3-phase induction motor per phase.

図1において、 r_1 と x_1 は1次側に当る固定子の抵抗ともれリアクタンス、 g_m と b_m は励磁回路のコンダクタンスとサッセプタンス、 r_2 と x_2 は2次側に当る回転子の抵抗と静止時のもれリアクタンスである。回転子内の磁束変化は、回転が速いほど小となるので、それに誘起される起電力の大きさ、周波数共に小さくなる。滑りを s とすると、起電力およびリアクタンスの1次側換算

*茨城大学工業短期大学部電気工学科(日立市中成沢町)

値は sV_0 および $s x_2$ となる。静止時においては $s=1$ となるのでそのリアクタンスも x_2 となる。したがって、2 次電流の 1 次への換算値を求めると

$$I_2 = \frac{sV_0}{\sqrt{r_2^2 + (s x_2)^2}} = \frac{V_0}{\sqrt{(r_2/s)^2 + x_2^2}} \dots\dots\dots(1)$$

となる。しかるに、 r_2/s は r_2 と $r_2(1-s)/s$ とに分割できるので、変圧器の等価回路においてはその出力端子に $r_2(1-s)/s$ をつないだものと等しくなるのである。

図 1 より $\dot{V} = (r_1 + j x_1) \dot{I}_1 + (r_2/s + j x_2) \dot{I}_2$ が導ける。ここで励磁電流 I_m によるもれインピーダンスによる電圧降下を無視すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (r_1 + j x_1 + r_2/s + j x_2) \dot{I}_2 \\ &= \{ r_1 + r_2/s + j(x_1 + x_2) \} \frac{\dot{V}_0}{r_2/s + j x_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore V_0 &= V \sqrt{\frac{(r_2/s)^2 + x_2^2}{(r_1 + r_2/s)^2 + (x_1 + x_2)^2}} \\ &= V \sqrt{\frac{r_2^2 + s^2 x_2^2}{(s r_1 + r_2)^2 + s^2 (x_1 + x_2)^2}} \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

(2)を(1)に入れて

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{s}{\sqrt{r_2^2 + s^2 x_2^2}} \cdot V \sqrt{\frac{r_2^2 + s^2 x_2^2}{(s r_1 + r_2)^2 + s^2 (x_1 + x_2)^2}} \\ &= \frac{sV}{\sqrt{(s r_1 + r_2)^2 + s^2 (x_1 + x_2)^2}} \dots\dots\dots(3) \end{aligned}$$

回転子に誘起される電圧とそれによりながされる電流との間の位相角は 1 次側に換算しても変わらぬので \dot{V}_0 と \dot{I}_2 間の位相角となる。したがって、 \dot{V}_0 と \dot{I}_2 間の力率は

$$\text{Cos } \varphi = \frac{r_2}{\sqrt{r_2^2 + (s x_2)^2}} \dots\dots\dots(4)$$

また、1 相 1 極あたりのトルクは

$$\int (\text{回転子電流の瞬間値}) \cdot (\text{回転子にかかる磁束の瞬間値}) dt = I_2 \cdot \frac{V_0}{\omega} \text{Cos } \varphi$$

相数を m 、磁極数を p とすると全体のトルクは

$$\begin{aligned} T &= \left(I_2 \frac{V_0}{\omega} \text{Cos } \varphi \right) \cdot m \cdot \frac{p}{2} = \frac{1}{9.8} m I_2 V_0 \text{Cos } \varphi \\ &\cdot \frac{p}{4 \pi f} \text{ [kgm]} \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

これに(3), (2), (4)を入れて

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{9.8} \cdot \frac{p}{4 \pi f} \cdot \frac{sV}{\sqrt{(s r_1 + r_2)^2 + s^2 (x_1 + x_2)^2}} \\ &\cdot V \sqrt{\frac{r_2^2 + s^2 x_2^2}{(s r_1 + r_2)^2 + s^2 (x_1 + x_2)^2}} \cdot \frac{r_2}{\sqrt{r_2^2 + (s x_2)^2}} \\ &= \frac{m p s r_2 V^2}{9.8 \times 4 \pi f \{ (s r_1 + r_2)^2 + s^2 (x_1 + x_2)^2 \}} \text{ [kgm]} \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

(6)を s で微分し零とおき T を最大にする滑りを出す

$$s m = r_2 / \sqrt{r_1^2 + (x_1 + x_2)^2}$$

故に最大トルクは

$$\begin{aligned} T_{m \text{ max}} = T \Big|_{s=s_m} &= \frac{mV^2 p}{9.8 \times 8 \pi f \{ r_1 + \sqrt{r_1^2 + (x_1 + x_2)^2} \}} \\ &\propto V^2 \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

また起動トルクは

$$\begin{aligned} T_{s=1} = T \Big|_{s=1} &= \frac{mV^2 p}{9.8 \times 4 \pi f \{ (r_1 + r_2)^2 + (x_1 + x_2)^2 \}} \\ &\propto V^2 \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

また、 $\dot{I} = \dot{I}_m + \dot{I}_2 = \dot{V}_0 (gm - jbm) + \frac{\dot{V}_0}{s r_2 + j x_2}$

の s に 1 を入れて起動電流は

$$\dot{I}_{s=1} = (\dot{V}_0)_{s=1} \cdot (gm - jbm + \frac{1}{r_2 + j x_2}) \propto (\dot{V}_0)_{s=1} \propto \dot{V}$$

ここでこれまでをまとめると次のようになる。

(9)より「起動電流は電源電圧に比例して増減する。」

(7), (8)より「最大トルクおよび起動トルクは電源電圧の 2 乗に比例する。」

3. 一定出力の場合の滑りと電流

以上の理論は既に知られていることではあるが、主題の事項を導くのに必要となるので紹介した次第である。

一定出力を出さなための s と I の動作について考える。

同期速度を n_s とすると $n = (1-s)n_s = (1-s) \cdot 120 f/p$ これと(6)を用い

$$\begin{aligned} \text{出力 } P &= 2 \pi \frac{n}{60} T \text{ [kgm/s]} = \frac{2 \pi}{60} (1-s) \times 120 f/p \\ &\times \frac{m p s r_2 V^2}{9.8 \times 4 \pi f \{ (s r_1 + r_2)^2 + s^2 (x_1 + x_2)^2 \}} \times 9.8 \text{ [W]} \\ &= \frac{m r_2 s (1-s) V^2}{(s r_1 + r_2)^2 + s^2 (x_1 + x_2)^2} \text{ [W]} \dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

Pを定数である定格出力として(10)より V^2 を出しsに注目しながら整理すると

$$\begin{aligned}
 V^2 &= \frac{P \{ (s r_1 + r_2)^2 + s^2 (x_1 + x_2)^2 \}}{m r_2 s (1 - s)} \\
 &= \frac{P}{m r_2} \left[\frac{r_2^2}{s} + \frac{(r_1 + r_2)^2 + (x_1 + x_2)^2}{1 - s} - \{ r_2^2 + (x_1 + x_2)^2 \} \right] \\
 &= \frac{P}{m r_2} \left[\frac{r_2^2}{s} + \{ (r_1 + r_2)^2 + (x_1 + x_2)^2 \} \cdot (1 + s + s^2 + \dots) - \{ r_2^2 + (x_1 + x_2)^2 \} \right] \\
 &= \frac{P}{m r_2} \left[\frac{r_2^2}{s} + (r_1^2 + 2 r_1 r_2) + \{ (r_1 + r_2)^2 + (x_1 + x_2)^2 \} (s + s^2 + \dots) \right]
 \end{aligned}$$

()内の第1項はsに逆比例し、第2項は定数、第3項は $(s + s^2 + s^3 + \dots)$ に比例する。sを横軸として V^2 のグラフを描くと図2ようになる。ただし、①、②、③はそれぞれ()内の第1、2、3項を示す。

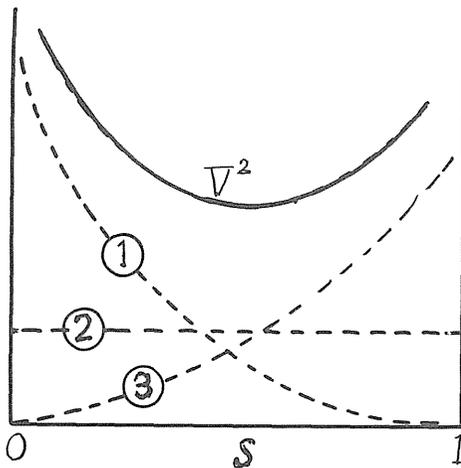


Fig. 2 $V^2 - s$ curve.

右より第3項があるため V^2 には最小値が存在する。負荷を増して行き T_{max} 以上にすると停止してしまうので定常の運転状態は $0 < s < s_m$ の範囲に限られる。 s_m とは T_{max} のときの滑りのことで $r_2 / \sqrt{r_1^2 + (x_1 + x_2)^2}$ に等しいことは前にのべてある。カゴ形におけるsの値は1よりはるかに低いので第3項は省略して論じてよい。

すると V^2 は $1/s +$ 定数に比例するので

$$s = \frac{1}{a V^2 - b} \quad \dots\dots\dots(11)$$

ただし、 $a = \frac{m}{p r_2}$, $b = (r_1^2 + 2 r_1 r_2) / r_2^2$

が成立する。次に、(10)を(3)の平方で割ると

$$\begin{aligned}
 \frac{P}{I_2^2} &= \frac{m r_2 s (1 - s) V^2}{(s r_1 + r_2)^2 + s^2 (x_1 + x_2)^2} \\
 &= \frac{m r_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right)}{s^2 V^2} \\
 \therefore I &\doteq I_2 = \sqrt{\frac{P}{m r_2 (1/s - 1)}} = \sqrt{\frac{P}{m r_2 (a V^2 - b - 1)}} \\
 &= \frac{P}{m \sqrt{V^2 - (b + 1) / a}} \quad \dots\dots\dots(12)
 \end{aligned}$$

(11)、(12)こそは筆者が新しく求めた関係式である。(12)式は電圧が下がると電流が増すことを示し、実際の現象と合致している。前述の文献(1)によると $I = V \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$ となっているが、これでは単なるインピーダンスと同じことで、印加した電圧に比例して電流が増減することになり事実誤認か説明不足か疑問の点がある。

4. 一定出力でない場合の滑りと電流

前項は負荷Pが一定という条件のもとに導かれた理論であるが、実際の負荷においてはこの条件の成立することは少ない。強いてあげれば、旋盤、中ぐり盤および研磨機のような工作機械の場合である。したがって、大ていの場合負荷の「トルク-速度」特性(T-n曲線)より駆動状態が定められる。

図3において、曲線M、Lはそれぞれ電動機と負荷のT-n曲線を表すものとする。両者の交点より上の任意の速度 n_1 の状態では、MのトルクがLのそれより小となるので速度は低下する。逆に、交点より下の速度 n_2 の状態では、MのトルクがLの要求するトルクを上まわるので加速され速度は上昇する。結局、MとLの交点に寄って来て安定に運転が持続される。しかし、M曲線とL曲線との位置の関係が変わり、交点より下の部分でLがMの右側に来る場合は、交点より遠ざかるように動作点が移動し安定なる運転は期待できぬ。

3相誘導電動機のT-n曲線は(6)式におけるsの代りに $1 - n / ns$ として代入して生ずるT-nの関係グラフにすればよい。これは図4における実線のようになり、

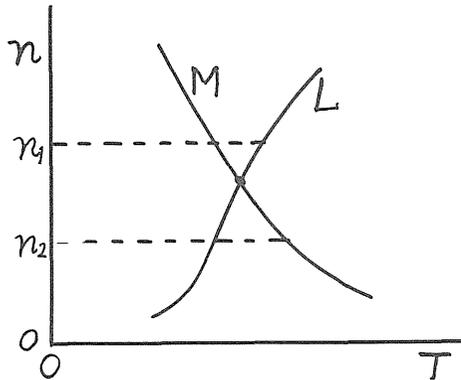


Fig. 3 The relation between the T-n curve of a motor and that of load.

起動トルクが極めて小さいことがわかる。したがって、交通機関や巻上機の運転のように起動トルクを必要とするものは起動できない。換気扇のようなものは、無負荷に等しいような低トルクで起動し、回転が速くなるにしたがい空気を押しよける仕事がありますので（凡そ速度の2乗に比例）、図4の点線のようなT-n曲線となる。駆動状態は実線と点線の交点を動作点とするものになる。

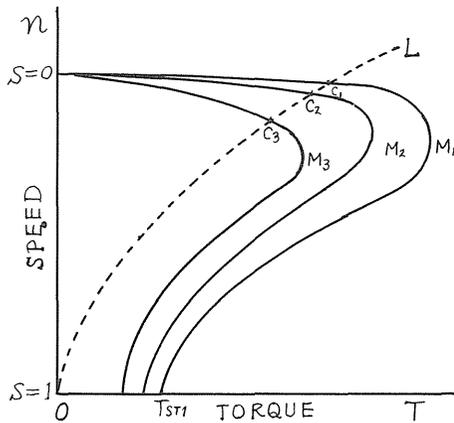


Fig. 4 The moving of the working point due to the source voltage change.

電源電圧が変化する場合は、電動機のT-n曲線はM₁, M₂, M₃, ……と変るがこれに応じた各々の交点もC₁, C₂, C₃, ……となり、それぞれに対応する滑りもS₁, S₂, S₃, ……も定まる。このように電源電圧Vと滑りSとの間の関係は負荷のT-n曲線を与えて後、求ま

るものである。

Vとsの関係はグラフによらず数式を扱うだけでも求まる。

負荷のT-n曲線の例として $T = dn^2$ 、(ただし、dは比例定数)を用いて求めて見る。 $n = n_s(1-s)$ であるから

$$T = dn_s^2(1-s)^2$$

これの右辺と(6)式の右辺とを等しいとおき

$$dn_s^2(1-s)^2 = \frac{mps r_2 V^2}{9.8 \times 4 \pi f \{ (s r_1 + r_2)^2 + s^2 (x_1 + x_2)^2 \}}$$

$$\therefore V^2 = 9.8 \times 4 \pi \times \frac{f dn_s^2}{mp r_2} \times \frac{(1-s)^2}{s} \times \{ (s r_1 + r_2)^2 + s^2 (x_1 + x_2)^2 \} \dots\dots\dots(13)$$

これはVがSの関数であることを示すもので、逆にSがVの関数ともなり「滑りは電源電圧にてどう変わるか」をも示す。この結果からはSはVの複雑な陰関数となっているので、電算機によりグラフにして利用するほかないと思われる。

しかし(13)式の平方根を $1 \gg S$ を用いて少し強力に近似して行くと

$$V = n_s \sqrt{\frac{9.8 \times 4 \pi f d}{mp r_2} (1-s) \left[\frac{1}{s} (s r_1 + r_2)^2 + s^2 (x_1 + x_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\doteq h \frac{1-s}{\sqrt{s}} \left(1 + 2 \frac{r_1}{r_2} s \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ただし、} h = n_s \sqrt{\frac{9.8 \times 4 \pi f d r_2}{mp}}$$

$$\doteq h \left(1 - s + \frac{r_1}{r_2} s - \frac{r_1}{r_2} s \right) \frac{1}{\sqrt{s}}$$

$$\doteq h \frac{1}{\sqrt{s}}$$

$$\therefore s = \frac{h^2}{V^2} \quad (\text{ただし、} h = n_s \sqrt{\frac{9.8 \times 4 \pi f d r_2}{mp}}) \dots\dots\dots(14)$$

また、電流については

$$\dot{V} = (r_1 + j x_1) \dot{I} + (s r_2 + j x_2) \dot{I}_2$$

$$\doteq (r_1 + j x_1) \dot{I} + (s r_2 + j x_2) \dot{I}$$

の関係を用い

$$I = \frac{V}{\sqrt{(r_1 + s r_2)^2 + (x_1 + x_2)^2}} \dots\dots\dots(15)$$

これに(14)を入れ

$$\therefore I = \frac{V}{\sqrt{\left(r_1 + r_2 \frac{h^2}{V^2}\right)^2 + (x_1 + x_2)^2}} \dots\dots\dots(16)$$

これで(14), (16)が導かれたので、滑りおよび電流の電源電圧に対する関係が求まった。

参 考 文 献

1) 例えば、電気工学ハンドブック p. 599

2) JISC4210 によれば全負荷すべりは

低圧普通かご形	{	3.7 kw 出力にて 6 ~ 6.5 %
		2.2 " 6.5 ~ 7 %
		1.5 " 7 ~ 8 %
低圧特殊かご形	{	15 kw 出力にて 5.5 %
		11 " 5.5 ~ 6 %
		5.5. " 6 %