# 閉値域をもつ作用素

中本　律男*

（昭和55年9月8日受理）

## Operators with Closed Range

RITSUO NAKAMOTO

*Abstract* — In a separable infinite dimensional Hilbert space, an operator does not necessarily have closed range, contrary to the finite case.

In [2], M. Embry proved that if a hyponormal operator has closed range, its any power does also.

In this paper we shall extend a theorem of Embry and give some results on operators with closed range.

**1.** 可分な無限次元ヒルベルト空間上の作用素を考えるとき，有限次元の場合に反して，いつも閉値域をもつとは限らない。たとえ閉値域をもつ作用素を考えたとしても，そのベキ乗や積に関して，値域が閉じているとは言いえない（〔1〕を参照）。

M. Embryは〔2〕でhyponormal作用素が閉値域をもてば，そのすべてのベキ乗もやはり閉値域をもつことを示している。

この小論では，Embryの一定理を拡張すると共に，閉値域に関連した性質を述べる。

**2.** $\boldsymbol{H}$を可分な無限次元ヒルベルト空間とし，$\boldsymbol{H}$上の（有界線形）作用素の全体を$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$で書くことにする。$T\in\boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$の値域を$\mathrm{R}(T)$，核を$\mathrm{N}(T)=\{x\in\boldsymbol{H};\ Tx=0\}$で表わすことにする。

閉値域をもつ作用素については次のことがよく知られている。

**補題1.** $T\in\boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$とするとき次の(1)～(3)は同値である。

(1) $\mathrm{R}(T)$が閉じている。

(2) ある$C\in\boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$が存在して，$T=TCT$とかける。

(3) ある$\delta>0$が存在して，

$$\|Tf\|\geqq\delta\|f\|,\quad f\in\mathrm{N}(T)^{\perp}$$

を満足する。

補題1の条件の一つが満たされるとき，$T$のpseudo-inverseと呼ばれる唯一つの$T^{+}$が存在して，次の式で特徴付けられる。

$$T=TT^{+}T,\ T^{+}=T^{+}TT^{+},\ (TT^{+})^{*}=TT^{+},\ (T^{+}T)^{*}=T^{+}T$$

$T^{+}T$は$\mathrm{R}(T^{*})$への，$TT^{+}$は$\mathrm{R}(T)$への射影作用素になっている（〔5〕を参照）。

$T\in\boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$がascent 0 or 1であるとは$\mathrm{N}(T)=\mathrm{N}(T^{2})$を満足するときを言う。

**補題2.** $T\in\boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$がascent 0 or 1であるとする。もしある正の整数nに対して$\mathrm{R}(T^{n})$が閉じていると$\mathrm{R}(T^{k})$（$1\leqq k\leqq n$）も閉じている。

**証明.** 仮定によって，ある$C\in\boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$が存在して$T^{n}=T^{n}CT^{n}$となる。このとき$T$がascent or 1であるので$\mathrm{N}(T)=\mathrm{N}(T^{\ell})$（$\ell=1,2,\cdots$）が分り，$T^{n}(1-CT^{n})=0$より$T(1-CT^{n})=0$，即ち，$T=TCT^{n-1}T$が出て，補題1より$R(T)$は閉じている。

同様にして$1<k<n$なる$k$についても$\mathrm{R}(T^{k})$が閉じていることが分る。

$T$がk－paranormal作用素であるとは，任意の$f\in\boldsymbol{H}$に対して，

＊ 茨城大学工学部応用数学科（日立市中成沢町）

$Tf\|^{k}\| \leqq \|T^{k}f\| \cdot \|f\|^{k-1}$
を満足するときを言う。2−paranormalは単に paranormalと言われている。hyponormal作用素は paranormal作用素で，paranormal 作用素は k−paranormal作用素であることはよく知られている(〔4〕を参照)。

補題3. $T \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$ が k−paranormal 作用素であれば ascent 0 or 1である。

証明. $T$ が k−paranormalなので，$x \in \mathrm{N}(T^{k})$ に対して，不等式 $Tx\|^{k} \leqq \|T^{k}x\| \cdot \|x\|^{k-1}$ より $Tx=0$，即ち $x \in \mathrm{N}(T)$ となる。

ところで，一般に $\mathrm{N}(T) \subseteq \mathrm{N}(T^{2}) \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{N}(T^{k}) \subseteq \cdots$ が言えるので，$\mathrm{N}(T)=\mathrm{N}(T^{2})$ となり結論を得る。

定理1. $T \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$ が paranormal 作用素とする。もしある正の整数kに対して，$\mathrm{R}(T^{k})$ が閉じていれば，$\mathrm{R}(T^{n})$ はすべての正の整数nについて閉じている。

証明. $T$ が paranormal 作用素であれば k−paranormal ($k=3, 4, \cdots$) 作用素であるので補題1, 2, 3より $\|Tf\| \geqq \delta \|f\|$，$f \in \mathrm{N}(T)^{\perp}$ なる $\delta>0$ が存在する。従って，すべての正の整数nについて，

$$\|T^{n}f\| \|f\|^{n-1} \geqq Tf\|^{n} \geqq \delta^{n} \|f\|^{n},$$
$$f \in \mathrm{N}(T)^{\perp}=\mathrm{N}(T^{n})^{\perp}$$

が成立する。即ち，任意の $f \in \mathrm{N}(T^{n})$ に対して $\|T^{n}f\| \geqq \delta^{n} \|f\|$ が成立するので，$T^{n}$ は閉値域をもつことが分る。

3. この節では，閉値域をもつ作用素に関連した結果を述べる。

$A \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$ がもし逆元をもって，$T \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$ が $\|T\|<1/\|A^{-1}\|$ を満足するとき，$A+T$ は逆元をもつことはよく知られている事実である。この事に対応して，$A \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$ が閉値域をもち，$T \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$ が $\|T\|<1/\|A^{+}\|$ を満足するとき $T+A$ は閉値域をもつであろうか？ 残念ながらこれが言えないことは，例えば，$\boldsymbol{M}$ と $\boldsymbol{N}$ を $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}$ が閉集合でない $\boldsymbol{H}$ の閉部分空間とする。このような部分空間の存在は〔7. §15〕に与えられている。今，$\boldsymbol{M}$ と $\boldsymbol{N}$ へのそれぞれの射影作用素を $P$，$Q$ として，$\|\alpha P\|<\|Q\|=1$ なる $0<\alpha<1$ をとる。

ところで，一般に，“$A$，$B \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$ を共に閉値域をもつ正値作用素とすれば，$A+B$ が閉値域をもつ必要十分条件は $\mathrm{R}(A)+\mathrm{R}(B)$ が閉じていることである。”(〔3. P. 261〕)と言うことが知られている。

$\alpha P$，$Q$ について，$\mathrm{R}(\alpha P)=\boldsymbol{M}$，$\mathrm{R}(Q)=\boldsymbol{N}$ なので，$T=\alpha P$，$A=Q$ とおけば，$\|T\|<1/\|A^{+}\|=1$ が満足されて，しかも $T+A$ は閉値域をもたないことが上の結果より分る。

しかし，次の事は分っている。

命題(〔9. P. 106〕). $S$，$A \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$ で $\|A\|<1$ とする。もし $S$ が等距離作用素 ($S^{*}S=1$) であれば，$S+A$ は閉値域をもつ。

証明. 仮定より，$\|1-(1+S^{*}A)\|=S^{*}A\| \leqq \|S^{*}\|\|A\|<1$ なので $1+S^{*}A$ は逆元をもつ。従って，ある $C \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$ が存在して $CS^{*}(S+A)=1$ が成立する。それ故，$(S+A)CS^{*}(S+A)=S+A$ が満足されるので，補題1より $S+A$ は閉値域をもつことが分る。

一般に，値域と次元については，次の事が成立つ。

定理2. $A \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$ が閉値域をもち，$T \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$ が $\|T\|<1/\|A^{+}\|$ を満すとする。このとき，

$$\dim \mathrm{R}(A+T) \geqq \dim \mathrm{R}(A)$$
$$\dim \mathrm{R}(A+T)^{*} \geqq \dim \mathrm{R}(A^{*})$$

が成立する。ここで dimは次元を表わすものとする。

証明. $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ を $\mathrm{R}(A)$ における任意の一次独立を集合とするとき，$(A+T)A^{+}u_1$，$(A+T)A^{+}u_2$，$\cdots$，$(A+T)A^{+}u_n$ が $\mathrm{R}(A+T)$ で一次独立であることを示す。

さて，$\sum_i \alpha_i (A+T)A^{+}u_i=0$ として $x=\sum_i \alpha_i u_i \neq 0$ とする。このとき，

$$
\begin{aligned}
0 &= \|\textstyle\sum \alpha_i (T+A)A^{+}u_i\| \\
&= \|(T+A)A^{+}x\| \\
&= \|TA^{+}x+AA^{+}x\| \\
&= \|x+TA^{+}x\| \\
&\qquad (\because x \in \mathrm{R}(A)=\mathrm{R}(AA^{+})) \\
&\geqq \|x\|-\|TA^{+}x\| \\
&> \|x\|-\|T\|\|A^{+}\|\|x\| \\
&= \|x\|-\|x\|=0
\end{aligned}
$$

これは明らかに矛盾である。従って $x=0$ となり

$\alpha_i = 0$ ( i=1, 2, …, n ) が分る。故に，dim R ( $A+T$ ) $\geqq$ dim R($A$)を得る。
同様の方法で，dim R ( ( $A+T$ )$^*$ ) $\geqq$ dim R ( $A^*$ ) が出てくる。

定理２の系として，

系１. $A$, $B \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$ が共に閉値域をもつとする。もし$A$, $B$が

$$\| A - B \| < 1 / \max \{ \| A^+ \|, \| B^+ \| \}$$

なる不等式を満たせば，dim R($A$) $\geq$ dim R($B$), dim R($A^*$) $\geq$ dim R($B^*$)が成立する。

証明．定理２で$T = A - B$とおけばよい。

系２. $P$, $Q \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$ を共に射影作用素とする。もし$P$, $Q$が

$$\| P - Q \| < 1$$

なる不等式を満たせば，rank $P$ = rank $Q$が成立する。

注意．系２は一般によく知られている(〔6：Problem 43〕)。

Kato−Moriyaは〔８〕でpseudo− inverseについて

$$\| A^+A - B^+B \| \leqq \| A - B \| \cdot \max \{ \| A^+ \|, \| B^+ \| \},$$

$$\| AA^+ - BB^+ \| \leqq \| A - B \| \cdot \max \{ \| A^+ \|, \| B^+ \| \}$$

なる不等式を証明している。

この不等式と系２を使えば系１が出ることが分る。

## 参　考　文　献


1) R. Bouldin, The products of operators with closed range, Tohoku Math. Jour., 25 (1973), 359-363.
2) M. R. Embry, Operators on Hilbert space with closed range, Preprint.
3) P. A. Fillmore and J. P. Williams, On operator ranges, Advances in Math., 7 (1971), 254-281.
4) T. Furuta, On the class of paranormal operators, Proc. Japan Acad., 43 (1967), 594-598.
5) C. Groetsch, Generalized inverses of linear operators, Representation and Approximation, Marcel Dekker, Inc. New York and Basel, 1977.
6) P. R. Halmos, A Hilbert Space Problem Book, Van Nostrand, 1967.
7) P. R. Halmos, Introduction to Hilbert space, Chelsea, New York, 1951.
8) Y. Kato and N. Moriya, Maeda's inequality of pseudo-inverses, Math. Japonica 22 (1977), 89-91.
9) A. L. Shields, Weighted shift operators and analytic function theory, Math. Survey 13 (1974), 51-128.