ブリッジに関連ある諸性質について

関 山 正 憲

On the Properties connected with the bridge

Masatoshi SEKIYAMA

Abstruct: The matters included in 2～7 chapter are the new properties connected with the bridge in the electrical measurements, I believe. The points of each chapter are as follows.

1. The extractions of the well-known properties about the bridge.
2. When a vacuum tube is used as the detector in a bridge instead of a galvanometer, the output impedance of the bridge becomes so large, that the sensible condition of the bridge changes from usual case.
3. How increase the deflection of the galvanometer in a bridge, when the power of source is so poor that the galvanometer deflects slightly.
4. On the relation between the Kelvin's method for the measurement of a galvanometer resistance and the balance condition of the bridge.
5. The enlargement of the Kelvin's method for the measurement of a galvanometer resistance.
6. How decrease the error, in measuring a galvanometer resistance by the Kelvin's method with a P. O. B.
7. On the cases in which the bridge are used other than the measurements.
8. About to the strain gage from some literature.

---

1. まえがき

電気的ブリッジは，電気計測における抵抗あるいはインピーダンスの測定に重要なものであるばかりでなく広く工業測定においても又大切な役割を果している。例えば，抵抗線歪計，ガス分析における熱伝導度法，電磁式電気ゲージ等々枚挙にいとまがない。従つてこれに関連した性質を纒めて見ることは決して無駄ではないと思い，取りあげて見た次第である。

ブリツジは，元来4つの辺と電源および検出器とから成つているが，電源が交流になると，検出器は検流計の代りに電話用受話器，振動検流計又は電磁オツシログラフの振動子などと変わる。辺も抵抗のみならずリアクタンスを含みインピーダンスとなる。従つて，ここでは直流の関係式を主体としてのべるが，交流の場合でも，電圧は $\dot{E}$，抵抗はインピーダンス $\dot{Z}$，電流は $\dot{I}$ などとそれぞれをベクトル値に読み変えることにより殆ど同様に扱えるので，原則として交流の場合は特記しないこととする。

又使用する記号を図1の如きものとする。

即ち，$PQRS$ を4つの辺とし，検出装置の入力抵抗を G，それに入る電流を I_g，電源の内部抵抗をも含め電源回路に直列に入る抵抗を B とする。

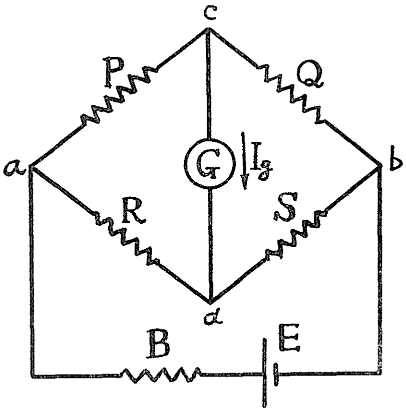

図 1

扨て，今までに知られているブリツジの性質を一通りあげて見ると

(a) $B \ll G$ では図2の如き配置のとき高感度となる。

(b) 平衡に近づく程 I_g の値は減少し，I_g の値は不平衡の程度に略比例する。

(c) 平衡状態にあるブリツジの2辺を同じ割合で変化せしめると，I_g は1辺のみを変化せしめたときの2倍又は0倍にて変わり2倍か0倍かは2辺間の相互の変化方向による。

(d) 電源と検流計の位置を互に交換してもその平衡条件は変わらない。

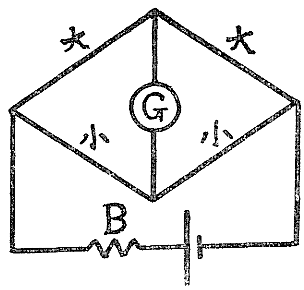

図 2

なお，これら (a) (b) (c) (d) の証明は一般の専門書に出ていて公知のものであるからここではふれないこととする。殊に (c) の性質については，抵抗線歪計等において詳細に究明せられている。これに関する検討は，8に述べることとして，先づ筆者が (a) (b) (c) (d) 以外に新しく見出した性質をのべる。

2. 検出器のふれが電圧のみにより定まる場合

（検出器にかける前，電圧増巾するような場合でGは増巾器の入力インピーダンスに当る。）

2.1 $G \to \infty$ の場合

$c\ d$ 間の電圧を V とすると図3にて

$$\begin{cases} V = -PI_1 + RI_2 \\ (P+Q)I_1 = (R+S)I_2 \\ B(I_1+I_2)+(P+Q)I_1 = E \end{cases}$$

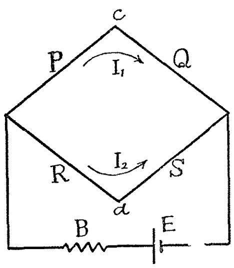

図 3

$$I_1=\frac{E}{B+P+Q+\dfrac{B(P+Q)}{R+S}},\quad I_2=\frac{P+Q}{R+S}I_1$$

$$\therefore V=\frac{-PE}{B+P+Q+\dfrac{B(P+Q)}{R+S}}+\frac{R(P+Q)}{R+S}$$

$$\times\frac{E}{B+P+Q+\dfrac{B(P+Q)}{R+S}}$$

$$=\frac{(QR-PS)E}{B(P+Q+R+S)+(P+Q)(R+S)}$$

これを大にするには，B を小さくし，$P+Q$, $R+S$ も小とする。

2.2　$G\neq\infty$ なる場合

図4において G にかかる電圧を大にする方法を考える。

$$(1+\varepsilon)PS=QR \qquad \varepsilon\text{: 不平衡率}$$

$$I_g=\frac{QR\varepsilon E}{\varDelta}$$

ただし，$\varDelta=BG(P+Q+R+S)$
$+G(P+Q)(R+S)+B(P+R)(Q+S)$
$+PQ(R+S)+RS(P+Q)$

$$\text{出力電圧}=GI_g=QR\varepsilon E\frac{G}{\varDelta}$$

これを大にするには $\varDelta/G$ を小にすればよいが，これに $P\fallingdotseq Q$, $R\fallingdotseq S$ の関係を入れると

$$\frac{\varDelta}{G}\fallingdotseq\left(2+\frac{P+R}{G}\right)[B(P+R)+2PR]$$

故に「B を小にする」，「G を大にする」，「$P\fallingdotseq R$ とし P を小にする」の3つを満足する程 $\varDelta/G$ を小さくできる。

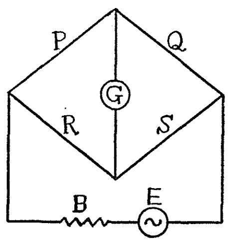

図　4

3. B と G を知り平衡点附近で高感度を得る条件

電源の内部抵抗 B と検流計抵抗 G とが与えられ，平衡間際にて高感度を得る方法である。ただし，わづかの不平衡に対し検流計のふれを大にすることではなく，電源が微小電力なるに拘らず如何に有効に検流計をふらすかを考える場合とする。

ブリッジは図5の如く4端子網と等価と考えられるから，それの入力側と出力側とを影像インピーダンスで結んでいる状態にすれば，電源より最大の電力を G に供給できる。従つて，4

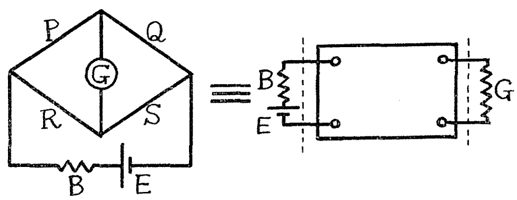

図　5

端子網の入力側から見たインピーダンスが B, 出力側から見たインピーダンスを G と等しくし，これに平衡点附近という条件を合わすと次の連立方程式が得られる。

$$
\begin{cases}
B=\sqrt{\left(\dfrac{PR}{P+R}+\dfrac{QS}{Q+S}\right)\times\dfrac{(P+Q)(R+S)}{P+Q+R+S}} \\
G=\sqrt{\left(\dfrac{PQ}{P+Q}+\dfrac{RS}{R+S}\right)\times\dfrac{(P+R)(Q+R)}{P+Q+R+S}} \\
PS=QR
\end{cases}
$$

これらより

$$
BG=\frac{PQ(R+S)+RS(P+Q)}{P+Q+R+S}=\frac{PQ\left(\dfrac{PS}{Q}+S\right)+\dfrac{PS^2}{Q}(P+Q)}{P+Q+\dfrac{PS}{Q}+S}=PS
$$

$$
\therefore\quad P=\frac{BG}{S}
$$

$$
\frac{G}{B}=\frac{(P+R)(Q+S)}{(P+Q)(Q+S)}=\frac{(P+\frac{PS}{Q})(Q+S)}{(P+Q)(\frac{PS}{Q}+S)}=\frac{P}{S}\times\frac{(Q+S)^2}{(P+Q)^2}=\frac{BG(Q+S)^2}{(BG+QS)^2}
$$

$$
(BG+QS)^2=B^2(Q+S)^2 \qquad BG+QS=B(Q+S)
$$

$$
\therefore\quad Q=\frac{S-G}{S-B}B
$$

$$
\therefore\quad R=\frac{PS}{Q}=\frac{S-B}{S-G}G
$$

従つて $P=\dfrac{BG}{S}$, $Q=\dfrac{S-G}{S-B}B$, $R=\dfrac{S-B}{S-G}G$ なる如く P, Q, R をえらべばよい。

前記連立方程式は，反対側の端子間を短絡したときのインピーダンスと開放したときのインピーダンスとの幾何学的平均が影像インピーダンスに当るという性質を用いて立てたものであるが，反対側端子に B 又は G を接続したときのインピーダンスを G 又は B に等しいと置いても立てられる。この際，$\Delta-y$ 変換を用いる。

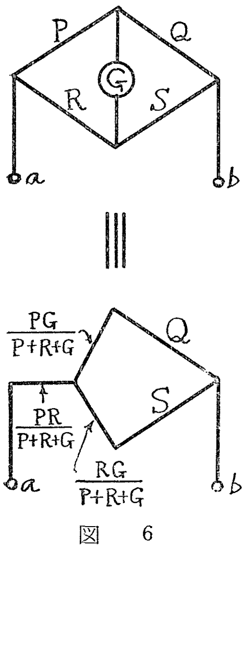

図　6

即ち，図6より $c\,d$ 間に G をつないだとき $a\,b$ よりブリツジ側を見たインピーダンスは

$$
r_{ab}=\frac{PG}{P+R+G}+\frac{\left(\dfrac{PG}{P+R+G}+Q\right)\left(\dfrac{PG}{P+R+G}+S\right)}{\left(\dfrac{PG}{P+R+G}+Q\right)\left(\dfrac{PG}{P+R+G}+S\right)}
$$

$$
=\frac{G(P+Q)(R+S)+QS(P+R)+PR(Q+S)}{G(P+Q+R+S)+(P+R)(Q+S)}
$$

$a\,b$ 間に B をつないだとき，$c\,d$ よりブリツジを見たインピーダンスは図7より

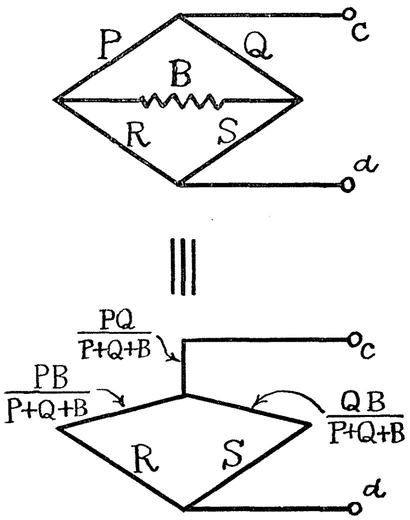

図　7

$$r_{cd}=\frac{PQ}{P+Q+B}+\frac{\left(\frac{PB}{P+Q+B}+R\right)\left(\frac{QB}{P+Q+B}+B\right)}{\left(\frac{PB}{P+Q+B}+R\right)\left(\frac{QB}{P+Q+B}+B\right)}$$

$$=\frac{B(P+R)(Q+S)+PQ(R+S)+RS(P+Q)}{B(P+Q+R+S)+(P+Q)(R+S)}$$

求めた r_{ab} および r_{cd} に平衡点附近で使用するという条件　$PS=QR$　を入れ

$$B=\frac{G(P+Q)(R+\frac{QR}{P})+Q\frac{QR}{P}(P+R)+PR(Q+\frac{QR}{P})}{G(P+Q+R+\frac{QR}{P})+(P+R)(Q+\frac{QR}{P})}=\frac{(P+Q)R}{P+R}\quad\cdots\text{①}$$

$$G=\frac{B(P+R)(Q+\frac{QR}{P})+PQ(R+\frac{QR}{P})+R\frac{QR}{P}(P+Q)}{B(P+Q+R+\frac{QR}{P})+(P+Q)(R+\frac{QR}{P})}=\frac{(P+R)Q}{P+Q}\quad\cdots\text{②}$$

これら2式の積をつくると

$$BG=\frac{(P+Q)R}{P+R}\times\frac{(P+R)Q}{P+Q}=QR=PS\qquad\therefore\quad P=\frac{BG}{S}$$

①は変形すると

$$B=\frac{PR+QR}{P+R}=\frac{PR+PS}{P+R}=\frac{R+S}{1+\frac{RS}{BG}}$$

$$B+\frac{RS}{G}=R+S\qquad\therefore\quad R=\frac{S-B}{S-G}G$$

②は変形すると

$$G=\frac{(P+R)Q}{P+Q}=\frac{PQ+PS}{P+Q}=\frac{Q+S}{1+\frac{QS}{BG}}$$

$$G+\frac{QS}{B}=Q+S\qquad\therefore\quad Q=\frac{S-G}{S-B}B$$

故に同じ結果が得られた。

4.　ケルビン法と平衡条件との関係

抵抗をホイートストンブリッジにて測定するには，不平衡電流を検出すべき検流計を必要とする。若し，被測抵抗が検流計抵抗の場合は，回路内に2ケの検流計が存在すること

になるが，抵抗を測定せんとする検流計で検出用のそれを兼ねる場合をケルビン法と称する。これは，図8の如くブリツジの1辺に検流計を組みこんだとき，キー K を開らいたときの検流計電流と閉じたときのそれとが等しいときは $PG=QR$ なる関係が成立するのでGの値が求められるというものである。この際ブリツジの平衡条件と同じ，$PG=QR$ が成立することの証明は，一般の電気計測の本に記載されているので，重記しないが，要するに

［K を開らいたときの I_g］＝［Kを閉じたときの I_g］

の関係式をつくり，以下克明に計算していけば到達できる。

然るに，筆者の経験によれば，次の如き論法をもつて証明し得たとする学生を時々見うける。即ち，

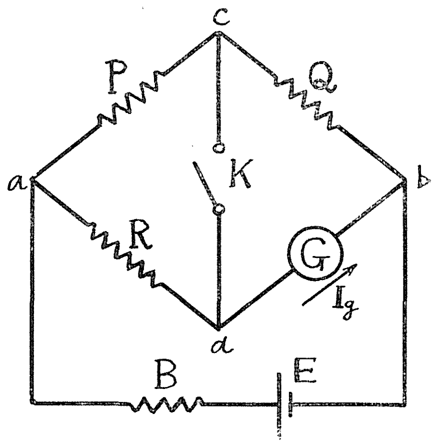

図　8

「K を開らいても閉じても I_g が変らないのだから，Ⓖによる電圧降下は一定，E も B も定数だから，R にかかる電圧は一定である。従つて，K が開らいているとき R にながれる電流 I_g と同じものが，K を閉じたときにも R にながれる。従つて，K を通つて電流はながれない。即ち，平衡条件 $PG=QR$ が成立する。」

これには誤りがある。E と B は定数でも R にかかる電圧は一定とは決論できないからである。なんとなれば，電源よりながれ出す電流は，K を閉じたときと開らいたときとで等しいかどうかわからぬから，B における電圧降下が同一なることを言えぬためである。

ただし，この逆は成立する。即ち

K を開らいても閉じても等しい電流が電源よりながれ出すときは $PG=QR$ が成立する。

証明して見よう。電源からながれ出す電流が等しいことは，ab にてブリツジ側を見たインピーダンスが K を開らいても閉じても等しいことだから

$$\frac{PR}{P+R}+\frac{QG}{Q+G}=\frac{(P+Q)(R+G)}{(P+Q)+(R+G)}$$

これを展開し P の降羃の順にならべると

$$-G^2P^2+2QGRP-Q^2R^2=0$$

$$(PG-QR)^2=0 \qquad \therefore\ PG=QR$$

5.　ケルビン法の拡張

ケルビン法では，キー K を開らいたり閉じたりして I_g が変わらなければ $PG=QR$ とする。cd 間の抵抗は K を開らいたとき ∞ で，閉じたとき零と考えてよいが，それを可変抵抗 r で置き換え変化せしめたとき，検流計電流 I_g が変わらなければ，やはり $PG=QR$ なる関係は成立し G を求められる。これはケルビン法を拡張したものに相当する。K を閉じたとき接点間に接触抵抗があつて完全に零にならなくても，K の端子間の

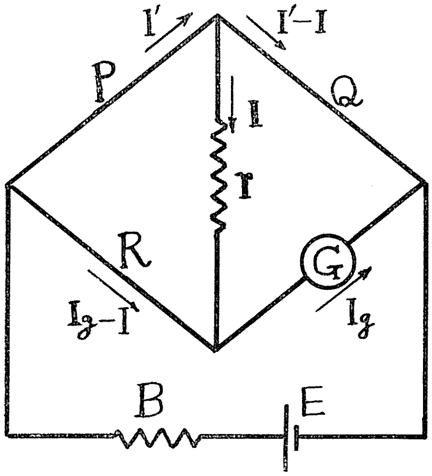

図　9

絶縁が不良でも差支えなく $PG=QR$ が成立するので具合がよい。

図9は K の代りに r とおいたもので，r の電流を I，P の電流を I' とすると Q には $I'-I$，R には I_g-I がながれる。キルヒホッフの法則により

$$\begin{cases} PI'+rI = R(I_g-I) \\ rI+GI_g = Q(I'-I) \\ B(I'+I_g-I)+R(I_g-I)+GI_g = E \end{cases}$$

これは I，I'，I_g について3元1次方程式である。I_g を求めると

$$I_g = \frac{[r(P+Q)+Q(P+R)]E}{r[P(B+R+G)+BG+RB+Q(B+R+G)]+(B+R+G)(PQ+QR)-R^2Q+BGR+PG(B+R)}$$

これが r の如何に拘らず一定なるためには

$$\frac{P(B+R+G)+BG+RB+Q(B+R+G)}{P+Q}=\frac{(B+R+G)(PQ+QR)-R^2Q+BGR+PG(B+R)}{Q(P+R)}$$

なればよい。分母を払い因数分解を行うと

$$(QR-PG)[B(P+R)+R(P+Q)]=0$$

$[\ \ ]\fallingdotseq 0$　なる故　$QR-PG=0$

故に　$PG=QR$　の平衡条件を導き出し得た。

6. ケルビン法にて誤差を減らすべき辺の関係

図8においてケルビン法を実施するには，キー K を開らいたときの検流計電流 I_g と閉じたときのそれ I_g' とが等しくなるような辺関係を見出す。実際上その点が求めにくいときは，K を開らいた状態で R を種々変え各々に対する I_g を求め I_g-R 曲線を描く。次に K を閉じた状態で同様にして $I_g'-R$ 曲線を描き両曲線の交点を求めて出せる。図10の如し。この際，両曲線の方向係数の差が大なる程，交点がはっきり出るので誤差が少くなる。

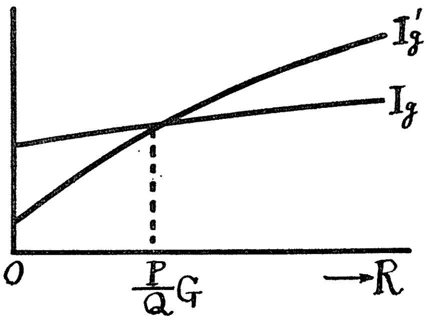

図　10

I_g は図8より

$$I_g=\frac{E}{\dfrac{(P+Q)(R+G)}{P+Q+R+G}+B}\times\frac{P+Q}{P+Q+R+G}=\frac{E}{(R+G)\left(1+\dfrac{B}{P+Q}\right)+B}$$

$$\frac{dI_g}{dR}=\frac{-\left(1+\frac{B}{P+Q}\right)E}{\left[(R+G)\left(1+\frac{B}{P+Q}\right)+B\right]^2}$$

$$\left[\frac{dI_g}{dR}\right]_{R=\frac{P}{Q}G}=\frac{-(P+Q+B)E}{\left[\frac{G}{Q}(P+Q+B)+B\right]^2(P+Q)}$$

これは交点における I_g 曲線の方向係数である。同様にして I_g' の方を求める。

$$I_g'=\frac{E}{\frac{PR}{P+R}+\frac{QG}{Q+G}+B}\times\frac{Q}{Q+G}$$

$$\frac{dI'_g}{dR}=\frac{-QE}{\left[R+\left(1+\frac{R}{P}\right)\left(\frac{QG}{Q+G}+B\right)\right]^2(Q+G)}$$

$$\left[\frac{dI_g'}{dR}\right]_{R=\frac{P}{Q}G}=\frac{-QE}{\left[\frac{G}{Q}(P+Q+B)+B\right]^2(Q+G)}$$

故に I_g, I_g' 曲線の交点における方向係数の差は

$$\left|\left[\frac{dI_g}{dR}\right]_{R=\frac{P}{Q}G}-\left[\frac{dI_g'}{dR}\right]_{R=\frac{P}{Q}G}\right|$$

$$=\frac{-(P+Q+B)E}{\left[\frac{G}{Q}(P+Q+B)+B\right]^2(P+Q)}-\frac{-QE}{\left[\frac{G}{Q}(P+Q+B)+B\right]^2(Q+G)}$$

$$=\frac{E}{\left[\frac{G}{Q}(P+Q+B)+B\right]\left(1+\frac{G}{Q}\right)(P+Q)}$$

この値を最大にする条件を考える。この分母を W とし，$Q=\mu G$, $P=\lambda Q$ とすると

$$W=\left[\frac{1}{\mu}(\lambda\mu G+\mu G+B)+B\right]\left(1+\frac{1}{\mu}\right)(\lambda\mu G+\mu G)$$

$$=G(1+\lambda)(1+\mu)\left[G(1+\lambda)+B\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\right]$$

計算の結果 $\frac{\partial W}{\partial\lambda}$ は正ではあるが零にはならぬので P と Q の割合を変えても無駄である。　然るに

$$\frac{\partial W}{\partial\mu}=G(1+\lambda)\left[G(1+\lambda)+B\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\right]+G(1+\lambda)(1+\mu)B\frac{-1}{\mu^2}$$

$$=G(1+\lambda)\left[G(1+\lambda)+B\left(1+\frac{1}{\mu}\right)-\frac{1+\mu}{\mu^2}B\right]$$

これは零になり得る。零とおいて B を求めると

$$B=\frac{GQ(P+Q)}{G^2-Q^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

これを満足するようにすれば方向係数の差を最大にできる。

ブリッジとして $P.O.B$ を用いると，P と Q とは比例辺なので 10^{Ω}, 100^{Ω}, 1000^{Ω} の何れかの値を有する。又 B は正だから③式の分母を正とするため，500^{Ω} 位の G に対し

1000^{Ω} はとれぬ。故に Q は 100^{Ω} か 10^{Ω} の何れかであるから $G^2-Q^2 \fallingdotseq G^2$

従つて　$B \fallingdotseq \dfrac{Q(P+Q)}{G}$

これを満足する P, Q, B の値を $G=500^{\Omega}$ の場合につき求めて見ると

$Q=100^{\Omega}$ のとき $P=10^{\Omega}$ なら $B=\dfrac{100(10+100)}{500}=22^{\Omega}$

100^{Ω} なら $B=\dfrac{100(100+100)}{500}=40^{\Omega}$

1000^{Ω} なら $B=\dfrac{100(1000+100)}{500}=220^{\Omega}$

$Q=10^{\Omega}$ のとき $P=10^{\Omega}$ なら $B=\dfrac{10}{500}(10+10)=0.4^{\Omega}$

100^{Ω} なら $B=\dfrac{10}{500}(100+10)=2.2^{\Omega}$

1000^{Ω} なら $B=\dfrac{10}{500}(1000+10)=20.2^{\Omega}$

とするのがよい。

7. 測定以外の場合でブリツジの採用される例

トランジスタや真空管へ入力信号を加えると，その出力としては入力に対応するものの外に直流分が附加される。この直流分が目的を阻害するときは，その分を引き去るため図11の如く出力電流計(mA)に並列に別の補償回路をつけねばならない。こうすると電源が2ケ入用となるが，直列になるので分圧して用いれば1ケですむ。図12の如く，結局ブリツジとなる。又，図12にて直流電源と(mA)の位置を交換したものでも同じことがいえる。

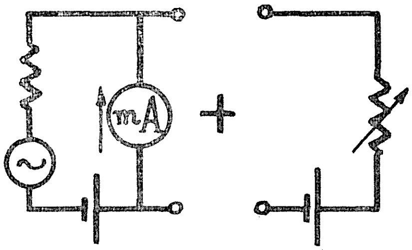

図　11

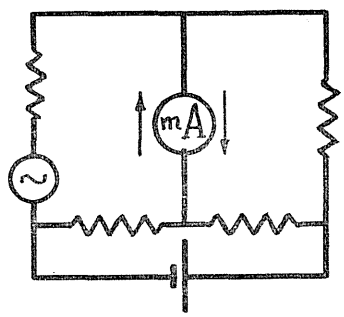

図　12

ただし，これらの回路ではブリツジの1辺に真空管又はトランジスタの内部抵抗を含んでいるので，電源電圧や温度の影響が表われる。この影響を減ずるにはブリツジ4辺のうちの2辺に同一特性の真空管なりトランジスタを用い，入力信号をそのうち1方にのみ入れればよい。図13に示す真空管電圧計の回路の如く，カソードフオロワーとしても成立する。

次に入力信号を1方にのみ入れず，両方に同時にしかも180°位相を変えて入れると，プツシユプル回路と称するものになる。図14の如く2ケの真空管と2ケの負荷抵抗がブリツ

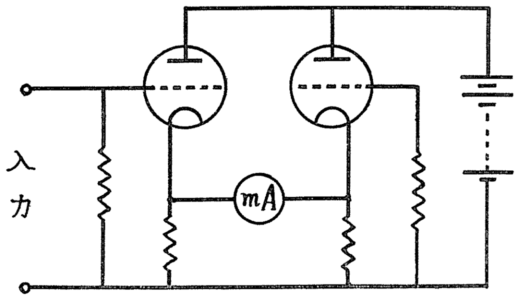

図 13

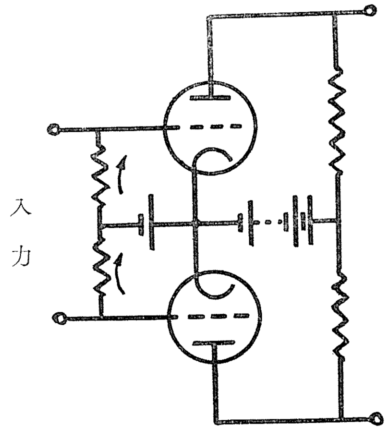

図 14

ジを形成している。この際，負荷抵抗がインダクタンスになつても同様で，中央にタツプのある出力変圧器でもよい。入力側の位相を上下で180°異らすには変圧器を用いてもよい。

入力側を変圧器にして，位相が180°異る入力の外に位相の同じ別の入力を重ねた場合，図15の如き平衡変調器となる。これもブリツジの一種であつて，同位相の入力 $\dot{E}_\omega$ のみが加えられても平衡がとれていて出力のないようにしておく。180°位相の異る入力 $\dot{E}_p$ が入ると平衡がくづれ出力側に $\dot{E}_\omega$ に応じたものが漏洩するのである。

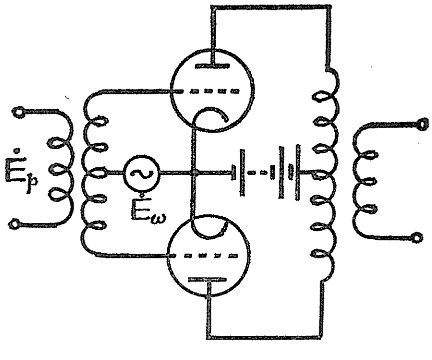

図 15

ブリツジの辺に整流器を含んでいても平衡する。リングモジユレータやカワン接続はこの例である。

既に7中にのべた如く，電源電圧や温度の影響を除くため真空管を2本用いる例，又は抵抗線歪計にて，温度補償を行うため active gage の近くに，それと特性の等しい別の gage を歪がかからぬように (dummy gage として) 取り付けて相隣れる2辺とする方法等は，辺を変動せしめる現象が2つある場合，そのうち一つの影響を取除かんとする試みである。この種のものの性質は皆似通つているから次の例を代表として究明して見る。

同様な2つの白金線を2辺としその片方に風を当てる。風の当る方が active gage で当らぬ方が dummy gage に当る。温度の影響は両方同時に与えられるようにする。白金線以外の2辺は抵抗 R とし風も温度も影響し得ないものとする。図1の場合の検流計電流は

$$I_g=\frac{(QR-PS)E}{BG(P+Q+R+S)+G(P+Q)(R+S)+B(P+R)(Q+S)+PQ(R+S)+RS(P+Q)}$$

風により抵抗の変わる割合を ε，温度により変わる割合を μ とすると，この I_g の式にて

$$P\to P(1+\varepsilon)(1+\mu),\qquad Q\to P(1+\mu),\qquad S\to R$$

として代入すればよい。そのときの辺の関係は図16の如くなる。結局これの検流計電流は

$$I_g=\frac{-P(1+\mu)R\varepsilon E}{P^2(1+\mu)^2(1+\varepsilon)(B+2R)+P(1+\mu)(2+\varepsilon)(BG+2GR+BR+R^2)+BR(2G+R)}$$

$$=\frac{-R\varepsilon E}{P(1+\mu)(1+\varepsilon)(B+2R)+(2+\varepsilon)(BG+2GR+BR+R^2)+\dfrac{BR}{P(+\mu)}(2G+R)}$$

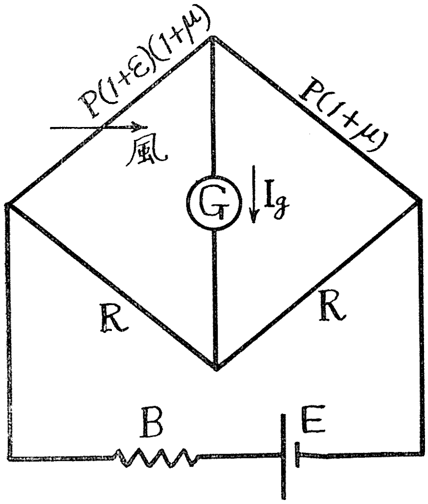

図　16

μ の文字を依然含んでいるので完全に温度補償の不可能なることを示している。

なるべく補償効果を大にするには μ の変化に対する分母の変化の最小なる如くすればよい。分母を D とすると

$$\frac{\partial D}{\partial\mu}=P(1+\varepsilon)(B+2R)-\frac{BR(2G+R)}{P(1+\mu)^2}=0$$

$$\frac{BR(2G+R)}{P^2(1+\varepsilon)(B+2R)}=(1+\mu)^2\fallingdotseq 1+2\mu$$

白金線の抵抗温度係数を小さいとして 2μ を1に対し省略し，かつ $1\gg\varepsilon$ とすると

$$BR(2G+R)\fallingdotseq P^2(B+2R)$$

これが補償効果を高める。

8.　抵抗線歪計の問題[1]

8.1　出力電圧と内部抵抗の公式

図3のブリツジを図17の如く $a\ b$ を入力側，$c\ d$ を出力側とする4端子網として考える。入力電圧を E とすると，$c\ d$ 間開放の場合の出力電圧は次の式で示される。

$$V=\frac{QR-PS}{(P+Q)(R+S)}E$$

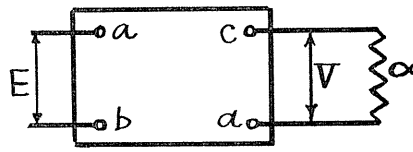

図　17

これは2.1の V の式にて $B=0$ とおくと求まる。

ブリツジの辺を strain gage（抵抗線歪計の素子）とし，各辺が歪を受け $P\to P+\varDelta P$, $Q\to Q+\varDelta Q$, $R\to R+\varDelta R$, $S\to S+\varDelta S$ となつたときは，出力電圧も変わり $V\to V+\varDelta V$ となる。また，V は P, Q, R, S の関数であるから

$$\varDelta V=\frac{\partial V}{\partial P}\varDelta P+\frac{\partial V}{\partial Q}\varDelta Q+\frac{\partial V}{\partial R}\varDelta R+\frac{\partial V}{\partial S}\varDelta S$$

然るに

$$\frac{\partial V}{\partial P}=\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{QR-PS}{(P+Q)(R+S)}\right)=\frac{-QE}{(P+Q)^2}$$

同様にして

$$\frac{\partial V}{\partial Q}=\frac{PE}{(P+Q)^2},\quad\frac{\partial V}{\partial R}=\frac{SE}{(R+S)^2},\quad\frac{\partial V}{\partial S}=\frac{-RE}{(R+S)^2}$$

$$\therefore\quad \Delta V=\frac{-QE}{(P+Q)^2}\Delta P+\frac{PE}{(P+Q)^2}\Delta Q+\frac{SE}{(R+S)^2}\Delta R-\frac{RE}{(R+S)^2}\Delta S$$
$$=\frac{PQ}{(P+Q)^2}\left(\frac{\Delta Q}{Q}-\frac{\Delta P}{P}\right)+\frac{RS}{(R+S)^2}\left(\frac{\Delta R}{R}-\frac{\Delta S}{S}\right)$$

若し，歪を加えないときに平衡 $(PS=QR)$ せしめてあつたとすると，そのときは $V=0$ だから，歪ませたときの出力電圧は

$$e=[\Delta V]_{S=\frac{QR}{P}}=\frac{PQ}{(P+Q)^2}\left(\frac{\Delta Q}{Q}-\frac{\Delta P}{P}\right)+\frac{R\frac{QR}{P}}{R+\frac{QR}{P}}\left(\frac{\Delta R}{R}-\frac{\Delta S}{S}\right)$$
$$=\frac{PQ}{(P+Q)^2}\left(\frac{\Delta Q}{Q}-\frac{\Delta P}{P}+\frac{\Delta R}{R}-\frac{\Delta S}{S}\right)$$
$$\propto \text{各辺の歪}$$

この上更に $P=Q$ なる条件があると $R=S$ となり（この場合は対称励振と称せられる。）

$$e=\frac{E}{4}\left(\frac{\Delta Q}{Q}-\frac{\Delta P}{P}+\frac{\Delta R}{R}-\frac{\Delta S}{S}\right)$$

となる。これは，出力電圧は各辺の値に無関係でただ歪のみに関係することを示す。

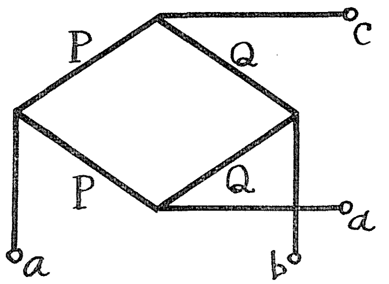

図　18

次に非対称励振と称せられる $P=R$ の場合を考えよう。$Q=S$ が成立し図18の如くなる。

$$\frac{S}{R}=\frac{Q}{P}=a \quad \text{とおくと}$$

$$e=\frac{aE}{(1+a)^2}\left(\frac{\Delta Q}{Q}-\frac{\Delta P}{P}+\frac{\Delta R}{R}-\frac{\Delta S}{S}\right)$$

鳳テブナンの定理を用いて，$c\ d$ 間でブリツジる見ると図19の如くなり，$a\ b$ 間でブリツジを見ると図20の如くなる。

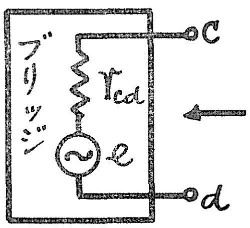

図　19

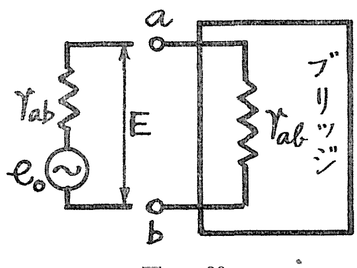

図　20

歪の測定は最初平衡せしめておいてから歪ませて測るので $PS=QR$ の条件が加わり

$$\begin{cases} r_{ab}=\dfrac{R(P+Q)}{P+R} & \cdots\cdots\cdots\cdots\ 3.\text{の①式} \\ r_{cd}=\dfrac{Q(P+R)}{P+Q} & \cdots\cdots\cdots\cdots\ 3.\text{の②式} \\ e=\dfrac{PQE}{(P+Q)^2}\left(\dfrac{\Delta Q}{Q}-\dfrac{\Delta P}{P}+\dfrac{\Delta R}{R}-\dfrac{\Delta S}{S}\right) & \end{cases}$$

対称励振（$P=Q$; $R=S$）のとき

$$\begin{cases} r_{ab} = \dfrac{R(P+Q)}{P+R} = \dfrac{R(2P)}{P+R} = \dfrac{2PR}{P+R} \\ r_{cd} = \dfrac{Q(P+R)}{P+Q} = \dfrac{P(P+R)}{2P} = \dfrac{P+R}{2} \\ e = \dfrac{E}{4}\left(\dfrac{\Delta Q}{Q} - \dfrac{\Delta P}{P} + \dfrac{\Delta R}{R} - \dfrac{\Delta S}{S}\right) \end{cases}$$

非対称励振（$P=R$, $Q=S=aP$）のとき

$$\begin{cases} r_{ab} = \dfrac{P(P+Q)}{2P} = \dfrac{P+Q}{2} = \dfrac{P+aP}{2} = \dfrac{1+a}{2}P \\ r_{cd} = \dfrac{aP(P+P)}{P+aP} = \dfrac{2a}{1+a}P \\ e = \dfrac{aE}{(1+a)^2}\left(\dfrac{\Delta Q}{Q} - \dfrac{\Delta P}{P} + \dfrac{\Delta R}{R} - \dfrac{\Delta S}{S}\right) \end{cases}$$

$P=Q=R=S$　のとき

$$\begin{cases} r_{ab} = P \\ r_{cd} = P \\ e = \dfrac{F}{4}\left(\dfrac{\Delta Q}{Q} - \dfrac{\Delta P}{P} + \dfrac{\Delta R}{R} - \dfrac{\Delta S}{S}\right) \end{cases}$$

以上の公式から strain gage が与えられると $\dfrac{\Delta P}{P}$, $\dfrac{\Delta Q}{Q}$ …… 等の抵抗変化率は知れるので e がわかる。又 r_{ab}, r_{cd} も知れるので組合すべき計器が求まる。

8.2 誤差の検討

$e \propto$ 歪　なる関係があるので，e を測定して歪が出せる。歪が出れば歪力も出せる。しかし，これは 1.の（b）の性質に利用したものであるから，不平衡の程度の増大するに従い誤差を生ずるものである。実用上どの程度まで差支えないか検討しておくのは大切なことである。ΔV を実際の歪による出力電圧とすると，前の e 式による場合の誤差は

$$\delta = \frac{e-\Delta V}{\Delta V} = \frac{e}{\Delta V} - 1$$

平衡点では　$PS = QR$　が，歪ますと

$P'S' \neq Q'R'$　となつたとすると

$$\Delta V = \frac{(Q'R'-P'S')E}{(P'+Q')(R'+S')} = \frac{[(Q+\Delta Q)(R+\Delta R)-(P+\Delta P)(S+\Delta S)]E}{(P+\Delta P+Q+\Delta Q)(R+\Delta R+S+\Delta S)}$$

$$= \frac{R\Delta Q+Q\Delta R+\Delta Q\Delta R-P\Delta S-S\Delta P-\Delta P\Delta S}{(P+Q+\Delta P+\Delta Q)(R+S+\Delta R+\Delta S)}E$$

(1)　P のみが変化する場合

$\Delta Q=\Delta R=\Delta S=0$　　$\Delta P\neq 0$　として ΔV の式に入れる。

$$\frac{e}{\Delta V} = \frac{PQE}{(P+Q)^2}\left(-\frac{\Delta P}{P}\right) \times \frac{(P+Q+\Delta P)(R+S)}{-S\Delta P E} = \frac{P+Q+\Delta P}{P+Q}$$

$$\therefore\ \delta = \frac{\Delta P}{P+Q}$$

対称励振のときは $\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta P}{P}\right)$

非対称励振のときは $\delta = \frac{1}{1+a}\left(\frac{\Delta P}{P}\right)$

従つて，対称励振の場合に e 式を用い 0.1%以内の誤差ならしむるには $\frac{\Delta P}{P} \leqq 2000 \times 10^{-6}$ の範囲で用いねばならぬ。

(2) P と Q が変化する場合

$$\frac{e}{\Delta V} = \frac{PQE}{(P+Q)^2}\left(\frac{\Delta Q}{Q} - \frac{\Delta P}{P}\right) \times \frac{(P+Q+\Delta P+\Delta Q)(R+S)}{R\Delta Q - \frac{QR}{P}\Delta P} = 1 + \frac{\Delta P + \Delta Q}{P+Q}$$

$$\therefore \quad \delta = \frac{e}{\Delta V} - 1 = \frac{\Delta P + \Delta Q}{P+Q}$$

対称励振では $\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta Q}{Q}\right)$

非対称励振では $\delta = \frac{1+\frac{\Delta Q}{\Delta P}}{1+a} \times \frac{\Delta P}{P}$

P が正に Q が負に変わると

対称励振では $\delta = 0$

非対称励振では $\delta = \frac{1-a}{1+a} \times \frac{\Delta P}{P}$

(3) P と Q が変わる場合

$$\frac{e}{\Delta V} = \frac{PQE}{(P+Q)^2}\left(-\frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta R}{R}\right) \times$$

$$\frac{(P+Q+\Delta P)(R+S+\Delta R)}{Q\Delta R - S\Delta P} = \frac{(P+Q+\Delta P)(P+Q+P\frac{\Delta R}{R})}{(P+Q)^2}$$

$$\delta = \frac{(P+Q)(P\Delta R + R\Delta P) + P\,\Delta P\,\Delta R}{R(P+Q)^2}$$

対称励振では $\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta R}{R}\right) + \frac{1}{4}\,\frac{\Delta P}{P}\,\frac{\Delta R}{R}$

非対称励振では $\delta = \frac{2}{1+a}\,\frac{\Delta P}{P} + \frac{1}{(1+a)^2}\left(\frac{\Delta P}{P}\right)^2$

P が 正に R が負に変わると

対称励振では $\delta = -\frac{1}{4}\,\frac{\Delta P}{P}\,\frac{\Delta R}{R} = -\frac{1}{4}\left(\frac{\Delta P}{P}\right)^2$

非対称励振では $\delta = \frac{2}{1+a}\,\frac{\Delta P}{P} + \frac{1}{(1+a)^2}\left(\frac{\Delta P}{P}\right)^2$

文　　献

(1) 共和技報 No, 44, 46, 50, 53