単位区間上の微分。III

芳賀義則*

（昭和63年8月31日受理）

Derivations on the Unit Interval. III

Yoshinori HAGA**

Abstract — Investigations on continuous-measure-valued derivations on the unit interval I are continued. If E is a closed subinterval of I, a derivation on C(I) induces a derivation δ_E on C(E), and then we first show that δ_E is closed if δ is closed. When the kernel of a closed derivation δ on I is composed of all constant functions, then secondly we show that, for a function $\alpha \in \mathscr{D}(\delta)$, if $\delta(\alpha)$ vanishes on a closed interval E of I then α is constant on E.

1．$\mathscr{A}$をC*環，$\mathscr{M}$をBanach空間とする。$\mathscr{A}\times\mathscr{M}$から$\mathscr{M}$への有界双線形写像

$$(A,\ m)\to mA,\quad (A,\ m)\to Am$$

で，$\mathscr{A}$の単位元Iに対しては$Im=mI=m$でありかつ3つの型の三重積A_1A_2m，A_1mA_2，mA_1A_2に対して結合則が成り立つとき，$\mathscr{M}$をBanach $\mathscr{A}$-加群という。このとき$\mathscr{A}$から$\mathscr{M}$への微分とは，定義域$\mathscr{D}(\delta)$が$\mathscr{A}$の稠密な部分環であるような線形写像$\delta:\mathscr{A}\to\mathscr{M}$であって，すべての$A$，$B\in\mathscr{D}(\delta)$に対していわゆる微分律

$$\delta(AB)=A\delta(B)+\delta(A)B$$

を満たすものをいう（[5]）。

特に$\mathscr{A}$としては単位区間I＝[0，1]上の実数値連続関数全体に一様収束ノルムを与えたC*環C(I)を，$\mathscr{M}$としてはC(I)の共役Banach空間すなわちI上のRadon測度全体の空間を考えて，$\alpha\in$ C(I)と$\mu\in$ M(I)との積$\alpha\mu\in$ M(I)を

$$(\alpha\mu)(\varphi)=\mu(\alpha\varphi)$$
$$=\int\alpha(t)\varphi(t)\mu(dt)\qquad(\varphi\in \mathrm{C(I)})$$

で定義することによりM(I)をBanachC(I)-加群と見ることができる。そして[1]，[2]においてI上の微分すなわち微分δ：C(I)→M(I)について幾つかの事実や例を示したが，さらに考察を進めることにする。なお定義域$\mathscr{D}(\delta)$は定数関数をすべて含むものとする。

測度$\mu\in$ M(I)はI上のLebesgue測度を基準として，絶対連続，連続特異，離散的の3種の測度に一意的に分割できるが，それに対応してI上の微分δを

$$\delta(\alpha)=A(\alpha)+S(\alpha)+D(\alpha)\quad(\alpha\in\mathscr{D}(\delta))$$

と一意的に分割できる。ただし，$A(\alpha)$，$S(\alpha)$，$D(\alpha)$はそれぞれ測度$\delta(\alpha)$の絶対連続部分，連続特異部分，離散部分であって，A, S, Dは共にI上の微分になる。

[2]においては主に離散部分について考察し，特に常に0である自明な微分以外の離散測度値微分は閉微分であり得ないことも示した。従って閉微分は離散部分を含まない。また閉微分については[1]において[6]の議論をたどって，基礎的な部分についてはC(I)→C(I)の微分とほとんど類似の性質が成り立つことを示した。一方C(I)→C(I)の閉微分については常に閉拡張が存在する（[6] Theorem3.2.5）が，[2]においてはそれと全く反対の性質として，標準的な閉微分d：C(I)→M(I)（$\mathscr{D}(d)$＝CV(I)）には閉拡張が存在しないことを示した。

今回は主としてI上の閉微分をIの閉部分区間Eに制限した場合についての性質を調べることにする。

＊茨城大学工学部共通講座（応用数学）（日立市中成沢町）
＊＊Common Chairs (Applied Mathematics), Faculty of Engineering, Ibaraki University, Hitachi 316, Japan

2．δ：C(I)→M(I)が閉微分ならば定義域$\mathscr{D}(\delta)$はノルム$\|\alpha\|_\delta=\|\alpha\|+\|\delta(\alpha)\|$によってBanach環になる。しかもそのスペクトルはIであって$\mathscr{D}(\delta)$はこのノルムでI上のSilov環になる。すなわちIの閉集合Fと$t_0\in F^c$に対して$\alpha|F=0$，$\alpha(t_0)=1$となる$\alpha\in\mathscr{D}(\delta)$が存在する。これによってまた$\alpha\in\mathscr{D}(\delta)$がIの開集合U上で定数値をとるならば$\delta(\alpha)$はU上の測度として0であることが分かる([1] 定理2，定理3)。

従っていまEをIの閉部分区間とすると$\alpha|E=\beta|E$ならば$\delta(\alpha)|E=\delta(\beta)|E$となるから

$$\delta_E(\alpha|E)=(\delta(\alpha))|E \quad (\alpha\in\mathscr{D}(\delta))$$

によってE上の微分すなわちδ_E：C(E)→M(E)が一意に定義される。定義域は

$$\mathscr{D}(\delta_E)=\{\alpha|E:\alpha\in\mathscr{D}(\delta)\}$$

である。閉微分の構造を調べるためにはこのδ_Eも閉微分になることを知る必要がある。そのためにまず[4] Lem.1，Lem.2，[6] Lem.2.2.1と類似の次の補題を示そう。

補題1． δ：C(I)→M(I)を閉微分とし，$\alpha_1, \alpha_2\in\mathscr{D}(\delta)$が一点$t_0\in(0,1)$において$\alpha_1(t_0)=\alpha_2(t_0)$を満たすとする。このとき

$$\tilde\alpha(t)=\begin{cases}\alpha_1(t) & (t\in[0, t_0])\\ \alpha_2(t) & (t\in[t_0, 1])\end{cases}$$

によって$\tilde\alpha\in C(I)$を定義し，Iの任意のBorel集合Bに対し

$$\mu(B)=\delta(\alpha_1)(B\cap[0, t_0])+\delta(\alpha_2)(B\cap[t_0, 1])$$

によって$\mu\in M(I)$を定義すれば，$\tilde\alpha\in\mathscr{D}(\delta)$かつ$\delta(\tilde\alpha)=\mu$である。

証明。まず$\alpha_2=0$の場合に証明すれば十分であることを示そう。実際この場合に補題が正しいとすれば$\alpha_1-\alpha_2$と0に対して適用することにより

$$\beta(t)=\begin{cases}\alpha_1(t)-\alpha_2(t) & (t\in[0, t_0])\\ 0 & (t\in[t_0, 1])\end{cases}$$

$$\nu(B)=\delta(\alpha_1-\alpha_2)(B\cap[0, t_0])$$

によってβとνを定義すれば$\alpha\in\mathscr{D}(\delta)$，$\delta(\beta)=\nu$となる。従って

$$\tilde\alpha=\beta+\alpha_2\in\mathscr{D}(\delta)$$

であって，Borel集合Bに対して

$$\begin{aligned}\delta(\tilde\alpha)(B)&=\delta(\beta)(B)+\delta(\alpha_2)(B)\\&=\delta(\alpha_1-\alpha_2)(B\cap[0, t_0])\\&\quad+\{\delta(\alpha_2)(B\cap[0, t_0])+\delta(\alpha_2)(B\cap[t_0, 1])\}\\&=\delta(\alpha_1)(B\cap[0, t_0])+\delta(\alpha_2)(B\cap[t_0, 1])\\&=\mu(B)\end{aligned}$$

となるから，$\delta(\tilde\alpha)=\mu$となり結論が得られる。

よって以下$\alpha_2=0$，$\alpha_1=\alpha$，$\alpha(t_0)=0$とする。

$$0<\varepsilon\leqq\frac{1}{2}\max\{|\alpha(t)|: 0\leqq t\leqq t_0\}$$

とし

$$\begin{aligned}a&=\max\{t\in[0, t_0]: |\alpha(t)|=2\varepsilon\}\\ b&=\min\{t\in[a, t_0]: |\alpha(t)|=\varepsilon\}\\ c&=\min\{\{1\}\cup\{t\in[t_0, 1]: |\alpha(t)|=\frac{\varepsilon}{3}\}\}\end{aligned}$$

とおく。必要ならばαを$-\alpha$に変えて

$$\alpha(a)=2\varepsilon,\ \alpha(b)=\varepsilon$$

としてよい。[2] の定理4により閉微分は連続測度であるから，任意の$\eta>0$に対しεを十分小さくとれば

$$|\delta(\alpha)|([a, t_0])\leqq\eta$$

とできる。[1] の定理2によれば，$\beta_1, \beta_2\in\mathscr{D}(\delta)$で

$$0\leqq\beta_1\leqq1,\quad 0\leqq\beta_2\leqq1$$

かつ

$$\beta_1(t)=\begin{cases}1 & (t\in[0, a])\\ 0 & (t\in[b, 1])\end{cases}$$

$$\beta_2(t)=\begin{cases}0 & (t\in[0, t_0])\\ -1 & (t\in[c, 1])\end{cases}$$

となるものが存在する。このとき

$$\gamma=\alpha+2\|\alpha\|(\beta_1+\beta_2)$$

とすると，$\gamma\in\mathscr{D}(\delta)$であって$[0, b]$では$\gamma(t)\geqq\varepsilon$である。実際

$$\gamma(t)=\alpha(t)+2\|\alpha\|(\beta_1(t)+\beta_2(t))$$

$$\geqq\begin{cases}\alpha(t)+2\|\alpha\|\geqq\|\alpha\|\geqq\varepsilon & (t\in[0, a])\\ \alpha(t)\geqq\varepsilon & (t\in[a, b])\end{cases}$$

また $[t_0,\ 1]$ では $\gamma(t) \leqq \frac{\varepsilon}{3}$ である。実際

$$\gamma(t) = \alpha(t) + 2\|\alpha\|\beta_2(t)$$

$$\leqq \begin{cases} \alpha(t) \leqq \frac{\varepsilon}{3} & (t \in [t_0,\ c\ ]) \\ \alpha(t) - 2\|\alpha\| \leqq \frac{\varepsilon}{3} & (t \in [\ c,\ 1]) \end{cases}$$

である。さらに $p \in C^1(R)$ は

$$0 \leqq p'(s) \leqq 2$$

$$p(s) = \begin{cases} s & (s \geqq \varepsilon) \\ 0 & (s \leqq \frac{\varepsilon}{3}) \end{cases}$$

であるとすると，$[0,\ b]$ では $\gamma(t) \geqq \varepsilon$，$\tilde{\alpha}(t) = \alpha(t)$ だから

$$\{p(\gamma) - (2\|\alpha\|\beta_1 + \tilde{\alpha})\}(t) = \gamma(t) - \gamma(t) = 0$$

であり，$[t_0,\ 1]$ では $\gamma(t) \leqq \frac{\varepsilon}{3}$，$\beta_1(t) = 0$，$\tilde{\alpha}(t) = 0$ だから

$$\{p(\gamma) - 2\|\alpha\|\beta_1 - \tilde{\alpha}\}(t) = 0$$

すなわち $[0,\ b] \cup [t_0,\ 1]$ において

$$p(\gamma) - 2\|\alpha\|\beta_1 - \tilde{\alpha} = 0$$

である。また $[b, t_0]$ では $\beta_1(t) = 0$，$\tilde{\alpha}(t) = \alpha(t)$ であることと，$|\gamma(t)| = |\alpha(t)| \leqq 2\varepsilon$ によって $|p(\gamma)(t)| \leqq 2\varepsilon$ となることから $t \in [b,\ t_0]$ において

$$|(p(\gamma) - 2\|\alpha\|\beta_1 - \alpha)(t)| \leqq |p(\gamma)(t)| + |\alpha(t)| \leqq 2\varepsilon + 2\varepsilon = 4\varepsilon$$

となる。[1]の定理1により $p(\gamma) \in \mathscr{D}(\delta)$ であり，Borel 集合 $B \subset [0,\ b] \cup [t_0,\ 1]$ に対しては

$$\{\delta(p(\gamma) - 2\|\alpha\|\beta_1) - \mu\}(B) = 0$$

である。なぜなら $B \subset [0,\ b]$ のときは

$$\mu(B) = \delta(\alpha)(B) = \delta(\tilde{\alpha})(B)$$

だから左辺は

$$\{\delta(p(\gamma) - 2\|\alpha\|\beta_1 - \tilde{\alpha})\}(B) = \delta(0)(B) = 0$$

であり，$B \subset [t_0,\ 1]$ のときは $p(\gamma) = 0$，$\beta_1 = 0$，$\mu = 0$ だからやはり左辺は 0 である。そして残りの区間 $[b,\ t_0]$ では

$$\begin{aligned} &|\delta(p(\gamma) - 2\|\alpha\|\beta_1) - \mu|(B) \\ &= |p'(\gamma)\delta(\gamma) - 2\|\alpha\|\delta(\beta_1) - \mu|(B) \\ &\leqq 2|\delta(\gamma)|(B) + 2\|\alpha\|\delta(\beta_1)(B) + |\delta(\alpha)|(B) \\ &= 2|\delta(\alpha)|(B) + 2\|\alpha\| \cdot 0 + |\delta(\alpha)|(B) \\ &= 3|\delta(\alpha)|(B) \leqq 3\eta \end{aligned}$$

となる。以上によって

$$\|(p(\gamma) - 2\|\alpha\|\beta_1) - \tilde{\alpha}\| \leqq 4\varepsilon$$
$$\|\delta(p(\gamma) - 2\|\alpha\|\beta_1) - \mu\| \leqq 3\eta$$

となる。ε，η は任意に小さくできるから，δ が閉であることにより

$$\tilde{\alpha} \in \mathscr{D}(\delta),\ \delta(\tilde{\alpha}) = \mu$$

となる。

補題 2． $\delta : C(I) \to M(I)$ を閉微分とし $E = [t_0,\ t_1]$ を I の閉部分区間とする。$\alpha \in \mathscr{D}(\delta_E)$ に対し

$$\tilde{\alpha}(t) = \begin{cases} \alpha(t_0) & (t \in [0,\ t_0]) \\ \alpha(t) & (t \in E = [t_0,\ t_1]) \\ \alpha(t_1) & (t \in [t_1,\ 1]) \end{cases}$$

によって $\tilde{\alpha}$ を定義すれば

$$\tilde{\alpha} \in \mathscr{D}(\delta),\ \delta(\tilde{\alpha})|E = \delta_E(\alpha)$$

である。

証明。$\mathscr{D}(\delta_E)$ の定義により $\beta|E = \alpha$ となる $\beta \in \mathscr{D}(\delta)$ が存在する。また定数関数が $\mathscr{D}(\delta)$ に属することは前提されているから，補題 1 により $\tilde{\alpha} \in \mathscr{D}(\delta)$ である。従って δ_E の定義により

$$\delta_E(\alpha) = \delta_E(\beta|E) = \delta(\beta)|E = \delta(\tilde{\alpha})|E$$

となる。

以上の準備の下で目標とする次の定理を示そう。

定理 3． $\delta : C(I) \to M(I)$ を閉微分，E を I の閉部分区間とすると δ_E も $C(E) \to M(E)$ の閉微分である。

証明。$E = [t_0,\ t_1]$ とする。$\{\alpha_n\}$ を $\mathscr{D}(\delta_E)$ の関数列とし $C(E)$ において $\alpha_n \to \alpha$，$M(E)$ において $\delta_E(\alpha_n) \to \mu$ であるとき $\alpha \in \mathscr{D}(\delta_E)$ かつ $\delta_E(\alpha) = \mu$ であることを示せばよい。

$$\tilde{\alpha}_n(t) = \begin{cases} \alpha_n(t_0) & (t \in [0,\ t_0]) \\ \alpha_n(t) & (t \in [t_0,\ t_1]) \\ \alpha_n(t_1) & (t \in [t_1,\ 1]) \end{cases}$$

とすると補題 2 により $\tilde{\alpha}_n \in \mathscr{D}(\delta)$ であり $\delta(\tilde{\alpha}_n)|E = \delta_E(\alpha_n)$ である。$C(I)$ において

$$\tilde{\alpha}_n(t) \to \alpha(t) = \begin{cases} \alpha(t_0) & (t \in [0, t_0]) \\ \alpha(t) & (t \in [t_0, t_1]) \\ \alpha(t_1) & (t \in [t_1, 1]) \end{cases}$$

であり$\delta(\tilde{\alpha}_n)$はM(I)でのCauchy列である。δが閉微分だから従って

$\tilde{\alpha} \in \mathscr{D}(\delta)$, $\delta(\tilde{\alpha}) = \lim \delta(\tilde{\alpha}_n)$

これをEに制限すれば，$\tilde{\alpha}|E = \alpha$, $\delta(\tilde{\alpha})|E = \delta_E(\alpha)$, $\lim \delta(\alpha_n)|E = \lim \delta_E(\alpha_n) = \mu$ であるから

$\alpha \in \mathscr{D}(\delta_E)$, $\delta_E(\alpha) = \mu$

が得られる。

なおまた［3］のLem.2.4,［6］のLem.2.2.4と同様に次の定理が成り立つ。

定理4． I上の閉微分δについてその核が$\mathscr{K}(\delta) = \{\lambda 1 : \lambda \in R\}$であるとする。EをIの閉部分区間として，Eの任意のBorel集合Bに対して$\delta(\alpha)(B) = 0$であるならばαはE上で定数である。

証明。αが$E = [t_0, t_1]$で定数でないとして見よう。必要によってはEの閉部分区間を考え，あるいはαの代りに$-\alpha$を考えることにより$\alpha(t_0) < \alpha(t)$としてよい。Eの閉部分区間を選んで

$$\alpha(t_0) < \min_F \alpha(t) < \max_F \alpha(t) < \alpha(t_1)$$

とし

$$M = \max_F \alpha(t), \quad m = \min_F \alpha(t)$$

とおく。

$$a = \max\{\{0\} \cup \{t \in [0, t_0] : \alpha(t) = m\}\}$$
$$b = \min\{\{1\} \cup \{t \in [t_1, 1] : \alpha(t) = M\}\}$$

とすると，$\mathscr{D}(\delta)$はSilov環（［1］定理2）であるから次のような関数$\beta \in \mathscr{D}(\delta)$が存在する。すなわち

$$-1 \leqq \beta(t) \leqq 0 \quad (t \in [a, t_0])$$
$$0 \leqq \beta(t) \leqq 1 \quad (t \in [t_1, b])$$

かつ

$$\beta(t) = \begin{cases} -1 & (t \in [0, a]) \\ 0 & (t \in [t_0, t_1]) \\ 1 & (t \in [b, 1]) \end{cases}$$

そこで

$\gamma = \alpha + 2\|\alpha\|\beta$

とおけば［1］の定理3とαに対する仮定により

$\delta(\gamma)|E = \delta(\alpha) + 2\|\alpha\|\delta(\beta) = 0$

であり，さらに$t \in [0, t_0] \cup [t_1, 1]$に対して

$\gamma(t) \notin [m, M]$

である。いまfをR上のC^1関数で$\mathrm{supp} f \in [m, M]$なるものとすれば［1］の定理1によって$f(\gamma) \in \mathscr{D}(\delta)$であって，しかも定数関数ではない。一方$[0, t_0] \cup [t_1, 1]$上では$f'(\gamma) = 0$だから

$\delta(f(\gamma)) = f'(\gamma)\delta(\gamma) = 0$

となって定理の条件に反する。

参 考 文 献

1）芳賀：単位区間上の微分. I, 茨城大学工学部研究集報, 34(1986), 171-174.

2）芳賀：単位区間上の微分. II, 茨城大学工学部研究集報, 35(1987), 209-213.

3）H. Kurose: An example of a non quasi well-behaved derivation in C(I), J. Funct. Anal., 43 (1981), 193〜201.

4）H. Kurose: Closed derivations in C(I), Tohoku Math. J., 35(1983), 341-347.

5）J. R. Ringrose: Automatic continuity of derivations of operator algebras, J. London Math. Soc. (2) 5(1972), 432-438.

6）J. Tomiyama: The theory of closed derivations in the algebra of continuous functions on the unit interval, Lecture at National Tsin Hua Univ., Taiwan, (1983).