一般回路でのポート短絡とそのイミタンス行列

西　尾　克　義*

（昭和62年8月31日受理）

Short Circuiting and the Immittance Matrix in a generalized Network

Katsuyoshi NISHIO*

Abstract − We concern with short circuiting in generalized network along the vector space approach developed in our earlier paper [4]. The ends of this report is to see that in shorting some ports the immittance matrix of the network is coincide with the shorted matrix, introduced by W.N. Anderson Jr and his collaborators. This fact is shown from two viewpoints, the first is from interconnective structure and the second is from minimal power principal.

1. まえがき

本研究は拙著の前論文〔4〕に引き続き抵抗だけの素子からなるpポート回路網のベルトル空間的立場からの接近である。この方法はマトロイド理論を適用する立場(例えば〔3〕)と等価であるうえにより初等的であることが最大の利点であろう。

電気回路網においてポートや素子のある部分を短絡することはグラフでは対応する辺を縮約することに当る。さらにはマトロイド理論においても縮約の概念が導入されている(例えば〔5〕)のでわれわれの立場においても一般回路の短絡操作が自然に定義されることになる。一方 W. N. Anderson 等は理想変成器を含むことも許される抵抗回路網について作用素論的な方法による研究を進め(〔1〕,〔2〕参照),その中で正作用素に対して短絡演算を定義している。われわれはベクトル空間的立場から一般回路のポートのある部分を縮約したとき，そのイミタンス行列は彼等の導入した短絡演算から導びかれたものと一致することを二通りの方法で確かめた。本稿はその報告である。なお以下においては冗長を省くために用語の定義等については〔4〕との重複を避ける。

2. 準　備

$\mathscr{E}$ をn次元ユークリッド空間, $E=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ を $\mathscr{E}$ の正規直交基底, $N=(\mathcal{V}, E_p, D)$ を nondegenerated クラス $\mathcal{N}$ に属する一般回路とし以下に於てこれらを固定する，ここで $\mathcal{V}$ は $\mathscr{E}$ の正則部分空間とし $E_p\,(\subset E)$ はポートに対応する基底を D は素子に対応する基底 $E\setminus E_p$ 上のイミタンスを与える非負対角行列を表す。

N のイミタンス行列 Z は $\mathcal{V}^{\perp}$の表現行列 $R=\begin{bmatrix} R_p \\ R_q \end{bmatrix}$

を用いて

$$Z=R_p[\,R_q^t\ D^{-1}R_q\,]^{-1}R_p^t \tag{1}$$

と表わされる(記号を簡素にするために〔4〕で使った R_p^*, R_q^*を上式では R_p, R_qを用いた)。(1) で与えられる行列はパラマウント性をもつ(〔4〕定理2.2)ことからイミタンス行列は常に非負定値行列となることはよく知られている。

今基底 E の部分集合 F に対し $\mathscr{F}=\mathrm{span}\,F$ とし $\mathscr{F}$ への直交射影を P_F と表すとき $\mathscr{E}$ の正則部分空間 $\mathcal{V}$ の $\mathscr{F}$ への射影 $P_F\mathcal{V}$, $\mathcal{V}\cap\mathscr{F}$ をそれぞれ$\mathscr{F}$の部

* 茨城大学工学部共通講座(数理情報工学)(日立市中成沢町)
Common Chairs (Numerical Science), Faculty of Engineering, Ibaraki University, Hitachi 316, Japan

分空間と見做し $\mathcal{V}$ の F への制限，$\mathcal{V}$ の F への縮約と呼びそれぞれ $\mathcal{V}_{|F}$，$\mathcal{V}_{.F}$ と表す。

補 題 1

$$\mathcal{V}_{.F} = \mathcal{F} \ominus \mathcal{V}^{\perp}{}_{|F}$$

証明 $x \in \mathcal{V}_{.F}$ とすると任意の $y \in \mathcal{V}^{\perp}{}_{|F}$ に対し，y はある $u \in \mathcal{V}^{\perp}$ によって $y = P_F u$ と表わされるから

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle_{\mathcal{F}} &= \langle x, P_F u \rangle \\ &= \langle P_F x, u \rangle \\ &= \langle x, u \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

ここで $\langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{F}}$ は $\mathcal{F}$ における内積を表し，$\langle\ ,\ \rangle$ はもとの $\mathcal{E}$ における内積を表す。従って，$x \in \mathcal{F} \ominus \mathcal{V}^{\perp}{}_{|F}$

逆に，$x \in \mathcal{F} \ominus \mathcal{V}^{\perp}{}_{|F}$ とすると任意の $u \in \mathcal{V}^{\perp}$ に対し，

$$\begin{aligned}\langle x, u \rangle &= \langle P_F x, u \rangle \\ &= \langle x, P_F u \rangle_{\mathcal{F}} \\ &= 0\end{aligned}$$

従って $x \in \mathcal{V}$ が解る。よって，$x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{V} = \mathcal{V}_{.F}$ が示された。 証明終り

注 意 1

$\mathcal{V}_{|F}$，$\mathcal{V}_{.F}$ は共に $\mathcal{F}$ の正則部分空間となる。実際，$\mathcal{V}_{|F}$ の表現行列として $\mathcal{V}$ の標準表現行列の F に係る行からなる部分行列をとれば完全単模行列であるから $\mathcal{V}_{|F}$ の正則性が解る。$\mathcal{V}_{.F}$ については上記の補題から同様に示される。

$\mathcal{E}$ 上の一般回路 $N = (\mathcal{V}, E_p, D)$ から誘導される $\mathcal{F}$ 上の一般回路 $N_F = (\mathcal{V}_{|F}, E_p \cap F, D_{|F})$ を N の F への縮約という。

上記の補題1は $(\mathcal{V}_{|F})^{\perp}$ の表現行列として $\mathcal{V}^{\perp}{}_{.F}$ の表現行列，即ち $\mathcal{V}^{\perp} \cap \mathcal{F}$ の列ベクトルからなる部分行列，を採ることを許し N とその縮約 N_F のイミタンス行列間の具体的な関係を与える。次の補題と系もまた両者のより精密な関係を与えるもので主定理の証明の折に有用なものとなる。

今，E の部分集合 G について，G がある $\mathcal{V}$ の補基に含まれるとき $\mathcal{V}$ に関する独立集合，そうでないときは従属集合と呼ぶ。

補 題 2

G は $\mathcal{V}$ に関する独立集合であるが $G \cup \{e\}$ は従属集合であるとき，$P_G f = 0$ を満す任意の $f \in \mathcal{V}$ に対して $\langle f, e \rangle = 0$ が成り立つ。

証明 $G \cup \{e\}$ が $\mathcal{V}$ に関して従属集合であるから〔4〕補題3.1により $\| g \| \subset G \cup \{e\}$ を満す $g \in \mathcal{V}^{\perp}$ が存在する。ここで $\|\ \|$ は support を表す。一方 G が独立集合であるから同じ補題により

$$\| g \| \cap (E \setminus G) \neq \phi$$

従って，$e \in \| g \|$ が解る。また $f \in \mathcal{V}$ が $P_G f = 0$ ならば

$$\| f \| \cap \| g \| \subset (E \setminus G) \cap (G \cup \{e\}) = \{e\}$$

であることから

$$\langle f, g \rangle = \langle f, e \rangle \langle e, g \rangle$$

が成り立つ。$f \in \mathcal{V}$ かつ $g \in \mathcal{V}^{\perp}$ より左辺は0，また $e \in \| g \|$ より $\langle e, g \rangle \neq 0$。従って，$\langle f, e \rangle = 0$ が示される。 証明終り

系 3

G は $\mathcal{V}$ に関する従属集合のとき，G_0 を G に含まれる極大な独立集合とすれば次が成り立つ。

$$\mathcal{V} \cap \mathrm{span}\,(E \setminus G) = \mathcal{V} \cap \mathrm{span}\,(E \setminus G_0)$$

証明 $G_0 \subset G$ より $E \setminus G \subset E \setminus G_0$ だから $\subset$ は明らか。逆に，$f \in \mathcal{V} \cap \mathrm{span}\,(E \setminus G_0)$ とする。任意の $e \in (E \setminus G_0) \setminus (E \setminus G) = G \setminus G_0$ に対して $G_0 \cup \{e\}$ は従属集合となる。また $f \in \mathcal{V}$ は $P_{G_0} f = 0$ を満す。従って補題2を G_0 について適用すれば $\langle f, e \rangle = 0$ が解る。従って，

$$\| f \| \cap (E \setminus G_0) \setminus (E \setminus G) = \phi$$

が成り立ち，よって $\| f \| \subset E \setminus G$ が示される。

証明終り

定 義

$\mathcal{E}$ 上の非負定値作用素 A と $\mathcal{E}$ の部分空間 $\mathcal{F}$ に

対し，次の２次形式

$$\langle A_{\mathscr{F}}x, x\rangle = \inf\{\langle A(x+y), x+y\rangle; y\in\mathscr{F}^{\perp}\} \quad (x\in\mathscr{F}) \tag{2}$$

によって定まる $\mathscr{F}$ 上の作用素 $A_{\mathscr{F}}$ を A の $\mathscr{F}$ への短絡作用素と呼ぶ。

A が行列の場合でもそれを $\mathscr{E}$ に関する作用素の表現と見做すことによって行列の短絡演算が定義される。

補　題　４（〔1〕）

A は非負定値行列とし，$\mathscr{E}$ の直和分解 $\mathscr{E}=\mathscr{F}\oplus\mathscr{F}^{\perp}$ に対応して A が $A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$ と表わされるとき，A_{22} が可逆であれば

$$A_{\mathscr{F}} = A_{11} - A_{12}\ A_{22}^{-1}\ A_{21}$$

補　題　５

補題と同様の仮定のもとで A も可逆であれば

$$(A^{-1})_{\mathscr{F}} = A_{11}^{-1}$$

証明　ブロック行列の逆行列の計算と上記補題から $A^{-1}=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}$ とおくと A_{11} が可逆であれば B_{22} も可逆となりその逆も成り立つ。さらに

$$\begin{aligned} A_{11} &= (B_{11} - B_{12}\ B_{22}^{-1}\ B_{21})^{-1} \\ &= ((A^{-1})_{\mathscr{F}})^{-1} \end{aligned}$$

も容易に示される。　証明終り

3. 主定理

前節までの準備のもとに次の定理を証明することが本稿の目的である。

定　理

一般回路 $N=(\mathcal{V}, E_p, D)\ (\in\mathscr{N})$ のイミタンス行列を Z とする。

$E\setminus E_p\subset F\subset E$ なる F に対し N の F への縮約 $N_F=(\mathcal{V}_{|F}, E_p\cap F, D)$ のイミタンス行列 Z_F は Z の $\mathscr{F}\cap\mathscr{E}_p$ への短絡行列 $Z_{\mathscr{F}\cap\mathscr{E}_p}$ と等しい，ここで $\mathscr{F}=\mathrm{span}F$，$\mathscr{E}_p=\mathrm{span}\mathscr{E}_p$ とする。

定理の証明に先立ち，$\mathcal{V}^{\perp}$ と $(\mathcal{V}_{|F})^{\perp}=\mathcal{V}^{\perp}\cap\mathscr{F}$ に関する表現行列の関連性を調べよう。

$E\setminus F$ に含まれる $\mathcal{V}^{\perp}$ に関する極大独立集合を採り，G_0 とする。さらに $G_0\subset E_0\subset E_p$ なる極大独立集合 E_0 へ拡大する。さらにまた E_0 を含む補基へ拡大しそれを T とすると $E=(E_p\cap F)\cup(E_p\setminus F)\cup F\setminus E_p$ なる分割に於て各項をさらに

$$E_p\setminus F = E\setminus F = G_0\cup G_1 \tag{3}$$

ここで $G_1=E\setminus(F\cup G_0)$，

$$E_p\cap F = (E_0\setminus G_0)\cup E_1 \tag{4}$$

ここで $E_1=(E_p\cap F)\setminus(E_0\setminus G_0)$，

$$F\setminus E_p = (T\setminus E_0)\cup F_1 \tag{5}$$

ここで $F_1=(F\setminus E_p)\setminus(T\setminus E_0)$，

と分割すると，この分割に対応する $\mathcal{V}^{\perp}$ の標準表現行列 R は次の形に表わされる：

$$R=\begin{array}{l} \left[\begin{array}{c:c:c} 1 & 0 & 0 \\ \hdashline R_1' & 0 & R_3' \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & R_3'' \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hdashline R_1 & R_2 & R_3 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} E_0\setminus G_0 \\ E_1 \\ G_0 \\ G_1 \\ T\setminus E_0 \\ F_1 \end{array} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} E\setminus F \end{array}\right\} E_p \\ \\ \\ \end{array}$$

実際，G_0，$E_0\setminus G_0$，$T\setminus E_0$ に係る行は $\mathcal{V}^{\perp}$ の補基をなすことにより単位行列の部分となる。G_1 に属する行の 0 は独立集合である G_0 との従属性により系３から導かれる。E_1 に属する行についても同様である。

上記の R から $(\mathcal{V}_{|F})^{\perp}$ の表現行列を求めよう。$(\mathcal{V}_{|F})^{\perp}=\mathcal{V}^{\perp}\cap\mathscr{F}$ より R の列ベクトルで support が F に含まれるものが $(\mathcal{V}_{|F})^{\perp}$ を張る。従って，表現行列 S として

$$S=\left[\begin{array}{c:c} 1 & 0 \\ \hdashline R_1' & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hdashline R_1 & R_2 \end{array}\right]$$

を採ることができる。定理の証明に入ろう。

定理の証明　$\mathcal{V}^{\perp}$，$(\mathcal{V}_{|F})^{\perp}$ の表現行列 R，S を

使うことにより Z, Z_F をそれぞれ(1)に従って計算すると

$$Z=\begin{bmatrix}1&0&0\\R_1'&0&R_3'\\0&0&1\\0&0&R_3''\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}0&R_1^t\\1&R_2^t\\0&R_3^t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_1&\\&D_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\R_1&R_2&R_3\end{bmatrix}\right\}^{-1}\begin{bmatrix}1&R_1'^t&0&0\\0&0&0&0\\0&R_3'^t&1&R_3''^t\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\R_1'&0&R_3'\\0&0&1\\0&0&R_3''\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{12}^t&A_{22}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&R_1'^t&0&0\\0&0&0&0\\0&R_3'^t&1&R_3''^t\end{bmatrix},$$

ここで

$$A_{11}=\begin{bmatrix}R_1^t D_2 R_1 & R_1^t D_2 R_2\\ R_2^t D_2 R_1 & D_1+R_2^t D_2 R_2\end{bmatrix},$$

$$A_{12}=\begin{bmatrix}R_1^t D_2 R_3\\ R_2^t D_2 R_3\end{bmatrix},\quad A_{22}=R_3^t D_2 R_3 .$$

$$Z_F=\begin{bmatrix}1&0\\R_1'&0\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}0&R_1^t\\1&R_2^t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_1&\\&D_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\R_1&R_2\end{bmatrix}\right\}^{-1}\begin{bmatrix}1&R_1'^t\\0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\R_1'&0\end{bmatrix}A_{11}^{-1}\begin{bmatrix}1&R_1'^t\\0&0\end{bmatrix}.$$

一方, Z の $\mathcal{F}\cap\mathcal{E}_p$ への短絡行列を(2)に従って計算すると

$$\langle Z_{\mathcal{F}\cap\mathcal{E}_p}x,x\rangle$$

$$=\inf\{\langle Z(x+y),x+y\rangle\ ;\ y\in\mathcal{E}_p\ominus(\mathcal{F}\cap\mathcal{E}_p)\}$$

$$=\inf_{y_1,y_2}\left\langle\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{12}^t&A_{22}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&R_1'^t&0&0\\0&0&0&0\\0&R_3'^t&1&R_3''^t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\y_1\\y_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&R_1'^t&0&0\\0&0&0&0\\0&R_3'^t&1&R_3''^t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\y_1\\y_2\end{bmatrix}\right\rangle$$

$$=\inf_{y_1,y_2}\left\langle\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{12}^t&A_{22}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x_1+R_1'^t x_2\\0\\R_3'^t x_2+y_1+y_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x_1+R_1'^t x_2\\0\\R_3'^t x_2+y_1+y_2\end{bmatrix}\right\rangle$$

$$=\left\langle A_{11}^{-1}\begin{bmatrix}x_1+R_1'^t x_2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x_1+R_1'^t x_2\\0\end{bmatrix}\right\rangle$$

$$=\langle Z_F\ x,\ x\rangle\quad(x\in\mathcal{F}\cap\mathcal{E}_p),$$

ここで $x=x_1\oplus x_2$, $y=y_1\oplus y_2$ はそれぞれ前述の E の分割(4), (3) に対応する空間の分割に従うものであり, 最後から2つ目の等号は補題5から導びかれる。

4. 主定理の別証明

本節では最小電力性の公式を使って主定理の別証明を与えよう。

補 題 6 (最小電力公式)

一般回路 $N=(\mathcal{V},E_p,D)$ $(\in\mathcal{N})$ のイミタンス行列 Z は

$$\langle Z\,x,x\rangle=\min\left\{\langle D\,y,\ y\rangle\ ;\ \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in\mathcal{V}\right\}\qquad(x\in\mathcal{E}_p)\quad(5)$$

を満す。

証明 $\mathcal{V}^{\perp}$ の表現行列を $R=\begin{bmatrix}R_p\\R_q\end{bmatrix}$ とし,

$y_0=-D^{-1}R_q[R_q^t D^{-1}R_q]^{-1}R_p^t x$ とおくと

$R_q^t\ y_0=-R_p^t\ x$ より $\begin{bmatrix}x\\y_0\end{bmatrix}\in\mathcal{V}$。さらに

$$\begin{aligned}\langle D\,y_0,\,y_0\rangle&=\langle -R_q[R_q^t\ D^{-1}\ R_q]^{-1}\ R_p^t\ x,\\ &\qquad -D^{-1}\ R_q\ [R_q^t\ D^{-1}\ R_q]^{-1}R_p^t\ x\rangle\\ &=\langle R_p\ [R_q^t\ D^{-1}\ R_q]^{-1}\ R_q^t\ x,x\rangle\\ &=\langle Z\ x,\ x\rangle\end{aligned}$$

が示される。後は y_0 が(5)の最小値を与えることを示せばよい。任意の $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in\mathcal{V}$ をとる。$\begin{bmatrix}0\\y-y_0\end{bmatrix}\in\mathcal{V}$ より $y-y_0\perp\mathrm{ran}\,R_q$。$Dy_0\in\mathrm{ran}\,R_q$ なので $\langle D\,y_0,\ y-y_0\rangle=0$。従って,

$$\begin{aligned}\langle D\,y,\ y\rangle&=\langle D(y_0+(y-y_0)),\ y_0+(y-y_0)\rangle\\ &=\langle D\,y_0,\ y_0\rangle+\langle D(y-y_0),\ y-y_0\rangle\\ &\geqslant\langle D\,y_0,\ y_0\rangle\end{aligned}$$

証明終り

主定理の別証明 N の縮約 $N_F=(\mathcal{V}|_F,\ E_p\cap F,\ D)$ のイミタンス行列 Z_F は最小電力性より

$$\langle Z_F\ x,\ x\rangle=\min\left\{\langle D\,y,\ y\rangle\ ;\ \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in P_F\mathcal{V}\right\}\qquad(x\in\mathcal{E}_p\cap\mathcal{F})$$

で与えられる。また $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in P_F \mathcal{V}$ に対し $\begin{bmatrix} x \\ v \\ y \end{bmatrix} \in \mathcal{V}$ かつ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P_F \begin{bmatrix} x \\ v \\ y \end{bmatrix}$ となる $v \in \mathscr{E}_p \cap \mathscr{F}^{\perp}$ がとれるから

$$\langle Z_F x, x \rangle = \inf_{y,v} \left\{ \langle D y, y \rangle ; \begin{bmatrix} x \\ v \\ y \end{bmatrix} \in \mathcal{V} \right\}$$

$$= \inf_{v} \left\{ \min_{y} \left\{ \langle D y, y \rangle ; \begin{bmatrix} x \\ v \\ y \end{bmatrix} \in \mathcal{V} \right\} \right\}$$

$$= \inf \left\{ \langle Z \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \rangle ; v \in \mathscr{E}_p \cap \mathscr{F}^{\perp} \right\}$$

$$= \langle Z_{\mathscr{E}_p \cap \mathscr{F}} x, x \rangle \quad (x \in \mathscr{E}_p \cap \mathscr{F}).$$

依って $Z_F = Z_{\mathscr{E}_p \cap \mathscr{F}}$ が示された。　証明終り

本節の証明は北大応用電気研究所安藤教授の示唆によるものであり，ここに感謝の意を表します。

参　考　文　献

1. W. N. Anderson, Jr, Shorted Operators, *SIAM J. appl. Math.* **20**, 520−525, 1971
2. W. N. Anderson Jr and G. E. Trapp, Shorted Operators II, *SIAM J. appl. Math.* **28**, 60−71, 1975
3. J. Bruno and L. Weinberg, Generalized Networks I, II, *Net-works*, **6**, 1976
4. 西尾，pポート抵抗回路網のベクトル空間的アプローチ，茨大工研究集報 **33** 巻，237−242，1985
5. W. T. Tutte, Introduction to the Theory of Matroids, Elsevier, 1971