作用素による近似についてII

中 本 律 男*

(昭和53年9月7日受理)

Approximation by Operators II

m_e

RITSUO NAKAMOTO

Abstract: — In the preceding paper [6], we have obtained some properties of dist (T, N). Very recently, Izumino [5] gave a characterization of anti-normal operators (dist $(T, N) = \|T\|$).

In this paper, firstly we shall give an another characterization of anti-normal operators. Secondly, we shall discuss approximating by G_1-operators with restricted spectra.

1. $\boldsymbol{B}(H)$を可分なヒルベルト空間H上の(有界線形)作用素の全体を表わすことにする。作用素$T\in\boldsymbol{B}(H)$を$\boldsymbol{B}(H)$の部分集合$\boldsymbol{S}$で一様ノルム近似することを考える。すなわち dist $(T, \boldsymbol{S}) = \inf\{\|T-S\| ; S\in\boldsymbol{S}\}$ を調べる。$\boldsymbol{N}$を正規作用素の全体とするとき,〔6〕において dist$(T, \boldsymbol{N})$のいくつかの性質を述べた。特に anti — normal 作用素と呼ばれているものの性質を与えたが,ごく最近になって,泉野は〔5〕で〔6〕の dist $(T, \boldsymbol{N})$ についての不等式を改良して,その結果, anti - normal 作用素の特性化を得ることに成功した。この小論ではまず最初に, anti - nornal 作用素の他の特徴付けを与える。次に,集合$\boldsymbol{S}$を制限されたスペクトルを持つG_1-条件と呼ばれるものを満す作用素の全体として,ある種の作用素を近似することを論ずる。

2. 作用素Tを$\boldsymbol{N}$で近似するとき, dist$(T, \boldsymbol{N}) = \|T\|$ なるTを anti - normal と呼んだが泉野は〔5〕で次の結果を得た。

定理1. 作用素$T\in\boldsymbol{B}(H)$ が $\mathrm{ind}\,T\neq 0$ を満足するとき,次の条件(1)~(4)は同値である:

(1) T は anti - normal である。

(2) $\mathrm{me}(T) = \inf\{\lambda ; \lambda\in\sigma_e(|T|)\}$ で $\sigma_e(|T|)$ を $|T|$ の Calkin algebra でのスペクトルを表わすとき $\|T\| = \mathrm{m_e}(T)$。

(3) $\boldsymbol{U}$をユニタリー作用素の全体としておけば

$$\mathrm{dist}(T, \boldsymbol{U}) = 1 + \|T\|。$$

そして,

(4) ある正数α, 等距離作用素W, $\|K\| \leqq 1$ なる正値コンパクト作用素Kが存在して

$$T = \alpha W(1 - K)$$

とかける。

〔6,系2〕で anti - normal 作用素Tのスペクトル$\sigma(T)$が$\sigma(T) = \{z ; |z| \leqq \|T\|\}$なることを示したがもっと強く,

定理2. $T\in\boldsymbol{B}(H)$が anti - normal 作用素である必要十分条件は,任意ユニタリー作用素Uに対して, $\sigma(UT) = \{z ; |z| \leqq \|T\|\}$ となることである。

証明. Tを anti - normal とすると〔6 ; 定理1〕より $\mathrm{ind}\,T\neq 0$ である。$\|T\| = 1$ として十分なので,定理1より,あるユニタリーでない等距離作用素Wと正値コンパクト作用素Kが存在して$T = W(1-K)$とかける。

* 茨城大学工学部応用数学科(日立市中成沢町)

今，$|z|<1$ とすると，$1-zW\overset{*}{U}$ は任意の ユニタリ一作用素Uに対して可逆である。そこで，

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}\,(\overset{*}{W}U(\overset{*}{U}T-z)) &= \mathrm{ind}\,(\overset{*}{W}T-z\overset{*}{W}U)\\ &= \mathrm{ind}\,(1-K-z\overset{*}{W}U)\\ &= \mathrm{ind}\,(1-z\overset{*}{W}U)\\ &= 0\end{aligned}$$

となる。故に

$$\mathrm{ind}\,(\overset{*}{U}T-z)=-\mathrm{ind}\,(\overset{*}{W}U)=\mathrm{ind}\,W<0$$

で，$\dim\ker\,(\overset{*}{T}U-\bar{z})\geqq 1$ となり $\bar{z}$ は $\overset{*}{T}U$ の固有値である。従って一般に，ユニタリ一作用素Uに対して

$$\sigma\,(UT)=\{\,z\ ;\ |z|\leqq\|T\|\,\}\text{ となる。}$$

逆に，$r(T)$をTのスペクトル半径としておけば，$U\in\boldsymbol{U}$に対して

$$\|T-U\|\geqq r(\overset{*}{U}T-1)=1+\|T\|$$

が満足されるので定理1よりTは anti - normal である。

3. ここでは，正規作用素，subnormal作用素を制限されたスペクトルをもつG_1一条件を満す作用素で近似することを考えて，それぞれが最良近似 (best approximant)を有することを示したい。

作用素Tが $\lambda\notin\sigma(T)$なる任意の複素数に対して，

$$\|(T-\lambda)^{-1}\|\leqq 1/\mathrm{dist}\,(\lambda,\ \sigma(T))$$

を満足するときTはG_1一条件を満すという。又はTをG_1一作用素と呼ぶ。

次に，Λ を複素平面$\boldsymbol{C}$ の中の空でない閉集合とする。$\boldsymbol{C}$からΛへの関数FがΛに対する (*distance - minimizing*)*retraction* とは，任意の$\lambda\in\Lambda$に対して，

$$|z-F(z)|\leqq|z-\lambda|,$$

すなわち.

$$|z-F(z)|\leqq\rho(z),\ \rho(z)=\mathrm{dist}\,(z,\Lambda)$$

を満足するときを言う。(〔3〕を参照)。

以下，次の補題を必要とする。

補題1(〔3；補題〕). Λを$\boldsymbol{C}$の中の空でない閉集合とするときΛに対するボレル可測な retraction F が存在する。

次の補題は〔2；定理〕で独立に証明されている。

補題2. 任意の作用素Tに対して，NをG_1一作用素とするとき

$$\sigma(T)\subseteq\{\,z\ ;\ \mathrm{dist}(z,\sigma(N))\leqq\|T-N\|\}$$

が成立する。

証明. 略す。

定理3. Λを任意の空でない閉集合とする。FをΛに対するボレル可測な retraction とするとき，正規作用素Aに対して，

(i) $\sigma\,(F\,(A))\subseteq\Lambda$,

(ii) Nを$\sigma(N)\subseteq\Lambda$なる任意の$G_1$一作用素とすると，

$$\|A-F\,(A)\|\leqq\|A-N\|$$

が成立する。

証明. (i)は既に〔3,定理〕で述べられているが，後者の証明の為に，概略を述べる。Aは正規作用素なので，あるL^2空間上の乗法作用素ϕと同一視される。このとき，Fの値域 range FはΛに含まれるので，range $F\cdot\phi\subseteq\Lambda$が分る。従って，ess. rang $F\circ\phi=\sigma(F(A))\subseteq\Lambda$となる。

(ii)について，$A-F(A)$はL^2空間上で$\phi-F\circ\phi$なる乗法作用素とみなされるので，$|\phi-F\circ\phi|\leqq\rho\circ\phi$ と $\phi(z)\subseteq\sigma_1(A)$, $\Lambda\supseteq\sigma_1(N)$より

$$\rho\circ\phi\leqq\mathrm{dist}\,(\phi(z),\sigma(N)\leqq\|A-N\|$$

なので，結局 $\|A-F(A)\|\leqq\|A-N\|$ を得る。

注意. 定理3は，Nが正規作用素のとき Halmos〔3〕で示されたものである。$G(\Lambda)$を$\sigma(T)\subseteq\Lambda$なる制限されたスペクトルをもつ$G_1$一作用素の全体として表わしておけば，$G_1$一作用素に対するスペクトルの連続性により$G(\Lambda)$は閉集合となる。定理3の(ii)は，任意の正規作用素が$G(\Lambda)$の中で最良近似をもつことを言っている。実際は，Λの中にスペクトルをもつ正規作用素$F(A)$が最良近似になっている。

作用素$T\in\boldsymbol{B}(H)$が subnormal 作用素であるとは，Hを含むヒルベルト空間Kと正規作用素$N\in\boldsymbol{B}(K)$が 存在して，ヒルベルト空間HでTとNが一致するときを言う。この subnormal 作用素は明らかに$\boldsymbol{N}$を含む一つの作用素の class である(〔4〕を参照)。

定理4. $T\in\boldsymbol{B}(H)$を subnormal 作用素とする。Λ を任意の空でない閉凸集合とすれば，T はG(Λ)の中に最良近似をもつ。

証明. Nをヒルベルト空間$K\supseteqq H$上で作用しているTのminimal normal extension とすると$\sigma(N)\subseteqq\sigma(T)$となることは周知の事である。このとき，$N$に対して，定理1より，$\Lambda$ に対する retraction Fが存在して，

$$\|N-F(N)\|\leqq\|N-G\|,\quad G\in \mathrm{G}$$

となる。なおΛが凸集合なのでFは連続関数で一意的に定まる。ところで，$h(\sigma(N),\Lambda)=\sup\{\mathrm{dist}(\mu,\Lambda),\ \mu\in\sigma(N)\}$とおくと，$H$上の任意の$G\in\mathrm{G}(\Lambda)$について，

$$\|N-F(N)\|=h(\sigma(N),\Lambda)\leqq h(\sigma(T),\Lambda)\leqq\|T-G\|$$

が，補題2より成立する。さて，PをKからHへ射影作用素とすれば$PF(N)P|H$ は明らかにG_1ー作用素 であり，又，数値域$\{(Tx,x);\|x\|=1,\ x\in H\}$を$\mathrm{W}(T)$とおくと，$\Lambda$ が凸集合であるという仮定により，

$$\Lambda\supseteq \mathrm{co}\,\sigma(F(N)=\overline{\mathrm{W}}(F(N)\supseteq\overline{\mathrm{W}}(PF(N)P|H)\supseteq\sigma(PF(N)P|H)$$

が分る。よって，$PF(N)P|H$はG(Λ) に属する。

そこで，

$$\|T-PF(N)P|H\|=\|PNP|H-PF(N)P\|\leqq\|N-F(N)\|,$$

となり，先の不等式とで，$PF(N)P|H$はTの 一つのG(Λ)- approximantである。

参　考　文　献

〔1〕R.H.Bouldin and D.D. Rogers, Normal dilations and operator approximations, Acta Sci.Math., 19(1974), 233-243.
〔2〕M.Fujii and M.Nakamura, A variation of spectra of operators, Math. Japonica, 22 (1977), 439.
〔3〕P.R.Halmos, Spectral approximants of normal operators, Proc. Edinburgh Math. Soc., 19(1974), 51-58
〔4〕————, A Hilbert Space Problem Book, Van Nostrand, 1967
〔5〕S. Izumino, Inequalities of normal and anti-normal operators, to appear in Math. Japonica.
〔6〕中本：作用素による近似について，茨城大学工学部研究集報，25(1977), 171-174