作用素のスペクトルについて

中　本　律　男*

（昭和49年9月7日受理）

On the Spectra of Operators

Ritsuo NAKAMOTO

Abstract:—In the present paper, we shall discuss two theorems on the spectra of operators acting on a (separable) Hilbert space: One concerns with operators almost similar to their adjoints and the other with operators belonging to von Neumann algebras of finite type.

1. 準　備

可分なヒルベルト空間H上の（有界線形）作用素に対して，共役元に殆んど相似な作用素のスペクトルと有限なフォン・ノイマン環に属する作用素のスペクトルについて論ずる。

以下において次の記号を用いることにする。$\sigma(T)$, $\sigma_P(T)$, $\pi(T)$, $\omega(T)$, $W(T)$, $\overline{W}(T)$をそれぞれ，作用素Tのスペクトル，点スペクトル（固有値），近似点スペクトル，Weyl スペクトル，数値域，閉数値域を表すものとする。ここに，

$$W(T)=\{(Tx,\ x)\ ;\ \|x\|=1,\ x\ \varepsilon\ H\}$$

で定義される。

さらに，$B(H)$，$C(H)$をそれぞれ，H上の作用素の全体，コンパクト作用素の全体とする。$\hat{T}$は作用素Tの Calkin 像，即ち，$B(H)$から$B(H)/C(H)$への自然な準同型写像による像を表すことにする。

2. 共役元に殆んど相似な作用素

共役な作用素T^*に相似な作用素Tのスペクトルについては多くの人達によって研究されている（〔1〕，〔2〕，〔8〕，〔11〕，〔12〕，〔13〕等参照）。

次の定理が〔13〕において証明された。

定理A (Williams)．もし，$0 \notin \overline{W}(S)$で，作用素Tが

(1)　$T^* = S^{-1}TS$

を満足すれば，$\sigma(T)$は実数のみよりなる。

作用素Tが共役作用素T^*に殆んど相似（almost similar）であるとは，

(2)　$T^* = S^{-1}TS \mod C(H)$

となる逆元をもつ作用素Sが存在するときを言う。このことは，

(3)　$T^* = S^{-1}TS + C$

を満たすコンパクト作用素Cが存在することと同値である。

最近の論文〔10〕において定理Aの拡張として次の定理が証明されている。

定理B (Istratescu－Istratescu)．作用素Tが(3)の意味でT^*に殆んど相似で（i）$0 \notin \overline{W}(S)$　（ii）$C = C^*$　（iii）$\sigma_P(T)=\phi$を満たすとき，$\sigma(T)$は実数のみよりなる。

この節では，定理Bを次のように改良したい。

定理1.　作用素Tが(3)の意味でT^*に殆んど相似で（i）$0 \notin \overline{W}(S)$　（ii）$\sigma_P(T)=\phi$を満たすとき，$\sigma(T)$は実数よりなる。

証明　まず，$\overline{W}(S) \supseteq \overline{W}(\hat{S})$を証明する。

fを$B(H)/C(H)$上のステート（state）とすれば，このとき，$f'(S)=f(\hat{S})$とおくことによってf'は$B(H)$上のステートになることが容易に分る。したがってBerberian－Orland〔5〕の定理によって$\overline{W}(S) \supseteq \overline{W}(\hat{S})$を得る。

さて，定理1が定理Aによって導かれることをCalkin写像を使って示す。(2)より$\hat{T}^*=\hat{S}^{-1}\hat{T}\hat{S}$が出て来るので定理Aにより，$\sigma(\hat{T})$は実数よりなることが分る。又，$\omega(T)$の境界は$\sigma(\hat{T})$に含まれる（〔9；補題1〕参照）ので$\omega(T)$が実数よりなる。ところで〔3；補題1〕より

$$\sigma_P(T) \supseteq \sigma(T) - \omega(T)$$

＊　茨城大学工学部応用数学科（日立市中成沢町）

なので，条件(ii)により $\sigma(T)=\omega(T)$ を得る。

注意　定理1の仮定はいろいろの条件で弱められる。例えば(ii)を"$\sigma_P(T)$ が実数よりなる"としてもよいことは容易に確かめられる。

3. 有限なフォン・ノイマン環の一つの特性化

〔6〕において，有限なフォン・ノイマン環の特徴付けが，全ての正則元の集合の稠密性の一つの副産物として得られている。

定理C (Choda−Choda).　フォン・ノイマン環 A が有限である必要十分条件は A の任意の元 T に対して，$\sigma(T)=\pi(T)$ を満足することである。

この節において，定理Cに同値な次の定理を証明する。

定理2.　フォン・ノイマン環 A が有限である必要十分条件は A の元 A が $0\notin\pi(A)$ を満たすとき正則になることである。

証明　A が有限で，$0\notin\pi(A)$ とすると，このとき，Aの極分解を $A=U|A|$ とすれば，U はユニタリー作用素と仮定できる。$0\notin\pi(A)$ よりある正数 ε に対して，$|A|^2=A^*A\geqq\varepsilon$ なので $|A|$ は正則である。したがって A は逆元をもつ。

逆に，$V^*V=1$ とすれば $0\notin\pi(V)$ となるので V は正則，即ちユニタリー作用素となる。それ故，A は〔7；ChapⅢ. §1〕より有限である。

4. 付　記

S. K. Berberian は定理 C，定理2が，次の命題1，2の変形であることを指摘した。

命題1.　フォン・ノイマン環 A が有限である必要十分条件は A が強有限(strongly finite)，即ち $xy=1$ ならば $yx=1$ となることである。

証明　A が強有限で $x^*x=1$ とすれば $xx^*=1$ を満たすので A は有限である。

逆に，A が有限で $yx=1$ とする。このとき明らかに，$xz=0$ は $y(xz)=0$ となり $z=0$ を含んでいる。そこで，$P_r(x)$，$P_l(x)$ をそれぞれ，x の右 support projection，左 support projection とすると，$P_r(x)=1$ となる。しかし $P_l(x)\sim P_r(x)=1$ なので有限性によって $P_l(x)=1$ となる。よって，

$$(1-xy)x=x-xyx=x-x=0$$

となり，$(1-xy)1=0$，即ち $xy=1$ を得る。

命題2.　フォン・ノイマン環 A 上で次の条件(a)〜(c)は同値である。

(a)　A は有限である。

(b)　xy が正則であれば x，y 共に正則である。

(c)　x^*x が正則ならば x も正則である。

証明　明らかに(b)→(c)→(a)が成立する。もし A が有限で $(xy)z=1$ とすれば，このとき，$x(yz)=1$ となり命題1より x は正則である。したがって，$y=x^{-1}(xy)$ も正則である。

S. K. Berberian は，上の命題1，2は $P_r(x)\sim P_l(x)$ を満たす Baer ＊−ring についても成立することを述べている。

本稿を作成するにあたり，有益な助言をいただいたS. K. Berberian 教授に深く感謝の意を表します。

参 考 文 献

〔1〕 W. A. Beck and C. R. Putnam: A note on normal operators and their adjoints, J. London Math. Soc., 31(1958) 231-216.
〔2〕 S. K. Berberian: A note on operators similar to their adjoints, J. London Math. Soc., 37(1962) 403-404.
〔3〕 ――――: An extention of Weyl's theorem to a class not necessarily normal operators, Mich. J. Math., 16(1969) 273-279.
〔4〕 ――――: Some conditions on an operator impling normality, Proc. Japan Acad., 46(1970) 630-632.
〔5〕 S. K. Berberian and G. H. Orland: On the closure of the numerical range of an operator, Proc. Amer. Math. Soc., 18(1967) 499-503.
〔6〕 M. Choda and H. Choda: Some characterization of certain von Neumann algebras, Proc. Japan Acad., 46(1970) 1086-1090.
〔7〕 J. Dixmier : Les algebres d'Operateurs dans l'Espace Hilbertien, Gauthier-Villars, Paris(1957).
〔8〕 M. R. Embry: Similarities involving normal operators on Hilbert space, Pacif. J. Math., 35(1970) 331-336.
〔9〕 F. Gilfeather: Seminormal operator, Mich. J. Math., 18(1971)235-242.
〔10〕 V. Istratescu and I. Istratescu: On some classes of operators, II, Math. Ann., 194(1971)126-134.
〔11〕 C. A. McCarthy: On a theorem of Beck and Putnam,

J. London Math. soc., 39(1964) 288-290.

〔12〕 I. H. Sheth: On hyponormal operators, Proc. Amer. Math. Soc., 17(1966) 998-1000.

〔13〕 J. P. Williams: Operators similar to their adjoints, Proc. Amer. Math. Soc., 20(1969) 121-123. C.f. Berberian's comment in Math. Rev., 38 #1552.