モノイダル・スペクトルとクロス積

芳　賀　義　則*

（昭和50年9月8日受理）

Monoidal Spectrum and Crossed Products

YOSHINORI HAGA

Abstract:—The crossed product of a von Neumann algebra $\mathscr{A}$ by a compact automorphism group G is, as the author [1] has shown, isomorphic to the tensor product $\mathscr{A}^G \otimes \mathscr{L}(L^2(G))$ of the fixed algebra $\mathscr{A}^G$ under G and the full operator algebra $\mathscr{L}(L^2(G))$ on $L^2(G)$ under a certain condition. Recently, J. Roberts [3] has introduced the notion of monoidal spectrum of compact automorphism groups and has shown the same result as the author's provided that the monoidal spectrum of G coincides with the dual object $\widehat{G}$. In the present note,we compare these two conditions to show that the condition $Msp(G)=\widehat{G}$ is stronger than the one in [1].

1. 以下常に$\mathscr{A}$を可分なヒルベルト空間$\mathscr{H}$上のフォン・ノイマン環，Gを$\mathscr{A}$上の第2可算公理を満たすコンパクト自己同型群とする。此のとき，可分なヒルベルト空間$L^2(\mathscr{H}, G)$上に$\mathscr{A}$とGの表現

$$\pi : (\pi(x)\xi)(g) = g^{-1}(x)\xi(g),$$
$$\lambda : (\lambda(h)\xi)(g) = \xi(h^{-1}g),$$
$$\xi \in L^2(\mathscr{H}, G),\ x \in \mathscr{A},\ g, h \in G,$$

を考え，$\pi(\mathscr{A})$と$\lambda(G)$によって生成される$L^2(\mathscr{H}, G)$上のフォン・ノイマン環を，$\mathscr{A}$のGによるクロス積と云い$R(\mathscr{A}, G)$で表わす（[4]）。

Gの双対，即ちGの既約表現の同値類全体を$\widehat{G}$で表わす。同値類$\alpha \in \widehat{G}$の任意の1つの表現をU_g^αとし，その表現空間の有限な次元をd_α，任意の正規直交基を$\{\zeta_m\}$ $(m=1, 2, \cdots\cdots, d_\alpha)$として

$$v^\alpha_{mn}(g) = (U_g^\alpha \zeta_n \mid \zeta_m)$$

とおけば，これらは

$$v^\alpha_{mn}(gh) = \sum_{r=1}^{d_\alpha} v_{mr}(g)\, v_{rm}(h),$$
$$v^\alpha_{mn}(g^{-1}) = \overline{v^\alpha_{nm}(g)}$$

を満たし，また

$$\{\sqrt{d_\alpha}\, v^\alpha_{mn}(g) \mid \alpha \in \widehat{G};\ m, n = 1, 2, \cdots\cdots, d_\alpha\}$$

は$L^2(G)$の正規直交基となる（[2], §27）。

$$\mathscr{H}^\alpha_{mn} = \{\xi(g) \in L^2(\mathscr{H}, G) \mid \xi(g) = \sqrt{d_\alpha}\ v_{mn}(g)\xi,\ \xi \in \mathscr{H}\}$$

とすると，[1]で示したように，各$\mathscr{H}^\alpha_{mn}$は元の空間$\mathscr{H}$に等長同型であり，しかも互いに直交し，直和が$L^2(\mathscr{H}, G)$になる。

$$\mathscr{H}^\alpha_m = \sum_{n=1}^{d_\alpha}\oplus\, \mathscr{H}^\alpha_{mn}$$

$$\mathscr{H}_\alpha = \sum_{m=1}^{d_\alpha}\oplus\, \mathscr{H}^\alpha_m = \sum_{m,n=1}^{d_\alpha}\oplus\, \mathscr{H}^\alpha_{mn}$$

とすると，

補　題. $\mathscr{H}^\alpha_m$, $\mathscr{H}_\alpha$上への射影はそれぞれ

$$P^\alpha_m = d_\alpha \int v^\alpha_{mn}(g)\, \lambda(g)\, dg$$

$$P_\alpha = \sum_{m=1}^{d_\alpha} P_m = d_\alpha \int \chi_\alpha(g)\, \lambda(g)\, dg$$

$$\left(\chi_\alpha(g) = \sum_{m=1}^{d_\alpha} v^\alpha_{mn}(g)\right)$$

である。P^α_mとP_αは共に$\lambda(G)$で生成されるフォン・ノ

* 茨城大学工学部応用数学科（日立市中成沢町）

イマン環 $\lambda(G)''$に属することは明らかであるが，更にP_αは $\lambda(G)''$ の中心に属する。なお，上の積分は$\mathscr{R}(\mathscr{A}, G)$の強位相に関するもので，$G$上のハール測度$dg$によるG全体での定積分である。

証明。$\mathscr{H}_p^\beta$（$\beta \varepsilon \widehat{G}$, $p=1, 2, \cdots\cdots, d_\beta$）の任意の元 $\sum_{q=1}^{d_\beta} v_{pq}^\beta(g)\xi_{pq}$（$\xi_{pq} \varepsilon \mathscr{H}$）に対し

$$
\begin{aligned}
P_m^\alpha\Big(\sum_q v_{pq}^\beta(g)\xi_{pq}\Big)
&= d_\alpha \int v_{mm}^\alpha(h)\,dh \sum_q v_{pq}^\beta(g)\xi_{pq} \\
&= d_\alpha \int v_{mm}^\alpha(h) \sum_q v_{pq}^\beta(h^{-1}g)\xi_{pq}\,dh \\
&= d_\alpha \sum_q \int v_{mm}^\alpha(h) \sum_r v_{pq}^\beta(h^{-1})\, v_{rg}^\beta(g)\,\xi_{pq}\,dh \\
&= d_\alpha \sum_{q,r} \int v_{mm}^\alpha(h)\,\overline{v_{rp}^\beta(h)}\,dh\, v_{rg}^\beta(g)\xi_{pg} \\
&= d_\alpha \sum_{q,r} d_\alpha^{-1}\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{mr}\,\delta_{mp}\,v_{rg}^\beta(g)\,\xi_{pq} \\
&= \delta_{\alpha\beta}\,\delta_{mp} \sum_q v_{pq}^\beta(g)\,\xi_{pq}
\end{aligned}
$$

となるから，$P_m{}^\alpha$ は$\mathscr{H}_m^\alpha$ 上への射影である。$P_m^\alpha \varepsilon \lambda(G)''$は定義から明らかである。更に，任意の$h \varepsilon G$に対して

$$
\begin{aligned}
P_\alpha\,\lambda(h) &= d_\alpha \sum_m \int v_{mm}^\alpha(g)\,\lambda(gh)\,dg \\
&= d_\alpha \sum_m \int v_{mm}^\alpha(gh^{-1})\,\lambda(g)\,dg \\
&= d_\alpha \sum_m \int \sum_r v_{mr}^\alpha(g)\, v_{rm}^\alpha(h^{-1})\,\lambda(g)\,dg
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda(h)P &= d_\alpha \sum_m \int v_{mm}^\alpha(g)\,\lambda(hg)\,dg \\
&= d_\alpha \sum_m \int v_{mm}^\alpha(h^{-1}g)\,\lambda(g)\,dg \\
&= d_\alpha \sum_m \int \sum_r v_{mr}^\alpha(h^{-1})\, v_{rm}^\alpha(g)\,\lambda(g)\,dg \\
&= d_\alpha \sum_r \int \sum_m v_{rm}^\alpha(g)\, v_{mr}^\alpha(h^{-1})\,\lambda(g)\,dg
\end{aligned}
$$

だから，P_αは $\lambda(G)'$にも属する。

Gの恒等表現をιで表わせば，〔1〕の主定理の１つとして次の定理が示されている。

定理 1. （〔1〕，Theorem 4.1）. 上述の射影P_α，$\alpha \varepsilon \widehat{G}$のおのおのが$d_\alpha^2$個の互いに直交し，しかもおのおのが$P_\iota$に同値であるような部分射影に分割できるならば，クロス積$\mathscr{R}(\mathscr{A}, G)$はテンソル積$\mathscr{A}^G \otimes \mathscr{L}(L^2(G))$に同型である。ただし，$\mathscr{A}^G$ はGによる固定部分環，$\mathscr{L}(L^2(G))$は$L^2(G)$ 上の有界作用素全体の作る環である。

さて，最近J．Robertsは〔3〕において，コンパクト自己同型群Gに対し，そのモノイダル・スペクトルなる概念を導入し，それを用いて定理１の結論が成立するための１つの十分条件を与えている。その証明は必ずしも分かり易いとは云えないので，ここではそれを分かり易く証明し直すと共に，定理１における条件との関係を明らかにすることを目的とする。

2．先ずモノイダル・スペクトルについて〔3〕の内容を形を変えて引用する。$\{a_j \mid j \varepsilon J\}$をフォン・ノイマン環$\mathscr{A}$の部分等長作用素の１つの集合とする。各$a_j$の始射影$a_j^* a_j$が恒等作用素$I$であり，終射影の和$\Sigma_j\, a_j\, a_j^*$が$I$（従って$j \neq k$なら $a_j^* a_k = 0$）であるとき，$\{a_j\}$で生成される＊の部分空間Kは，内積を$(a, b)I = b^* a$で定義すれば，ヒルベルト空間になり，$\{a_j\}$はその正規直交基である。このようなKを$\mathscr{A}$の中のヒルベルト空間とよぶ（〔3〕，Definition 2.1）。なお，$\mathscr{A}$が有限型であれば，a_jはユニタリ作用素になってしまうから，$\mathscr{A}$の中のヒルベルト空間はすべて１次元である。次にGを$\mathscr{A}$上の自己同型群とすると，$\mathscr{A}$の中の１つのヒルベルト空間K_1の正規直交基$\{a_j\}$の$g \varepsilon G$による像$\{g(a_j)\}$は$\mathscr{A}$の中の他のヒルベルト空間K_2の正規直交基になるわけであるが，このときもし$g(K_1) = K_2$であれば，gはヒルベルト空間K_1上の作用素としてはユニタリになるわけで，従ってすべての$g \varepsilon G$に対して$g(K_1) = K_2$であれば，K_1上でのGの１つの連続ユニタリ表現が得られることになる。このようにして得られるGの表現全体を$\mathscr{U}(G, \mathscr{A})$で表わす（〔3〕Example 3.5の$\mathscr{U}(\alpha, M)$。$\mathscr{U}(G, M)$は別の意味で用いられている）。

以上の準備の下にGのモノイダル・スペクトル $M_{sp}(G)$は次のように定義される。即ち$M_{sp}(G)$は，$\mathscr{U}(G, \mathscr{A})$に同値類$\alpha$に属する$G$の表現が含まれるような$\alpha \varepsilon \widehat{G}$全体の集合である。

簡単な例を挙げよう。$G=〔0, 1〕$は法１の加群とし，$\mathscr{A} = L^\infty(G)$をヒルベルト空間$L^2(G)$上の乗積環（multiplication algebra）とすると，$g \varepsilon G$，$x \varepsilon L^\infty(G)$に対して$(g(x))(h) = x(h+g)$と定義すれば，$G$は$\mathscr{A}$上のコンパクト自己同型群とみなすことができる。$\mathscr{A}$は有限型であるから，$\mathscr{A}$の中のヒルベルト空間はすべて１次元で，それはユニタリ作用素$x \varepsilon \mathscr{A}$, $|x(g)| = 1$を基として生成される。$\widehat{G}$は整数の加群であり，任意の$\alpha \varepsilon \widehat{G}$に対して，それに属する$\mathscr{U}(G, \mathscr{A})$の表現として指標$\chi_\alpha(g) = e^{i 2\pi \alpha g}$が存在するから，この場合は$M_{sp}(G) = \widehat{G}$である。

さて，今簡単のためGを可換群とし，次の様な場合を

考えよう。ヒルベルト空間$L^2(\mathscr{H}, G)$上のクロス積$\mathscr{R}(\mathscr{A}, G)$の部分環$\pi(\mathscr{A})$に対して，$\lambda(G)$はいわゆる共変表現になっている。即ち$\lambda(g)\pi(x)\lambda(g)^{*}=\pi(g(x))$である。此れによって，$G$を$\pi(\mathscr{A})$上のコンパクト自己同型群であるとみなし，更に上の例の場合のように$M_{sp}(G)=\widehat{G}$であるとしよう。従って，任意の$\alpha\,\varepsilon\,G$に対し，$\mathscr{H}(G, \pi(\mathscr{A}))$に同値類$\alpha$に属する表現があるわけであるから，可換群$G$は或る1つの等長作用素$\pi(a_\alpha)\,\varepsilon\,\pi(\mathscr{A})$を基とする空間上に表現され，それは指標$\chi_\alpha(g)$であるとして構わない。即ち

$$\lambda(g)\pi(a_\alpha)\lambda(g)^{*}=\pi(g(a_\alpha))$$
$$=\chi_\alpha(g)\pi(a_\alpha)$$

以下煩雑を避けるため，$\pi(\mathscr{A})$を$\mathscr{A}$と同一視して，πを除いて書くことにすると，このことから

$$\lambda(g)a_\alpha=\chi_\alpha(g)a_\alpha\lambda(g).$$

そして，$\mathscr{A}$の中のヒルベルト空間の定義から，a_αの終射影もIだから，a_αは実はユニタリ作用素である。そこで補題の射影Pを用いて$V_\alpha=P_t a_\alpha\,\varepsilon\,\mathscr{R}(\mathscr{A}, G)$を作ると

$$V_\alpha^{*}V_\alpha=a_\alpha^{*}P_t a_\alpha$$
$$=a_\alpha^{*}\int\lambda(g)a_\alpha dg$$
$$=a_\alpha^{*}a_\alpha\int\chi_\alpha(g)\lambda(g)dg=P_\alpha,$$
$$V_\alpha V_\alpha^{*}=P_t a_\alpha a_\alpha^{*}P_t=P_t.$$

よって$P(\alpha\,\varepsilon\,\widehat{G})$はすべて$P_t$に同値であるから，〔1〕のTheorem 3.1により$\mathscr{R}(\mathscr{A}, G)$は$\mathscr{A}^G\otimes\mathscr{L}(L^2(G))$に同型である。此の結論は定理1のそれに外ならないが，実はGが非可換でも成り立つというのがRoberts〔3〕の結果である。

定理2. (〔3〕, Proposition 6.9)フォン・ノイマン環$\mathscr{A}$上のコンパクト自己同型群Gが$M_{sp}(G)=\widehat{G}$を満たすならば，$\mathscr{R}(\mathscr{A}, G)$は$\mathscr{A}^G\otimes\mathscr{L}(L^2(G))$に同型である。

証明。$\mathscr{A}$を$\pi(\mathscr{A})$と同一視して$\mathscr{R}(\mathscr{A}, G)$に埋め込んで考えると，$G$の自己同型は$\lambda(G)$によって誘導される。従って，$M_{sp}(G)=\widehat{G}$ならば，任意の$\alpha\,\varepsilon\,\widehat{G}$に対して，等長作用素$\{a_m\}(m=1, 2\cdots\cdots, d_\alpha)$を基とする$\mathscr{A}$の中のヒルベルト空間が存在して，$G$はその上に同値類$\alpha$に属するような表現$U_g^\alpha$をもつ。よって

$$\lambda(g)a_m\lambda(g)^{*}=U_g^\alpha a_m$$
$$=\sum_{n=1}^{d_\alpha}(U_g^\alpha a_n\mid a_m)a_n$$

この係数$(U_g^\alpha a_n\mid a_m)$は第1節の記号を用いれば$v_{mn}(g)$に外ならないから

$$\lambda(g)a_m=\sum_n a_n v_{mn}^\alpha(g)\lambda(g).$$

さて，定理を証明するために定理1へ帰着させようとすると，既にGが可換な場合については証明したから，Gが可換でないとしてよい。そのときP_tは固有の無限型(properly infinite)(〔3〕Lemma 6.10)であるから，$P_t\sim P_m^\alpha$を示せば十分である。等長作用素$a_m P_t$によって$P_t\sim a_m P_t a_m^{*}$であるから，$a_m P_t a_m^{*}\sim P_m^\alpha$を示せばよい。$W=\sqrt{d_\alpha}a_m{}^2$とし，上に得た関係を用いると

$$W^{*}(a_m P_t a_m^{*})W=d_\alpha a_m^{*}P_t a_m$$
$$=d_\alpha a_m^{*}\int\lambda(g)a_m dg$$
$$=d_\alpha a_m^{*}\sum_n a_n\int v_{mn}^\alpha(g)\lambda(g)dg$$
$$=d_\alpha a_m^{*}a_m\int v_{mm}^\alpha(g)\lambda(g)dg=P_m^\alpha$$

よって，$a_m P_t a_m^{*}\quad P_m^\alpha$. 一方

$$range(P_m^\alpha)\leqq range(W^{*}a_m P_t a_m^{*})$$
$$\sim range(a_m P_t a_m^{*}W)\leqq range(a_m P_t a_m^{*})$$

だから，$a_m P_t a_m^{*}\sim P_m^\alpha$である。

3. 上の証明から分かるように，$M_{sp}(G)=\widehat{G}$は定理1の条件より強いわけであるが，真に強い事は次の様な場合を考えれば明らかである。$\mathscr{A}$はII_1型因子とし，Gが有限非可換群で$\mathscr{A}$に自由に作用している(freely acting)とすると定理1の条件は満たされる(〔1〕Theorem 3.3)。然かし，$\mathscr{A}$が有限型だから$\mathscr{A}$の中のヒルベルト空間は必ず1次元であり，一方Gは2次元以上の既約表現をもつから$M_{sp}(G)=\widehat{G}$では有り得ない。

しかし，$\mathscr{A}$が固有の無限型である場合，または何らかの制限の下では2つの条件は同値であるかも知れない。とは云え，定理1の条件はP_αを$\mathscr{R}(\mathscr{A}, G)$の中で$P_t$に同値な射影に分割できるという事であるのに対し，定理2の証明から分かるように，$M_{sp}(G)=\widehat{G}$は$\mathscr{A}$の元でP_tとP_αの関係を与えることができるという条件であるから，証明は難かしくなるであろう。此こにも連続群によるクロス積の研究に共通な困難が立ちふさがっている。

参考文献

1) Y. Haga：*Crossed products of von Neumann algebras by compact groups*, Preprint, (1974).

2) E. Hewitt−K. Ross：*Abstract harmonic analysis* II, Springer (1970).

3) J. E. Roberts：*Cross products of von*

Neumann algebras by group duals, Preprint, (1975).

4) M. Takesaki : *Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type* III, Acta Math., 131 (1973) 249−310.