

衝突振動系の解析；等価スティフネス面の反発特性

打越 聡*, 東 貞男*, 菊地 弥*

(1973年9月11日受理)

Rebound Characteristics of the Equivalent Stiffness Surface

—Studies on the Vibrating Systems with Collision—

Satoshi UCHIKOSHI, Sadao AZUMA and Wataru KIKUCHI

Abstract: — This paper deals with an analysis concerning the chattering phenomenon of the one-degree-of-freedom systems with collision.

The objective of authors is to investigate the state of rebound and contact time when the mass element of the vibratory systems run into the optional collision surface. The collision surface, on paper, is equivalently substituted by the stiffness-surface that possesses a spring and a damper.

It is characterized with relative to some properties of the system model, and moreover the considerations, which is so easy in practice as for analysis of collision systems by the application of nonlinear equivalent stiffness-surface, is indicated as a result of examine.

1. はじめに

リレーの可動部分のような、終端固定で他端が自由振動を行いうるカンチ・レバーの剛体面への衝突振動を詳細に観測すれば、衝突後の質点の挙動には鎖状振動のくり返しや、あと離れ振動が見受けられる。これは、衝突振動系に高次の振動姿態が存在すること、あるいは接点部で縦方向のすべり、横ぶれによるすべりの影響によるものと考えられている。また、単体で自由振動をしている振動系の減衰量に較べて、衝突後の速度減少に伴う振動量減衰の傾向がかなり大きく観測されることから、この衝突振動時のエネルギー損失現象について“反発係数”なる概念が採り入れられ、実際的な解析や計算に用いられている。しかしながら、その性質については末だに明確にされてはおらず、実測される反発係数の

* 茨城大学工業短期大学部電子工学科（日立市中成沢町）

値も前述したような複雑な現象の抱含された形で与えられる。それにまた反発特性は、衝突の条件および衝突体の形状によって異なる値を示すことが予想され、その適用の範囲もおのずから限定されてくることになる。

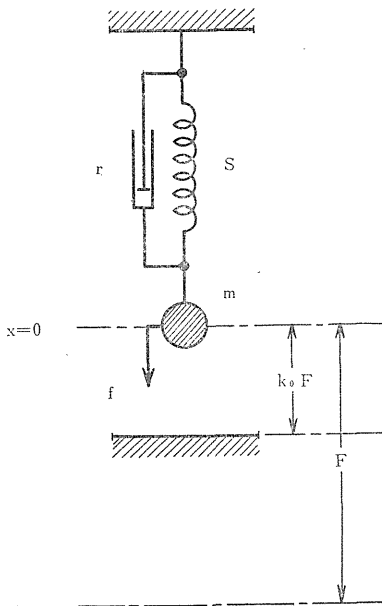


Fig. 1 Generalized model: damped free vibration system with collision.

本報では、カンチ・レバー式の小型リレーを、スティフネス、減衰係数、その他で構成される自由度1の振動系に置き換えるものとし、その反発機構が、衝突によるエネルギー損失の散見できるような“等価スティフネス面”を採用して、任意の条件下でこの両系が互いに拘りあう状態を一般的に考察するものとする。このとき複雑な鎖状振動のくり返しを、見かけの接触時間として近似するならば、振動系に重畳される高次の振動状態をも考慮に入れた実際に近い衝突振動系モデルの具現が可能となる。

2. 自由度1の振動系が剛体面に衝突する場合

本節では、ごく単純な形として衝突面のスティフネス s が無限大、反発係数 e_0 が衝突速度の大きさにかわりなく一定値をとるものとして、これに1自由度振動系の質点が衝突する場合を検討する。

いま、第1図の振動系において、 $\zeta=r/2\sqrt{ms}$, $\omega_n=\sqrt{s/m}$, $F=f/s$ の関係が成立し、そのシステム・ダイナミクスが次のように記述されているものとする。

$$\ddot{x}(\tau) + 2\zeta\dot{x}(\tau) + x(\tau) = F \tag{1.1}$$

ただし、 τ は無次元化時刻を表わし、 $\tau = \omega_n t$ である。

ここで、初期値 $x(0+) = x_0$, $\dot{x}(0+) = v_0$ の条件のもとで上式を解けば

$$\begin{aligned} x(\tau) &= F + A \cos(\sqrt{1-\zeta^2} t - \phi_1) e^{-\zeta t} \\ \dot{x}(\tau) &= -A \sin(\sqrt{1-\zeta^2} t - \phi_2) e^{-\zeta t} \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし、} \quad A &= \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sqrt{(x_0 - F)^2 + 2\zeta v_0(x_0 - F) + v_0^2} \\ \phi_1 &= \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left\{ \zeta + \frac{v_0}{(x_0 - F)} \right\} \\ \phi_2 &= \phi_1 + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \end{aligned} \right\} \tag{1.3}$$

をうる。

2.1 反発後、次期衝突点に至るまでの時間 τ_n の決定

初期位置 x_0 から任意の初期速度 v_0 で出発した質点が、次の衝突点に達するまでに要する時間を“はねかえり時間 τ_n ” (添字は衝突回数を表わし、 $n=1, 2, \dots$, である。) と呼ぶこととすれば、時間 τ_n を経た質点の位置は、固定平面に到達したところであるから、

$$x(\tau_n) = k_0 F \quad (0 \leq k_0 \leq 1)$$

の値をとり, 初期値によって決定される各定数 A, ψ_1, ψ_2 ならびに上式を (1.2) の第 1 式に適用して, 次に示す関数が定義できる。すなわち,

$$G(\tau_n) = F(1 - k_0) + A \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} \tau_n - \psi_1) e^{-\zeta \tau_n} = 0 \quad (1.4)$$

求める τ_n は上記超越方程式の数値解として与えられる。

2.2 衝突速度ならびに反発速度

τ_n が算出できれば, この時点での固定平面への衝突速度は

$$v(\tau_n) = -A \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} \tau_n - \psi_2) e^{-\zeta \tau_n}$$

として求められ, 衝突が行われた後の反発速度 $\bar{v}(\tau_n)$ は

$$\bar{v}(\tau_n) = -e_0 A \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} \tau_n - \psi_2) e^{-\zeta \tau_n} \quad (1.5)$$

ただし, e_0 は反発係数

の値をとる。これが次期衝突に至る振動系単独の自由振動を励動を励発する。初期速度となる。

2.3 はねかえり量の計算

衝突後, はねかえり量が最大となる時刻を λ_n とすれば,

$$\lambda_n = \psi_1 / \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (1.6)$$

したがって, 求めるはねかえり量 $x(\lambda_n)$ は

$$x(\lambda_n) = -F(1 - k_0) - A \cdot e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \psi_1} \quad (1.7)$$

となる。

2.4 諸量の相互関係

反発係数を任意の大きさと規定する衝突面では, 理論上, 無限のチャックを繰り返すことになって, 実際的ではない。しかしながら, 反発特性の検討のための *one-step* としてその諸量の相互関係を図表化するならば, その代表的な図形として第 2 図, 第 3 図を得ることができる。

第 2 図は, 振動系が固有な減衰係数 ζ の値の増減によって影響を受けることなく, 跳ね返り時間 τ_n と跳ね返り量 $x(\lambda_n)$ との間に一対一の対応関係の成り立つことを示している。かつ, その状態 (図表の直線) は, 押しつけ距離 $k_0 F$ の可変によって正確に上下方向の平行移動をすることが認められることから, この三者には近似的ではあるが関数関係のあることがわかる。

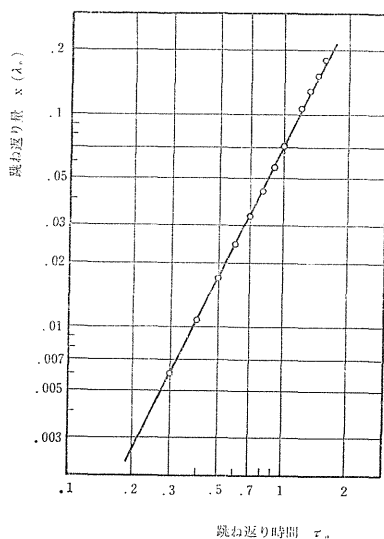


Fig. 2 Maximum displacement versus time required of behavior at rebound.

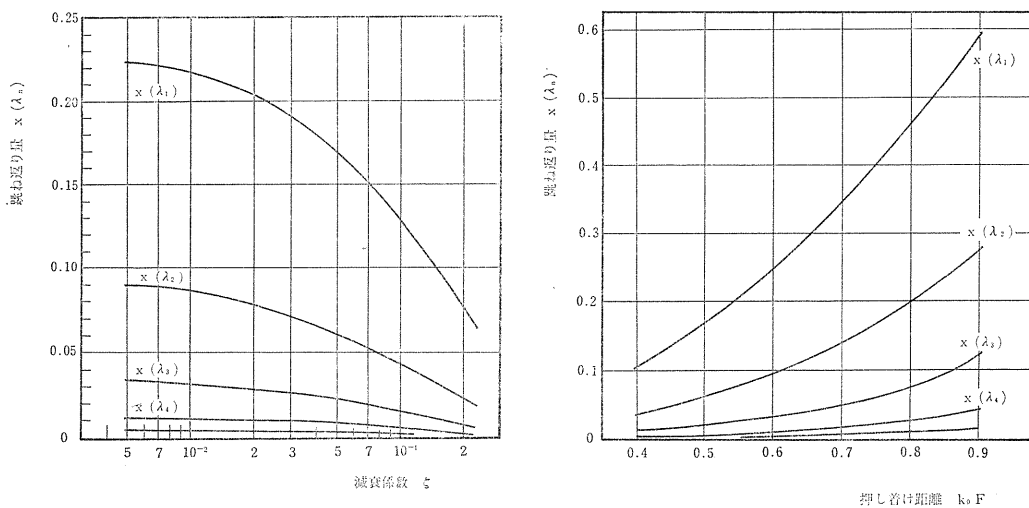


Fig. 3 Maximum displacement $X(\lambda_n)$ versus damping factor ζ and initial displacement k_0F .

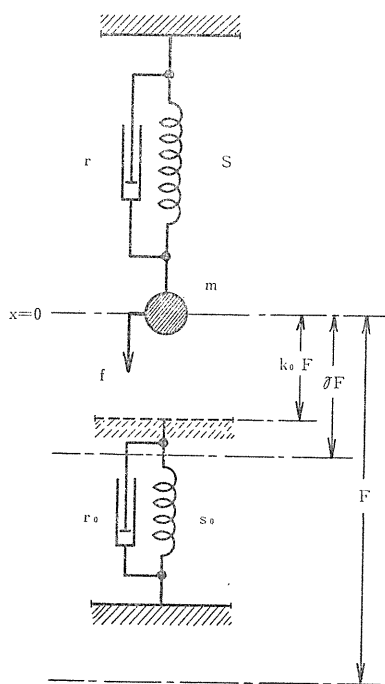


Fig. 4 Generalized model: damped free vibration system with one-degree-of-freedom and equivalent stiffness-surface.

第3図は、減衰係数 ζ 、押し着け距離 k_0F に対する跳ね返り量 $x(\lambda_n)$ の関係を示しており、次のような最適状況を示唆してくれる。

チャタリング現象の減る割合を高めるには、振動系の ζ を比較的大きく、押し着け距離を極力小さくとることが望ましい。ただ現実の問題として通常みられるリレー機構の ζ はほとんど零の値に近くなるため、取りうる対策は後者のみに限られる。

3. 自由度1の振動系が等価スティフネス面に衝突する場合

3.1 線形等価スティフネス面の静特性

ここで、第4図に示すような剛体平面に反発運動の受け持たせる目的で設定したスティフネス s_0 と減衰係数 r_0 で代表される固定接点を“等価スティフネス面”と呼ぶことにし、いま1自由度振動系、反発系との連成時の運動方程式を導くために、振動系に加える外力 f が0であるときの自由平衡点を基準として、外力 f の向きを下方向として同方向の変位を正符号とし、応力と変位の関係を静的状態で求めるならば、第5図のようになる。

図上、直線 (a) は、振動系単独で考えた場合の応力変位の状態を表わし、 $P=sv$ の関

図上、直線 (a) は、振動系単独で考えた場合の応力変位の状態を表わし、 $P=sv$ の関

係が成り立つ, このとき外力 f による最終平衡点は $F=f/s$ となる。

直線 (b) は, 2つの系の連成時における応力-変位特性で, 両系の連成が k_0F ($0 \leq k_0 \leq 1$) より始まるものとすれば, $P=(s+s_0)x-s_0k_0F$ の式で表わされ, このとき外力 f による最終平衡点は

$$F_0 = \frac{\left(1 + k_0 \frac{s_0}{s}\right) F}{1 + \frac{s_0}{s}}$$

として得られる。

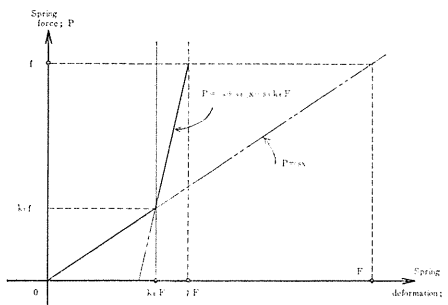


Fig. 5 Steady-state characteristics of vibration system shown in Fig. 4.

3.2 運動方程式

振動系が衝突面に到達しない自由空間でのシステム・ダイナミクスは, 式 (1.1) で記述されるが, 質点が反発面に到達してのち, その変位 x が $x \geq k_0 F$ の範囲内にあるとき, ここに成り立つシステム・ダイナミクスは 3.2節の考察をとおして

$$\ddot{x}(\tau) + 2\alpha\zeta\dot{x}(\tau) + \beta x(\tau) = \gamma F \tag{3.1}$$

ただし

$$\alpha = 1 + \frac{r_0}{r}, \quad \beta = 1 + \frac{s_0}{s}, \quad \gamma = \left(1 + k_0 \frac{s_0}{s}\right) / \beta$$

のように得られる。

ここで, 初期値 $x(0+) = v_0, \dot{x}(0+) = v_0$ を与えて式 (3.1) を解けば

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \gamma F + A_{01} \cos(\sqrt{\beta - (\alpha\zeta)^2} \tau - \phi_1') e^{-\alpha\zeta\tau} \\ \dot{x}(\tau) &= -A_{02} \cos(\sqrt{\beta - (\alpha\zeta)^2} \tau - \phi_2') e^{-\alpha\zeta\tau} \end{aligned} \tag{3.2}$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} A_{01} &= \sqrt{(x_0 - \gamma F)^2 + \left\{ \frac{v_0 + \alpha\zeta(x_0 - \gamma F)}{\sqrt{\beta - (\alpha\zeta)^2}} \right\}^2} \\ A_{02} &= \sqrt{\beta} \cdot A_{01} \\ \phi_1' &= \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{\beta - (\alpha\zeta)^2}} \left\{ \alpha\zeta + \frac{v_0}{x - \gamma F} \right\} \\ \phi_2' &= \phi_1' \tan^{-1} \frac{-1 \sqrt{\beta - (\alpha\zeta)^2}}{\alpha\zeta} \end{aligned} \right\} \tag{3.3}$$

となる。

3.3 接触時間 τ'_n の決定

等価ステイフネス面に対して任意の突入速度で衝突する質点は, ステイフネス面から押し返えされるまで暫時 $x \geq k_0 F$ の範囲内, すなわちその平面内に留まることとなる。第2図に示す振動系モデルの質点は, k_0, β , の値に拘わりあいをもって表面より極く僅かの変位だけ沈むことになるが, これら一連の動きは弾性体としての反発機構を表現するものであり, 塑性変形を伴わない剛体の性質を如実に物語る。

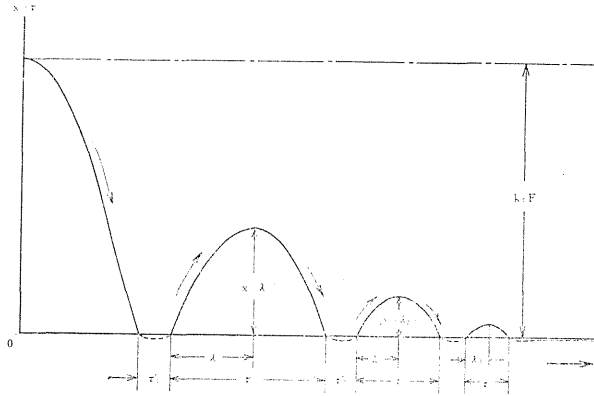


Fig. 6 Displacement versus time curve; free vibration with collision.

いま、衝突から反発までの時間を“接触時間” τ'_n と呼ぶことにすれば、任意の突入速度に対するその値は

$$G(\tau'_n) = (\gamma - k_0)F + A_{01} \cos\{\sqrt{\beta - (\alpha\xi)^2} \tau'_n - \psi_1'\} \varepsilon^{-\alpha\xi\tau'_n} = 0$$

の超越方程式を解いて得られることになる。

3.4 反発係数の決定

等価スティフネス面に衝突した質点は、運動エネルギーの一部を放散しながら運動を継続し、等価スティフネス面から跳ね返る。このときの反発速度 v_r は式(3.3)の解 τ'_n を(3.2)の第2式に代入することによって求められる。質点の衝突、反発の速度の比 v_r/v_0 を反発係数 e_0 とすれば、

$$e_0 = -A_{03} \cos\{\sqrt{\beta - (\alpha\xi)^2} \tau'_n - \psi_2'\} \varepsilon^{-\alpha\xi\tau'_n} \quad (3.5)$$

$$\text{たゞし、 } A_{03} = \sqrt{\beta} A_{01}/v_0$$

となる。

3.5 反発特性の図表化

等価スティフネス面がとりうる反発係数、接触時間の範囲を調べてみれば、そこには等価スティフネス面に衝突した質点とその面内でのエネルギー放散によって面外へ押し返えされることなく、両系の連成振動に移る境界点が必ず存在する。これは、リレー接点等におけるチャタ終止の条件であり、この条件を満たす限界の衝突速度を臨界速度 v_0 と呼ぶことにすれば、 $k_0=0$ のとき第7図に示す曲線で与えられ、任意 k_0 のに対してはその値を $1-k_0$ 倍することで求められる。また、接触時間 τ'_n はこのときを境として有限から無限大に移行することになる。この値は第7図上 τ'_n の上限を規定している。

つぎに、 $k_0=1$ として1自由度振動系の自然平衡点に等価スティフネス面を置いた場合の反発係数 e_0 を計算すれば、

$$e_0 = \varepsilon^{-\frac{\pi\xi'}{\sqrt{1-\xi'^2}}} \quad (3.6)$$

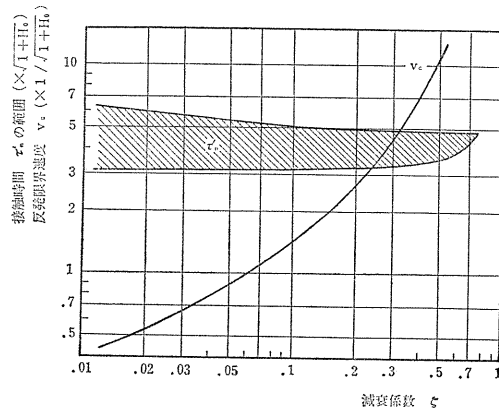


Fig. 7 Boundary diagram of contact time and velocity limit curve for various damping factors ζ .

ただし $\zeta' = \alpha / \sqrt{\beta}$

の値をとる。また接触時間 τ'_n は

$$\tau'_n = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta'^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tag{3.7}$$

となり、ともに衝突速度に関与しなくなる。このとき、 τ'_n はその下限値となり第7図の斜線を施す領域内に存在することとなる。

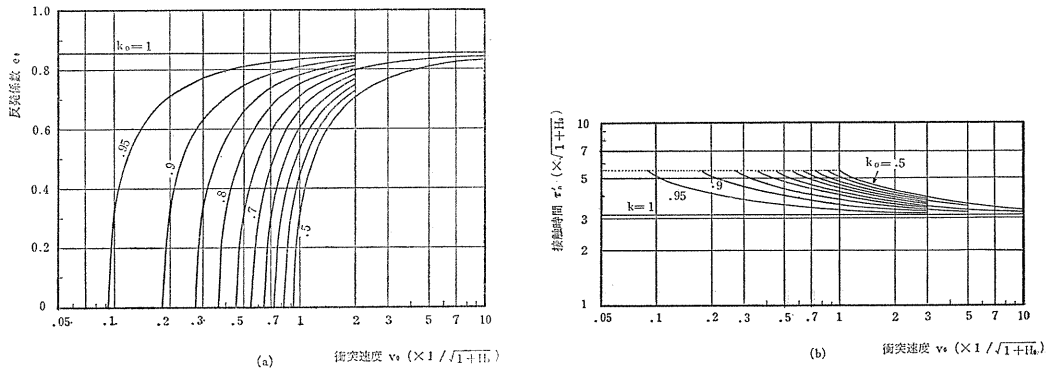


Fig. 8 (a) The coefficient of restitution versus impact velocity (theoretical)
 (b) Contact time versus impact velocity (theoretical)
 ; linear equivalent stiffness-surface

つぎに、 ζ' の値を 0.05 の大きさにとり、等価ステイフネス面の特性を調べてみれば第 8 図のようになる。反発係数、接触時間は v_0/k_0 と対応関係が成り立つ。また、衝突速度の増加とともに反発係数は式 (3.6) によって規定される大きさに漸近する。

さらに、接触時間・反発係数は衝突速度や k_0 の関係として種々の値をとるが、接触時間と反発係数の間には第 9 図に見られるように一対一の対応関係のあることが確認された。

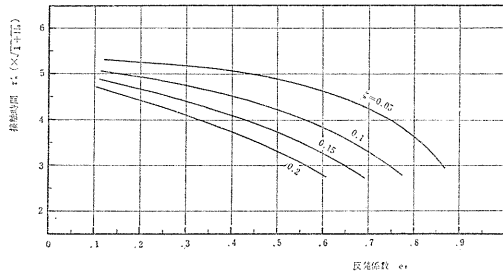


Fig. 9 Contact time versus the coefficient of restitution.

3.6 非線形等価スチフネス面

前節において、等価スチフネス面の特性を明らかにしてきたが、いま、実際の衝突振動系から実測によってえられた反発係数や接触時間と、理論的に考慮された反発系振動モデル——等価スチフネス面——特性との対応関係に注目するならば、両者には違いのあることに気付かされる。銅・黄銅の衝突面から実測された反発係数の値は、約0.85の大きさで、その反発係数と接触時間(第10図)は、衝突速度の増加に対応してやや減少する傾

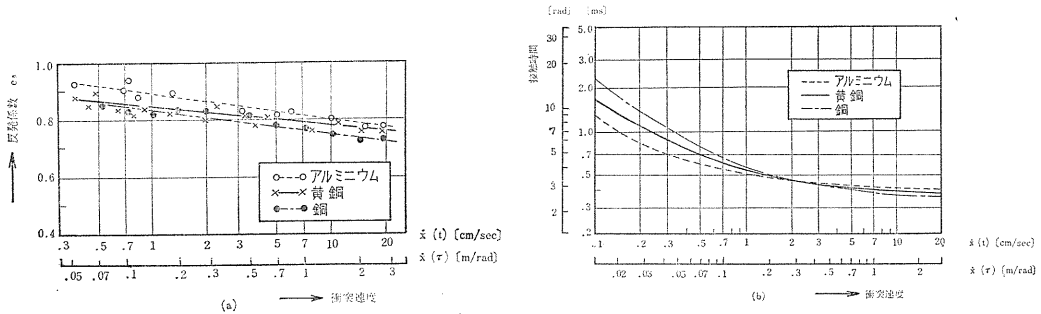


Fig. 10 (a) The coefficient of restitution versus impact velocity (measured)
 (b) Contact time versus impact velocity (measured)
 ; the extracted material from the bibliography (3).

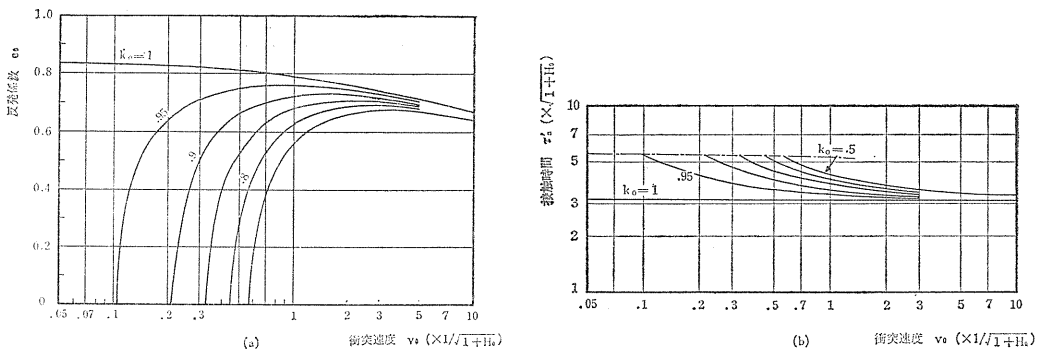


Fig. 11 (a) The coefficient of restitution versus impact velocity (theoretical)
 (b) Contact time versus impact velocity (theoretical)
 ; nonlinear equivalent stiffness-surface.

向を示し, 衝突時に併発する高次振動姿態に起因するものと一般には考えられているところのものである。一方, 等価ステイフネス面におけるその値は, 衝突速度の如何に抱らず一定となっている(第8図)。

実際の系により近い特性をもった等価ステイフネス面として実現するために, ここでは反発振動系モデルの減衰項が速度についての非線形関数として表現することを考慮したところ, 第11図のように好い結果をうることができた。

4. まとめ

衝突振動系に引き起されるチャタリングの現象は, 原理的には不可欠のものであり, それを回避することは至難なことである。しかし, 電気回路系に及ぼす悪影響を極力少なくするためにその改良の必要に迫られる。チャタリングの少いリレー機構への改善, できればチャタレス振動系の改発をめざす目的で, 単純な系からの解析に着手した。

本報では, ステップ状の加振力を受けた1自由度振動系の質点が, 剛体面に衝突して跳ね返る状態をモデル化(等価ステイフネス面の採用)し, その数式モデルを現実に近いかたちで得ることに努め, 反発機構の特性を明らかにした。

- (1) 反発係数 e_0 は衝突速度 v_0 , 押付け距離の比 k_0 , 等価ステイフネス面の減衰係数 ζ' により定まる。その上限は ζ'_c で決まる。
- (2) 反発係数が零となるような臨界速度 v_c が減衰定数 ζ' と押付け距離の比 k_0 により定まる。 v_c と $1-k_0$ の間には比例関係が成りたつ。
- (3) 接触時間 τ'_n は押付け距離の比 k_0 , 減衰定数 ζ' , 衝突速度 v_0 により定まるかなりせまい変域をとる。 $k_0=1$ のとき τ'_n の下限が, $v_0=v_c$ のとき τ'_n の上限があたえられる。また同じ ζ' に対して反発係数と τ'_n は1対1の対応関係をもつことがわかった。
- (4) 実際の衝突振動系の挙動を(減衰定数 ζ' が質点の速度の函数として変化する)非線形等価ステイフネス面により正確に記述できることがわかった。

今後の課題として, 衝突点の形状や挙動に誘発する高次振動姿態等に起因する諸特性の多少のずれを非線形等価ステイフネス面の補償を通して, 実在の衝突振動系の解析をおし進めて行かないと考えている。

おわりに, 本研究にあたり協力を得た本学電子計算センターの諸氏にここからの謝意を表します。

参 考 文 献

- (1) 米川, 村田, 植木; 損失のある1自由度振動系のチャタ, 電子通信学会誌, Vol. 50, No. 7, (1967), p. 1248
- (2) 武井健三; 衝突振動係における反発機構の位相面による決定に就て, 機構部品研究会資料, (1959)
- (3) 米川, 望月; 摩擦吸振子の損失特性とその反発特性について, 研実用化報告(別刷), Vol. 15, No.10, (1966)
- (4) 米川, 太田; 単純な衝突体の反発特性, 日本音響学会誌, No. 25, (1966)