

柱面状電極と内部板状電極間の静電容量値の計算

荒又光夫, 寺門龍一, 安納義人

Calculation of a Capacitance Value of a Capacitor formed by an Outer Conducting Cylindrical Surface and Inner Conducting Strips

MITSUO ARAMATA, RYÛITI TERAKADO and YOSHITO ANNÔ

Abstract: — In the first place of this paper, the methods are given for calculating a capacitance value per unit length of a capacitor which consists of conducting strips surrounded by a conducting cylindrical surface. Especially the idea for the case of the strips being inserted in the circular cylindrical surface is peculiar, for the mapping to a half-plane is not contained in the process. Then numerical calculations of the capacitance values of capacitors, whose sections are in various shape, are made with the aid of the electronic computer by utilizing the sub-routine programs. The capacitance values between the inner strips and the outer cylindrical surface in various shape are shown on the graphs as a function of the length of the inner strip.

1. ま え が き

この報告では、最初に、柱面状導体とその内部に軸と平行にきわめて薄い板状導体を置いた場合、両者間の単位長当りの静電容量値の求め方を導き出している。とくに、円柱面状導体の内部に、板状導体を置いた場合に対する考え方は、普通の半平面への写像を用いない独特のものである。次に、すでに作成した円関数のサブ・ルーチン⁽¹⁾を利用して、電子計算機を用いて、数値計算を行ない、種々の形の断面について、静電容量値を比較している。

2. 原理と方法

柱面状導体とその内部に軸と平行に置いた板状導体間の、単位長当りの静電容量値を求めることは、無限長の場合には、軸に垂直な断面を考えることによって2次元の問題とな

る。ここでは、その断面の図形が数本の対称軸をもつ場合だけを取り上げる。

2電極間の抵抗値と静電容量値の間には、一定の関係があり、また、さきの論文のなかで、厚さと抵抗率の様な平板抵抗体の周辺に、2電極をつけた場合の抵抗値の計算法について報告した⁽²⁾⁽³⁾ので、この論文では、はじめに抵抗値を求め、次に、上記の関係をを用いて静電容量値を求める。

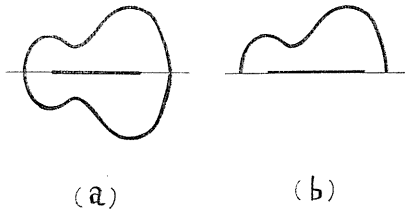


図 1

柱面状導体の軸に垂直な断面がいろいろな形をしている場合の、それに対する静電容量値を求める前に、図1(a)のような対称軸を1本もつ、もっとも基本的なものについて考える。

2電極間の電流線のなかに、対称軸に沿って走るものがあるから、対称軸に沿って切り開き、2つの領域に分割しても、領域内の電流界は前と変わらない。2つに分割された領域の片方を図1(b)に示す。この分割された領域の周辺につけた2電極間の抵抗値を計算することは、一般にはむずかしいが、ここでは、求められると仮定してその値を R_0 とおく。この R_0 は、領域外の抵抗率が平板抵抗体の抵抗率 ρ に比して、非常に大きく無限大と考えられ、電流線は領域外に出ることはないので、この領域の抵抗値そのものである。図1(a)は、図1(b)の図形2個からできているので、求める電極間の抵抗値 R は、図1(b)の抵抗が2つ並列となるので、 $R=R_0/2$ となる。一方、この論文でとり扱っているものは、領域の周辺が導体で囲まれているので、電気力線は領域外に出ることはなく、静電容量値は絶縁物の誘電率 ϵ と電極配置で決まる。 R は上のようにして得られるから、

$$CR = \epsilon\rho$$

の関係式から C は求められ、この C は、問題にしている領域に関する電極間の静電容量値である。

以上は、対称軸が1本の場合であるが、対称軸が数本ある場合には、もつとも接近した2本の対称軸と外周によって囲まれる部分(これを要素と呼ぶ)の抵抗値を求め、この値をもつ抵抗が領域内の要素の数だけ並列につながっていると考えて、電極間の抵抗値を計算する。それから、上に述べた方法で静電容量値を求める。

この報告では、さきの論文の関係式を用いることが多いので、本文中に既報とあるものは、すべて参考文献(2)(3)の論文をさすものとする。さきの論文では、抵抗板の厚さ d 、抵抗率 ρ 、面抵抗率 $\rho/d=1$ 、として抵抗値を示したが、ここでは、さらに、誘電率 ϵ 、 $\epsilon\rho=1$ 、として静電容量値を計算している。また、簡単のため、柱面状導体、内部板状導体は、その断面について述べ、円周、線分というようにする。

<2.1> 円周と円の中心を中心とする線分

図2(a)のように、円の周辺と直径上に電極を置いた場合で、これは、半平面上の2電極間の流線のなかに、ちょうど円になるものがあることを利用して抵抗値が計算できる。

図2(b)に示すように、半平面上に等長の2電極をつけたときの抵抗値の2倍が、図2(c)の抵抗値に等しい。図2(b)における k は、

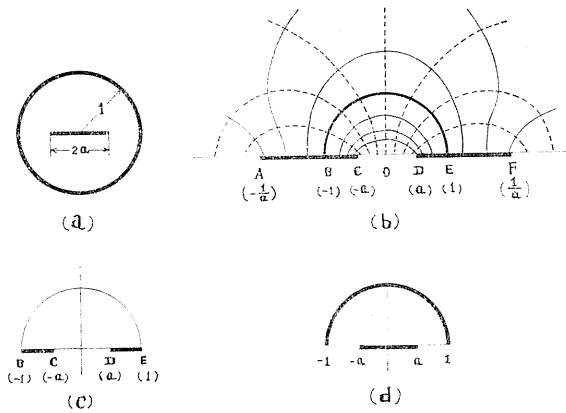


図 2

$$k = \frac{a}{\frac{1}{a}} = a^2$$

で与えられる。この k に対応する $2K/K'$, $4K/K'$, がそれぞれ，図 2 (b), (c) の抵抗値である。図 2 (d) の電極間抵抗値 R'' は，図 2 (c) の抵抗値が， $R'' = \frac{4K}{K'}$ であるから，既報の関係式

$$\sqrt{R' R''} = 1$$

を用いて， $R'' = K'/4K$ となる。図 2 (a) の抵抗値 R は，図 2 (d) の抵抗値の 1/2 であるから， $R = \frac{K'}{8K}$ となり，結局，求める電極間の静電容量値 C は，

$$CR = 1$$

の関係から， $C = \frac{8K}{K'}$ となる。

<2.2> 円周と中心が円の中心からずれている線分

図 3 (a) のように，内部の線分が円の中心からずれている場合にも，半平面上の 2 電極間の等電位線のなかに，ちょうど円になるものがあることを利用して抵抗値が計算できる。

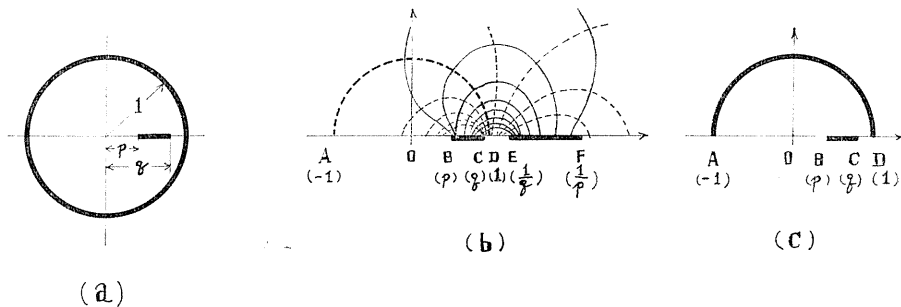


図 3

ここで、円の半径を1にとる。図3 (b) に示すように、一方の電極端の座標が、他方の電極端の座標とこの円に関して反転関係にあるとき、この円は等電位線となり、円の内と外の等電位線の数は等しい。それゆえ、図3 (b) の抵抗値の場が、図3 (c) の抵抗値に等しい。

図3 (b) の抵抗値は、参考文献 (2) の (14) 式に

$$a = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \quad b = q - p \quad c = \frac{1}{q} - q$$

を代入して

$$k = \frac{\sqrt{(a+c)(b+c)} - \sqrt{ab}}{\sqrt{(a+c)(b+c)} + \sqrt{ab}} = \frac{(1+p)(1-q)}{(1-p)(1+q)}$$

を計算して、この k に対応する $2K/K'$ を求めればよい。図3 (c) の抵抗値は K/K' 、図3 (a) の抵抗値は $K/2K'$ で与えられる。したがって、求める電極間の静電容量値は $2K'/K$ となる。上述の式から得られる k は、 p の値が負であっても適用できることが証明されるので、上式は、円の内部に線分がある場合の k に対する一般式である。

また、 k を

$$k = \frac{(1-pq) - \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)}}{(1-pq) + \sqrt{(1-p^2)(1-q^2)}}$$

で与えると、求める静電容量値は、 $8K/K'$ となることも証明される。

なお、この問題は、図3 (a) の要素である図3 (c) の半円領域を半平面に写像することによっても計算できる。

<2.3> 円周と内部の複数の線分

n 本の等長の線分が、隣接の線分とたがいに π/n の角度で交わり、放射状に配置され、 n 本の対称軸をもつ場合である。図4 (a) は $n=4$ の場合を示している。ここで、1つの要素 ACDBO を z 平面にとり、

$$w = z^n$$

で、 w 平面上に写像すると、図4 (c) のようになり、これは、<2.1> に示した方法で抵抗値が計算され、その $1/2n$ が図4 (a) の電極間の抵抗値となる。

内部に置く線分の配置は、図4 (d) のように、線分の中心が円の中心からずれていても、対称性があれば、上と同様の写像関数と <2.2> に示した方法で計算できる。図4 (d) は、 $n=3$ の場合である。

いずれの場合も、静電容量値は前に述べたようにして求められる。

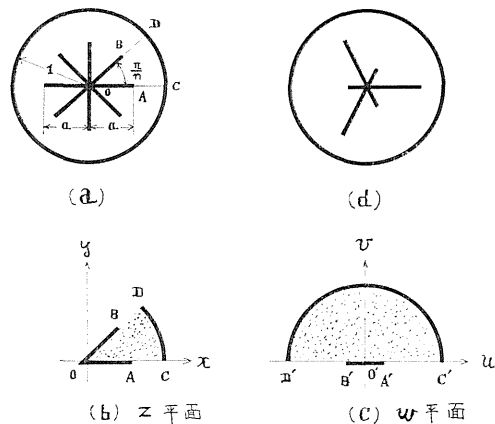


図 4

<2.4> 長円の周と線分

長方形の周辺と内部の長軸上に置いた線分間の抵抗値を求めるには，次の写像関数

$$z = \frac{w \pm \sqrt{w^2 + b^2 - 1}}{1 + b}$$

によって，長円の内部領域が，穴のある円領域に写像されることを利用する。

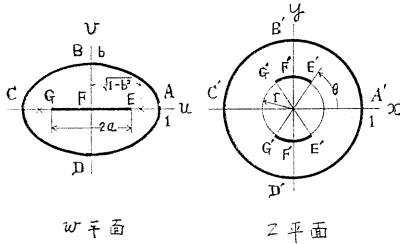


図 5

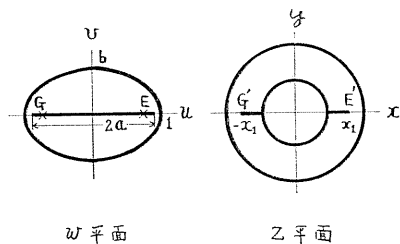


図 6

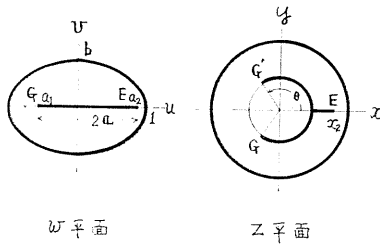


図 7

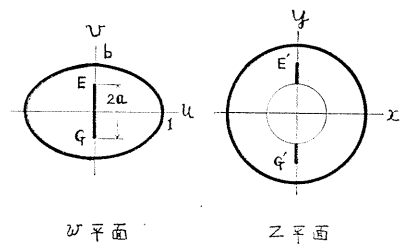


図 8

図 5，6，7 に示すように，内部に置いた線分の位置によって，対応する円領域側（ z 平面）の電極配置が異なる。線分の端の座標が，長円の焦点の内側にあるときの写像関係は，図 5 のようになり，

$$r = \sqrt{\frac{1-b}{1+b}} \quad \theta = \cos^{-1} \frac{a}{\sqrt{1-b^2}}$$

の関係がある。線分の端の座標が，長円の焦点の外側にあるときの写像関係は，図 6 のようになり，円の半径は，図 5 と変わらないが，線分の端が

$$x_1 = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - 1}}{1 + b}$$

となっている。ここで符号は， a が正のとき上側，負のとき下側をとる。線分の中心が長円の中心からずれて，線分の一端の座標が長円の焦点の外側に，他の端の座標が焦点の内側にあるときの写像関係は，図 7 のようになり，円の半径は，図 5 の場合と同じであるが，

$$\theta = \cos^{-1} \frac{a_1}{\sqrt{1-b^2}} \quad x_2 = \frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + b^2 - 1}}{1 + b}$$

の関係が加わる。

電極間の抵抗値を求めるためには，さらに z 平面の円領域を長方形に写像して，既報

の関係式を適用すればよい。

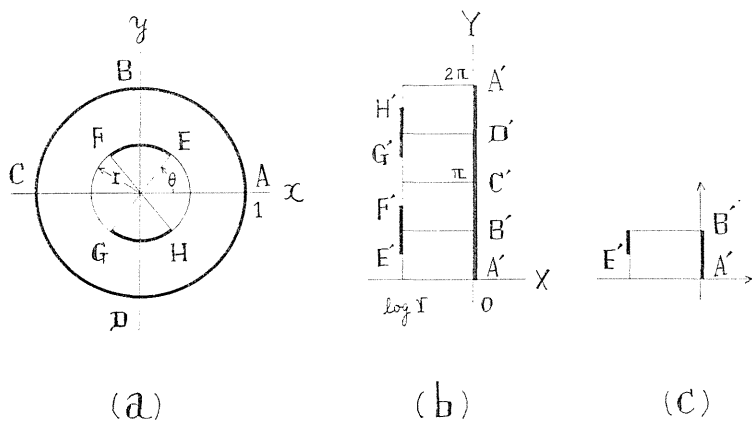


図 9

一例として、図5の場合をとりあげると、図9に示す関係になり、結局、図9(c)の抵抗値を求め、その $\frac{1}{2}$ をとれば、長円の周と線分間の抵抗値が得られる。抵抗値から静電容量値を計算する方法は、前に述べた通りである。図6, 7の場合も同様にして求められる。

今までは、線分が長円の長軸上にあったが、線分が短軸上にある場合にも(図8参照)、上と同様の写像関数と方法で求められる。

<2.5> 長方形の周と線分

図10(a)のように、線分を置いた場合の抵抗値は、既報の関係式を1つの要素である図10(b)に適用すればよい。

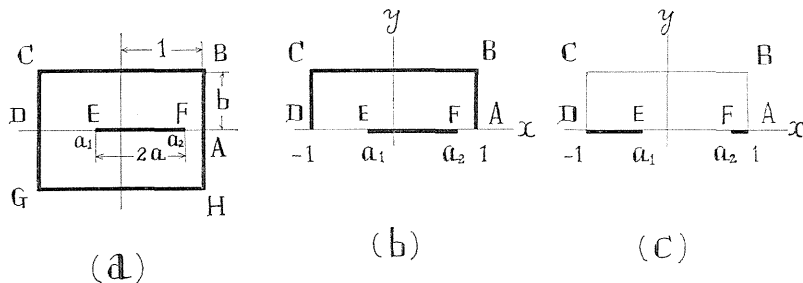


図 10

しかるに、計算に都合が悪い電極配置なので、図10(c)について抵抗値を求め、それを R' とおく。図10(b)の抵抗値 R は、

$$\sqrt{RR'}=1$$

の関係から得られる。この R から図10(a)の抵抗値と静電容量値を導く方法は、すでに述べた通りである。

<2.6> 正方形の周と線分

図11 (a) のように, 線分を正方形の内部に置いた場合の抵抗値を計算するときは, 対称性を利用する。図11 (c) に示すような要素の抵抗値を既報の關係を用いて計算し, その4倍をとれば, 図11 (a) の抵抗値が得られる。

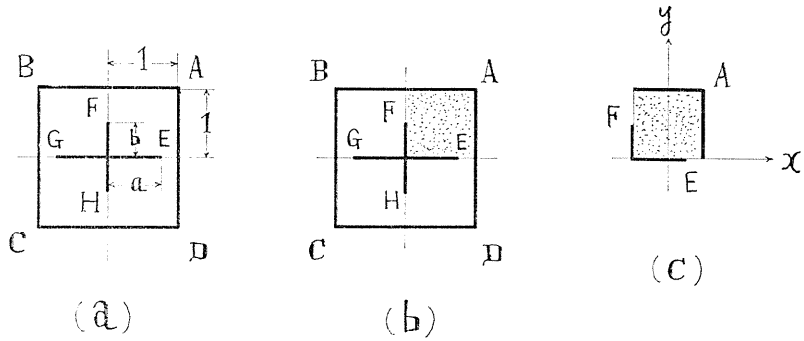


図 11

次に, 内部の線分が, 図12 (a) のように対角線上にある場合には, 図12 (b) のような対称の電極を考える。これに關係した部分を図12 (c) に示す。図12 (c) の抵抗値は既報の關係式で求められ, その4倍が図12 (a) の抵抗値である。

抵抗値から電極間の静電容量値を計算する方法は, 前述の通りである。

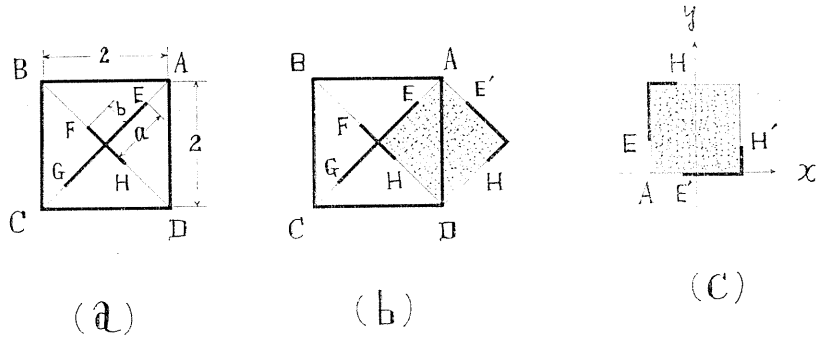


図 12

3. 計算結果

上に述べた原理と方法によって, 電子計算機を用いて数値計算を行なった。その結果を, パラメータを変化させ, 静電容量値を線分の長さの関数としてグラフに表わした。図15と16, 17と18, 19と20, をそれぞれ比較すると, 内部の線分の長さが等しいときは, 静電容量値も大体等しいので, 外部導体の形の影響は, 割合小さいことがわかる。

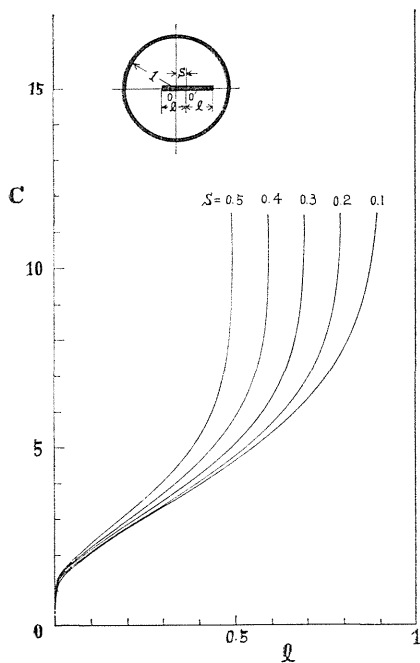


図 13

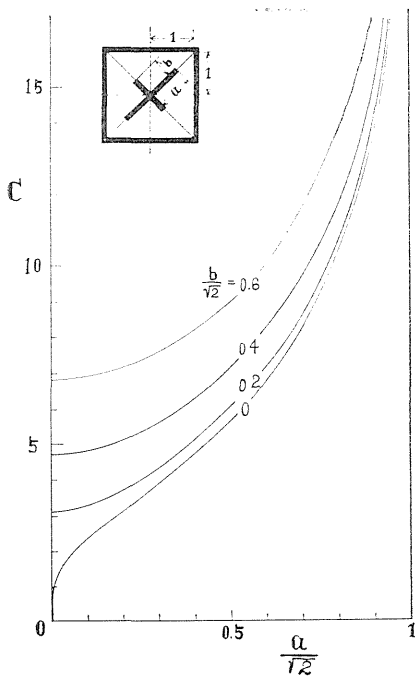


図 14

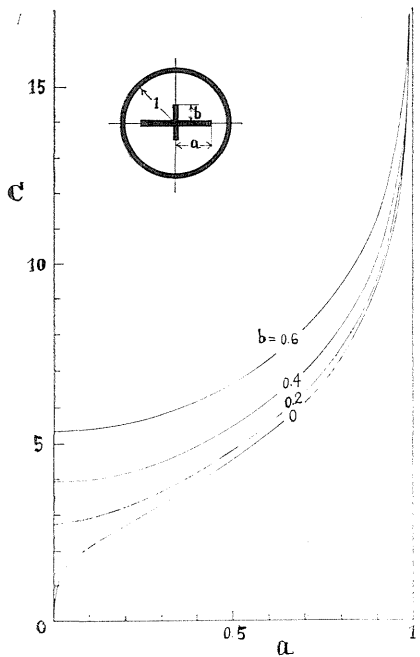


図 15

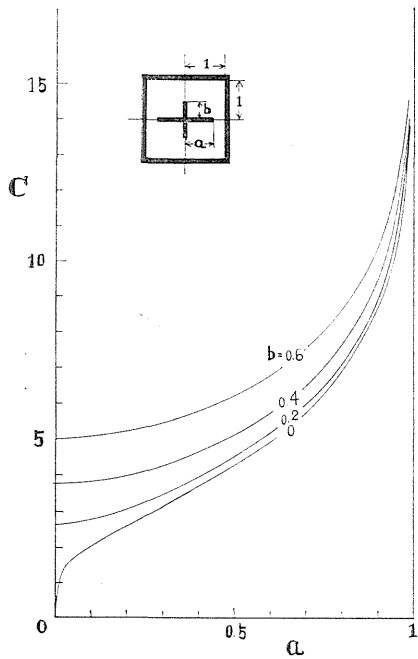


図 16

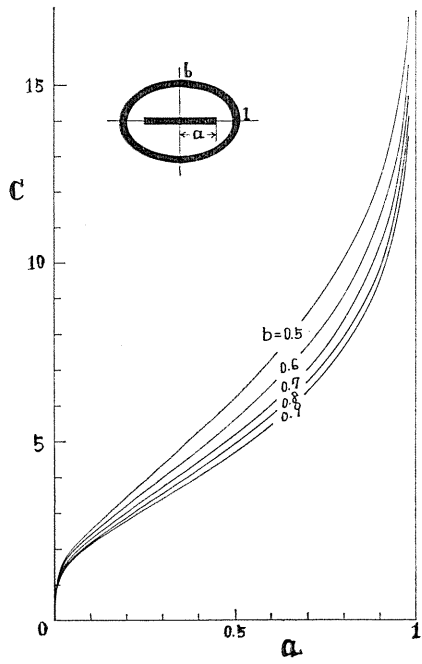


図 17

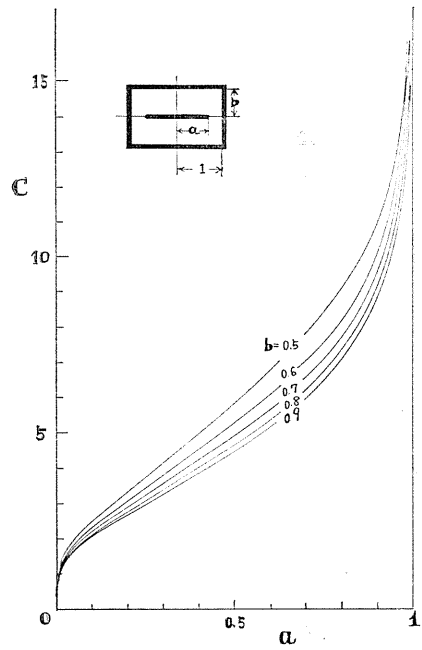


図 18

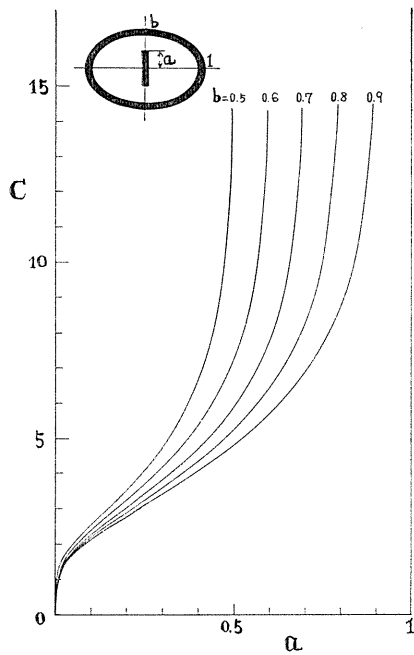


図 19

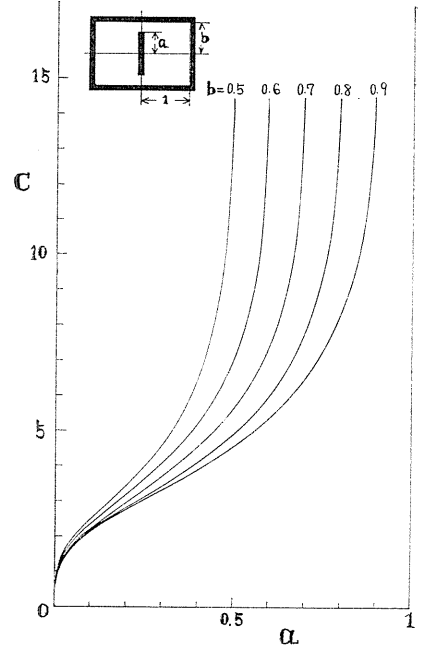


図 20

4. む す び

この研究をまとめて、稿を起こしてから、角川、荒川両博士のすぐれた研究のあることを知った⁽⁴⁾。両博士は、中心の線分のずれていない場合について全く同じ目的の式を導いておられるが、著者らは、独特の方法で、領域を分割して計算したので、だ円関数の母数が両博士の方法と異なっており、数値として得られる母数が、比較的かたよらない点に特徴があるのではないかと考えている。両博士は、さらに高近似式、複心の場合等、多彩な研究を展開しておられる。

この研究は、両博士と目的をほぼ同じにしなが、やや異なった形で計算式が得られているのは、池田芳郎先生の考え方⁽⁵⁾を指針として、研究が進められたためと思う。あらためて、同先生に深い感謝を表わすものであります。また、図面の作成に助力して下さった笠原英司君に深く感謝いたします。

参 考 文 献

- (1) 荒又、寺門：茨城大学工学部研究集報，第15巻（昭43）p. 35
- (2) 荒又、寺門：茨城大学工学部研究集報，第13巻（昭41）p. 79
- (3) 荒又、寺門：茨城大学工学部研究集報，第14巻（昭42）p. 11
- (4) 角川、荒川：電気通信大学学報，第7巻（昭30）p. 141
- (5) 池田：等角写像とその方法，内田老鶴圃（昭10）