

水滴と気泡 (その二)

THE WATER DROP AND STEAM BUBBLE (No. 2)

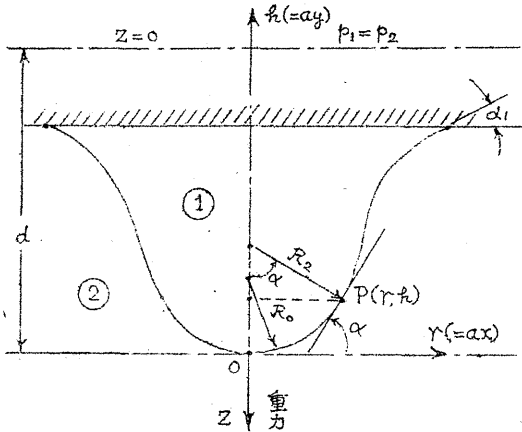
高玉 績 (Isso Takatama)

ABSTRACT— In this paper the mathematical method how to working out the fundamental equation given in the 1st report of "The Water Drop and Steam Bubble" are described.

1. 緒言 本報告その一では数値計算結果の物理的な解釈をなしたが、本文ではその計算方法を述べる。要するに液滴の平衡式を適当な変数変換によって2階非線型常微分方程式に直し、これを近似解とRunge-Kuttaの数値積分解とによって調べるのである。

2. 水平板に懸垂された液滴 液滴の平衡式は才1図に於いて

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - \frac{2}{R_0} + \frac{\rho g}{T} h = 0 \quad \text{----- (1)}$$



第 1 図

こゝに R_1, R_2 は液滴曲面の主曲率半径, R_0 は液滴尖端の曲率半径, ρ は密度, g は重力加速度, T は液体の表面張力である。 $P(r, h)$ での切線と水平軸とのなす角 α を使つと微小曲線部分 dS は

$$dS = R_1 dd$$

となる。これに直角な法平面内では

$$R_2 \sin \alpha = r$$

である。しかるに

$$\frac{1}{R_1} = \frac{dd}{dS} = \frac{dd}{dr} \frac{dr}{dS} = \frac{dd}{dr} \cos \alpha = \frac{d(\sin \alpha)}{dr}$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\sin \alpha}{r}$$

であるから基礎式(1)は次の如くに書直せる

$$\frac{d(\sin \alpha)}{dr} + \frac{\sin \alpha}{r} = \frac{d(r \sin \alpha)}{r dr} = \frac{2}{R_0} - \frac{\rho g}{T} h \quad \text{----- (2)}$$

又

$$\frac{dh}{dr} = \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} \quad \text{----- (3)}$$

である。今

$$\sin \alpha = U, \quad r = \left(\frac{2T}{\rho g}\right)^{\frac{1}{2}} X, \quad h = \left(\frac{2T}{\rho g}\right)^{\frac{1}{2}} Y, \quad \frac{1}{R_0} \left(\frac{2T}{\rho g}\right)^{\frac{1}{2}} = k_0$$

とおけば (2), (3) 式はそれぞれ

$$k_0 - y = \frac{1}{2x} \frac{d(xU)}{dx} \quad \text{----- (4)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{U}{\sqrt{1-U^2}} \quad \text{----- (5)}$$

となる。これを次の初期条件

$$x=0 \text{ で } y=0, U=0 \quad \text{----- (6)}$$

によって解けば液滴の形が求められる。T. Lohnstein と同様に

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} k_{2n} x^{2n}; \quad U = \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m+1} x^{2m+1}$$

とあいて詳細な計算を遂行すると

$$\begin{aligned} U = & k_0 x - \frac{k_0^3}{4} x^3 + \left(-\frac{1}{24} k_0^3 + \frac{1}{48} k_0\right) x^5 + \left(-\frac{1}{64} k_0^5 + \frac{5}{288} k_0^3 - \frac{1}{1152} k_0\right) x^7 \\ & + \left(-\frac{1}{128} k_0^7 + \frac{7}{512} k_0^5 - \frac{7}{11520} k_0^3 + \frac{1}{46080} k_0\right) x^9 \\ & + \left(-\frac{7}{1536} k_0^9 + \frac{7}{640} k_0^7 - \frac{529}{92160} k_0^5 + \frac{163}{34560} k_0^3 - \frac{1}{2764800} k_0\right) x^{11} \\ & + \left(-\frac{3}{1024} k_0^{11} + \frac{61}{6144} k_0^9 - \frac{9403}{1290240} k_0^7 + \frac{11971}{7741440} k_0^5 - \frac{5197}{116121600} k_0^3 + \frac{1}{232243200} k_0\right) x^{13} \\ & + \text{-----} \quad \text{(7)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = & \frac{1}{2} k_0 x^2 + \left(\frac{1}{8} k_0^3 - \frac{1}{16} k_0\right) x^4 + \left(\frac{1}{16} k_0^5 - \frac{5}{72} k_0^3 + \frac{1}{288} k_0\right) x^6 \\ & + \left(\frac{5}{128} k_0^7 - \frac{35}{512} k_0^5 + \frac{46}{2304} k_0^3 - \frac{1}{9216} k_0\right) x^8 \\ & + \left(\frac{7}{256} k_0^9 - \frac{21}{320} k_0^7 + \frac{529}{15360} k_0^5 - \frac{163}{57600} k_0^3 + \frac{1}{460800} k_0\right) x^{10} \\ & + \left(\frac{21}{1024} k_0^{11} - \frac{427}{6144} k_0^9 + \frac{9403}{184320} k_0^7 - \frac{11971}{1105920} k_0^5 + \frac{5197}{16588800} k_0^3 - \frac{1}{33177600} k_0\right) x^{12} \\ & + \left(\frac{33}{2048} k_0^{13} - \frac{225}{3584} k_0^{11} + \frac{24127}{368640} k_0^9 - \frac{112123}{4515840} k_0^7 + \frac{751517}{270950400} k_0^5 - \frac{209}{8128512} k_0^3 \right. \\ & \left. + \frac{1}{3251404800} k_0\right) x^{14} + \text{-----} \quad \text{(8)} \end{aligned}$$

となるが、これは $x \leq 1$ で k_0 が小さい時には収斂は早いが $x > 1$ では収斂が悪くなる。本6図に於いて k_0 が小さい場合は (7), (8) 式で計算した。(4), (5) 両式は簡単な演算によって次の2階常微分方程式に変換される。即ち

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dU}{dx} - \frac{U}{x^2} + \frac{2U}{\sqrt{1-U^2}} = 0 \quad \text{----- (9)}$$

初期条件は $x=0$ で $U=0, \frac{dU}{dx} = k_0 (k_0 > 0)$ ----- (10)

(9) 式は U に関して非線型であるために厳密解を求めることは難しく今後に残された問題であろう。液滴根本部分および尖端部分のみを考えると、こゝでは U

は微小であるから高次項を省略して $\sqrt{2}x = X$ と置けば (9) 式は

$$\frac{d^2 U}{dX^2} + \frac{1}{X} \frac{dU}{dX} + \left(1 - \frac{1}{X^2}\right) U = 0 \quad \text{----- (11)}$$

となり、これは Bessel 微分方程式である。一般解は

$$U = A J_1(X) + B Y_1(X) \quad \text{----- (12)}$$

こゝに $J_1(X)$, $Y_1(X)$ はそれぞれが 1 種、2 種の Bessel 函数である。A, B は初期条件から決定すべき積分常数であるが液滴尖端部分では $X \rightarrow 0$ に於いて $Y_1(X) \rightarrow \infty$ であるので $B \equiv 0$ をなければならぬ。

$$\therefore U = A J_1(X) = A J_1(\sqrt{2}x)$$

初期条件から $U = \sqrt{2} r_0 J_1(\sqrt{2}x) \quad \text{----- (13)}$

又 (5) 式から

$$\begin{aligned} y &= \int_0^x \left(U + \frac{1}{2} U^3 + \frac{3}{8} U^5 + \dots \right) dx \\ &= r_0 - r_0 J_0(\sqrt{2}x) + \sqrt{2} r_0^3 \int_0^x \left\{ J_1(\sqrt{2}x) \right\}^3 dx + \frac{3}{\sqrt{2}} r_0^5 \int_0^x \left\{ J_1(\sqrt{2}x) \right\}^5 dx + \dots \quad (14) \end{aligned}$$

を得るが、一般に積分 $\int_0^x \left\{ J_1(\sqrt{2}x) \right\}^n dx$ は求められないから (14) は数値積分せねばならない。液滴根本部分のみを考える時には $A \neq 0$, $B \neq 0$ であるから $\mu A = B$ において平板との接触角 S で $U = \sin \alpha = 0$ になるとすれば“その時の根本半径を λ として

$$A J_1(\sqrt{2}\lambda) + B Y_1(\sqrt{2}\lambda) = 0$$

即ち $J_1(\sqrt{2}\lambda) + \mu Y_1(\sqrt{2}\lambda) = 0 \quad \text{----- (15)}$

液滴根本半径 λ は兎に角 (15) を満足するから μ を予め適当に与えれば (15) の根として λ が求められる。 λ の最小値は

$$\frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{1}{\frac{d\mu}{d\lambda}} = -\frac{1}{\frac{d}{d\lambda} \left\{ \frac{J_1(\sqrt{2}\lambda)}{Y_1(\sqrt{2}\lambda)} \right\}} = \lambda \left\{ Y_1(\sqrt{2}\lambda) \right\}^2 = 0 \quad \text{----- (16)}$$

$$\left(\because J_1'(\sqrt{2}\lambda) Y_1(\sqrt{2}\lambda) - J_1(\sqrt{2}\lambda) Y_1'(\sqrt{2}\lambda) = -\frac{1}{\sqrt{2}\lambda} \right)^{(1)}$$

故に (16) の根は $\lambda = 0$ および $Y_1(\sqrt{2}\lambda) = 0$ の根であるが $Y_1(\sqrt{2}\lambda)$ の最小限をとって

$$\sqrt{2} \lambda_{\min} = 2.1971413^{(2)}$$

を得る。更に λ の最大値を求めるために前とは逆に

$$\eta B = A, \eta J_1(\sqrt{2}\lambda) + Y_1(\sqrt{2}\lambda) = 0$$

と置いて $\frac{d\lambda}{d\eta} = -\lambda \left\{ J_1(\sqrt{2}\lambda) \right\}^2 = 0 \quad \text{----- (17)}$

から $\sqrt{2} \lambda_{\max} = 3.8317060^{(3)}$

を得る。T. Lohmstein によって前の冪級数から λ_{\max} の近似値は求められて

いたが λ_{max} , λ_{min} の正確な値は求められていなかった。故に般に液滴
 根本半径は $2.1971413 \leq \sqrt{2} \lambda \leq 3.8317060$
 又は $2.1971413 \leq \sqrt{2} \lambda \leq \infty$ } ----- (18)

を満足せねばならない。さて ϵ_0 が次第に大きくなると液滴の形は才3図の如く
 垂直切線が2個ある形となるがこの点では $U = \sin \alpha = 1$ で(4),(5)両式の
 特異点である。この特異点附近の解について考察するに、 $U \approx 1$ であるから
 Δ を微小常数と見做して(4),(5)は近似的に

$$\left. \begin{aligned} r_0 - y &= \frac{1}{2x} \frac{d(xU)}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{U}{\Delta} \end{aligned} \right\} \text{----- (19)}$$

とおける。これから

$$\Delta \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\Delta}{x} \frac{dy}{dx} + 2y - 2r_0 = 0 \text{----- (20)}$$

を得る。変換 $\Delta(y - r_0) = Z$, $\sqrt{2}x = \sqrt{\Delta}X$ をほどこすと

$$\frac{d^2 Z}{dX^2} + \frac{1}{X} \frac{dZ}{dX} + Z = 0 \text{----- (21)}$$

となる。この一般解は

$$Z = C J_0(X) + D Y_0(X)$$

即ち $\Delta(y - r_0) = C J_0\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\Delta}}\right) + D Y_0\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\Delta}}\right) \text{----- (22)}$

である。こゝに $J_0(X)$, $Y_0(X)$ はそれぞれ零階才1種, 才2種 Bessel 函数であり,
 C, D は積分常数である。(22)式の右辺は Δ を零に近づかせるにつれて $\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\Delta}}$
 が相当大となるから漸近展開⁽⁴⁾を使って

$$\left. \begin{aligned} J_0\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\Delta}}\right) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{2}x} \left\{ \cos\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\Delta}} - \frac{3}{4}\pi\right) P_0\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\Delta}}\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\Delta}} - \frac{3}{4}\pi\right) Q_0\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\Delta}}\right) \right\} \\ Y_0\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\Delta}}\right) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{2}x} \left\{ \sin\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\Delta}} - \frac{3}{4}\pi\right) P_0\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\Delta}}\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\Delta}} - \frac{3}{4}\pi\right) Q_0\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\Delta}}\right) \right\} \\ P_0\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\Delta}}\right) &= 1 + \sum_{S=1}^{\infty} \frac{(-1)^S}{(2S)!} \frac{(-\frac{1}{4})^S (-\frac{3^2}{4})^S \dots (-\frac{(4S-1)^2}{4})^S}{\left(\frac{2\sqrt{2}x}{\sqrt{\Delta}}\right)^{2S}} \\ Q_0\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\Delta}}\right) &= \sum_{S=0}^{\infty} \frac{(-1)^S}{(2S+1)!} \frac{(-\frac{1}{4})^S (-\frac{3^2}{4})^S \dots (-\frac{(4S-1)^2}{4})^S}{\left(\frac{2\sqrt{2}x}{\sqrt{\Delta}}\right)^{2S+1}} \end{aligned} \right\} \text{----- (23)}$$

となるが、(23)式から $\Delta \rightarrow 0$ なる極限状態では $J_0\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\Delta}}\right)$ および $Y_0\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\Delta}}\right)$ はそ
 れぞれ $\Delta^{\frac{1}{4}} J_0(\sqrt{2}x)$ および $\Delta^{\frac{1}{4}} Y_0(\sqrt{2}x)$ と同程度の大きさになることがわかる。
 従つて Δ が微小な範囲では(22)式は

$$\Delta^2 (y - \eta_0) = C J_0(\sqrt{2}x) + D Y_0(\sqrt{2}x) \quad \dots \dots \dots (24)$$

と置いてよいであろう。両辺の極限 $\lim_{\Delta \rightarrow 0}$ をとり特異点の横座標を λ_1 とすれば

$$C J_0(\sqrt{2}\lambda_1) + D Y_0(\sqrt{2}\lambda_1) = 0$$

即ち $D = \xi C$, $C \neq 0$, $D \neq 0$ として

$$J_0(\sqrt{2}\lambda_1) + \xi Y_0(\sqrt{2}\lambda_1) = 0 \quad \dots \dots \dots (25)$$

特異点の横座標 λ_1 は ξ を予め適当に与えることにより (25) の根として求められる。 λ_1 の最大値は前同様に

$$\frac{d\lambda_1}{d\xi} = - \frac{1}{\frac{d}{d\lambda_1} \left\{ \frac{J_0(\sqrt{2}\lambda_1)}{Y_0(\sqrt{2}\lambda_1)} \right\}} = \lambda_1 \left\{ Y_0(\sqrt{2}\lambda_1) \right\}^2 = 0 \quad \dots \dots (26)$$

$$(\because J_0'(\sqrt{2}\lambda_1) Y_0(\sqrt{2}\lambda_1) - J_0(\sqrt{2}\lambda_1) Y_0'(\sqrt{2}\lambda_1) = - \frac{1}{\sqrt{2}\lambda_1})^{(5)}$$

から $\sqrt{2}\lambda_{1\max} = 0.8935770$ ⁽⁵⁾ が得られる。

$$\text{故に} \quad 0 \leq \sqrt{2}\lambda_1 \leq 0.8935770 \quad \dots \dots \dots (27)$$

であらねばならず $\lambda_1 = \lambda_{1\max}$ の場合は $x_1 = x_2 = \lambda_{1\max}$ 即ち垂直切線が一個の液滴の形である (その一才5図参照)。近似解によって基礎式 (9) の特性をこれ以上に調べることは極めて困難のように思われ、後は最密解に俟たねばなるまい。筆者は実際に液滴の形を求めるために (4), (5) 両式をば

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dU} &= \frac{1}{-\frac{U}{x} + 2\eta_0 - 2y} \\ \frac{dy}{dU} &= \frac{U}{\sqrt{1-U^2}} \cdot \frac{dx}{dU} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (28)$$

のように変形して $U=0$ で $x=0, y=0$ の境界条件で Runge-Kutta の数値積分法^{*}を適用した。才1表はこの計算結果で液滴の形を画くと (本告その一) 才6図のようになる。又 T. Lohmstein⁽⁷⁾ のごとく水平板に懸垂された液滴容積を求めると $0 \sim h$ 間の容積 v は

$$v = \pi \int_0^h r^2 dr = \pi r^2 h - 2\pi \int_0^h r h dr \quad \dots \dots \dots (29)$$

となる。(2) 式から

$$r h dr \left(\frac{\rho g}{T} \right) = \frac{2}{R_0} r dr - d(r \sin \alpha)$$

$$\text{即ち} \quad \int_0^h r h dr = \left(\frac{T}{\rho g} \right) \left\{ \frac{r^2}{R_0} - r \sin \alpha \right\}$$

* 日高孝次著：数値積分法 (上巻), 95頁参照

となる。故に(29)式は

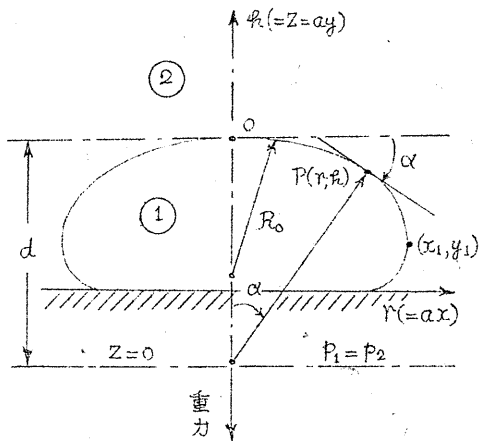
$$v = \left(\frac{2T}{\rho g}\right) \pi r \left[\sin \alpha + \frac{r}{\left(\frac{2T}{\rho g}\right)} \left\{ h - \frac{\left(\frac{2T}{\rho g}\right)}{R_0} \right\} \right] = \pi a^3 x \left[U + x(y - h_0) \right] \dots (30)$$

こゝに $\alpha^2 = \frac{2T}{\rho g}$ である。液滴全容積は $h=0, \frac{dh}{dr}=0$ の点から再び $\frac{dh}{dr}=0$ になる点まで積分すれば求まるから液滴根本半径を R , 全体の高さを H とすれば

$$V = \pi a^3 \lambda^2 (Y - h_0) = \pi R^2 \left(H - \frac{R^2}{R_0} \right) \dots (31)$$

が得られる。才7図(本報告その一)は(30), (31)両式を使って計算した容積線図である。

3. 水平板の液滴 才2図において液滴平衡式は



第2図

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - \frac{2}{R_0} - \frac{\rho g}{T} h = 0 \dots (32)$$

である。(32)式の2次元解を求めるには

$$\frac{1}{R_2} = 0, \frac{1}{R_1} = \frac{d\alpha}{ds}, h = \int_0^s \sin \alpha ds$$

であるから

$$\frac{d\alpha}{ds} - \frac{1}{R_0} - \frac{\rho g}{T} \int_0^s \sin \alpha \cdot ds = 0$$

$$\text{即ち } \frac{d^2\alpha}{ds^2} - \frac{\rho g}{T} \sin \alpha = 0 \dots (33)$$

となる。初期条件は

$$s=0 \text{ で } \alpha=0, \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R_0} \dots (34)$$

である。(33)式の解は $\frac{1}{2} \left(\frac{T}{\rho g}\right)^{\frac{1}{2}} = \sigma$ と

おけば

$$\frac{ds}{d\alpha} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \frac{1}{\sqrt{1 + \sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{1 + \sigma^2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}}$$

となり、更に $\frac{1}{1 + \sigma^2} = K^2, 2\varphi = \pi - \alpha$ と置けば

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{\sigma^2 + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = K \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \int_{\frac{\pi-\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \varphi}}$$

となるが、これを直角坐標 x, y に戻せば

$$dx = \cos \alpha ds = K \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \left\{ \left(\frac{2}{K^2} - 1\right) \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{2}{K^2} \sqrt{1 - K^2 \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi \right\}$$

$$dy = \sin \alpha ds = K \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi$$

であるから $\alpha < 0$ を考慮して

$$x = K\sqrt{\frac{T}{\rho g}} \left\{ \frac{2}{K^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi-\alpha}{2}} \sqrt{1-K^2 \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi - \left(\frac{2}{K^2} - 1 \right) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi-\alpha}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-K^2 \sin^2 \varphi}} \right\} \dots \dots \dots (35)$$

$$y = -K\sqrt{\frac{T}{\rho g}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi-\alpha}{2}} \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{1-K^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \dots \dots \dots (36)$$

が(33)式の解である。(36)式は $0 < K < 1$, $0 < K \sin \varphi < 1$ の時には次式で計算される。

$$y = K\sqrt{\frac{T}{\rho g}} \left\{ (\sin^2 \varphi - 1) + \frac{1}{4} K^2 (\sin^4 \varphi - 1) + \frac{1}{8} K^4 (\sin^6 \varphi - 1) + \frac{5}{64} K^6 (\sin^8 \varphi - 1) + \frac{7}{128} K^8 (\sin^{10} \varphi - 1) + \dots \dots \right\} \dots \dots (36a)$$

$K=1$ の場合は $\alpha=0$ 即ち $R_0 = \infty$ を意味する。その時の液滴根本半径 R_m は

$$R_m = \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \left\{ 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \varphi \cdot d\varphi - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} \right\} \rightarrow \infty$$

高さ H_m は
$$H_m = -2\sqrt{\frac{T}{\rho g}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \varphi \cdot d\varphi = -2\sqrt{\frac{T}{\rho g}}$$

この時の特異点 x_{1m} , y_{1m} は $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ において

$$x_{1m} = \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \left\{ 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \cos \varphi \cdot d\varphi - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} \right\} \rightarrow \infty$$

$$y_{1m} = -2\sqrt{\frac{T}{\rho g}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \sin \varphi \cdot d\varphi = -1.41421\sqrt{\frac{T}{\rho g}}$$

である。3次元解を求めるには(32)式を前同様に変換すると

$$r_0 + y = \frac{1}{2x} \frac{d(xU)}{dx} \dots \dots \dots (37)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{U}{\sqrt{1-U^2}} \dots \dots \dots (38)$$

となる。初期条件は(6)と同じである。(37), (38)両式の冪級数による解は(7), (6)

両式の負項を全部正項に直したものに等しい。即ち

$$U = r_0 x + \frac{1}{4} r_0 x^3 + \left(\frac{1}{24} r_0^3 + \frac{1}{48} r_0 \right) x^5 + \left(\frac{1}{64} r_0^5 + \frac{5}{288} r_0^3 + \frac{1}{1152} r_0 \right) x^7 + \dots \dots \dots (39)$$

$$y = \frac{1}{2} r_0 x^2 + \left(\frac{1}{8} r_0^3 + \frac{1}{16} r_0 \right) x^4 + \left(\frac{1}{16} r_0^5 + \frac{5}{72} r_0^3 + \frac{1}{288} r_0 \right) x^6 + \left(\frac{5}{128} r_0^7 + \frac{35}{512} r_0^5 + \frac{46}{2304} r_0^3 + \frac{1}{7216} r_0 \right) x^8 + \dots \dots \dots (40)$$

であるが、これも $x \leq 1$ で r_0 が小さい時には収斂は早い。が $x > 1$ では収斂が悪くなる。(37), (38)両式から次の2階常微分方程式が得られる。即ち

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dU}{dx} - \frac{U}{x^2} - \frac{2U}{\sqrt{1-U^2}} = 0 \dots \dots \dots (41)$$

初期条件は $x=0$ で $U=0, \frac{dU}{dx} = \rho_0 (\rho_0 < 0)$ ----- (42)

(41)式も複雑な非線型のために厳密解は到底望めない。近似解によって(41)式の性質を調べるために液滴尖端部分および根本部分を考察すると $U \approx 0$ であるから U の2次以上の微小項を省略して $\sqrt{2}x = X$ とおけば

$$\frac{d^2U}{dX^2} + \frac{1}{X} \frac{dU}{dX} - \left(1 + \frac{1}{X^2}\right) U = 0 \text{ ----- (43)}$$

となる。この一般解は E, F を積分常数として

$$U = EI_1(X) + FK_1(X)$$

こゝに $I_1(X), K_1(X)$ はそれぞれ第1種, 第2種の変形 Bessel 函数である。液滴尖端部分では(42)から

$$\left. \begin{aligned} U &= \sqrt{2} \rho_0 I_1(\sqrt{2}x) \\ y &= \rho_0 - \rho_0 I_0(\sqrt{2}x) + \sqrt{2} \rho_0^3 \int_0^x \{I_1(\sqrt{2}x)\}^3 dx + \frac{3}{\sqrt{2}} \rho_0^5 \int_0^x \{I_1(\sqrt{2}x)\}^5 dx + \dots \end{aligned} \right\} (44)$$

となるが、こゝでも定積分 $\int_0^x \{I_1(\sqrt{2}x)\}^n dx$ は困難で数値積分によらねばならない。

液滴根本部分では $E \neq 0, F \neq 0, F = \mu E$ と置けば

$$I_1(\sqrt{2}\lambda) + \mu K_1(\sqrt{2}\lambda) = 0$$

最大値は

$$\frac{d\lambda}{d\mu} = - \frac{1}{\frac{d}{d\mu} \left\{ \frac{I_1(\sqrt{2}\lambda)}{K_1(\sqrt{2}\lambda)} \right\}} = -\lambda \{K_1(\sqrt{2}\lambda)\}^2 = 0$$

$$(\because I_1'(\sqrt{2}\lambda) K_1(\sqrt{2}\lambda) - I_1(\sqrt{2}\lambda) K_1'(\sqrt{2}\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}\lambda})^{(8)}$$

$$\therefore \sqrt{2}\lambda_{max} = \infty \quad (9)$$

同様に 最小根は $E = \eta F$ とおいて

$$\frac{d\lambda}{d\eta} = \lambda \{I_1(\sqrt{2}\lambda)\}^2 = 0 \quad \text{から} \quad \sqrt{2}\lambda_{min} = 0$$

故に

$$0 \leq \sqrt{2}\lambda \leq \infty \text{ ----- (45)}$$

液滴高さ H_{max} は $\rho_0 = 0$ で $U=0, x \rightarrow \infty$ の時を考えればよい。

$$H_{max} = \frac{1}{2} \left| \left(\frac{dU}{dx} + \frac{U}{x} - 2\rho_0 \right) \right|_{\substack{x=\infty \\ \rho_0=0 \\ U=0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ EI_1'(\sqrt{2}x) + FK_1'(\sqrt{2}x) \right\}_{x \rightarrow \infty} = -\infty$$

故に

$$0 \leq H \leq \infty \text{ ----- (46)}$$

が満足されねばならない。 $U=1$ 即ち特異点 (x_1, y_1) 付近では Δ を微小常数として全く前同様にして (37), (38) 両式から

$$\Delta \frac{d^2y}{dX^2} + \frac{\Delta}{X} \frac{dy}{dX} - 2y - 2\rho_0 = 0 \text{ ----- (47)}$$

を得る。こゝで又 $\Delta(y + \rho_0) = Y, \sqrt{2}X = \Delta X$ と置換すれば

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dY}{dx} - Y = 0$$

一般解は $Y = MI_0(x) + NK_0(x)$

$$\text{即ち } \Delta(y + h_0) = MI_0\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\Delta}}\right) + NK_0\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\Delta}}\right) \quad \text{----- (48)}$$

である。こゝに M, N は積分常数、 $I_0(x), K_0(x)$ はそれぞれ零階変形 Bessel 函数である。 $\Delta \rightarrow 0$ では $\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\Delta}}$ が充分大となるから漸近展開の助けをかりれば $I_0\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\Delta}}\right)$ および $K_0\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\Delta}}\right)$ はそれぞれ $\Delta^{\frac{1}{4}} I_0(\sqrt{2}x)$ および $\Delta^{\frac{1}{4}} K_0(\sqrt{2}x)$ と同程度の大きさになる。故に (48) 式は近似的に

$$\Delta^{\frac{3}{4}}(y + h_0) = MI_0(\sqrt{2}x) + NK_0(\sqrt{2}x)$$

となる。両辺の極限 $\lim_{\Delta \rightarrow 0}$ をとると

$$MI_0(\sqrt{2}\lambda) + NK_0(\sqrt{2}\lambda) = 0$$

$$\text{或は } I_0(\sqrt{2}\lambda) + \epsilon K_0(\sqrt{2}\lambda) = 0, \quad N = \epsilon M \quad \text{----- (49)}$$

したがって特異点の最大値は

$$\frac{d\lambda}{d\epsilon} = -\lambda \{K_0(\sqrt{2}\lambda)\}^2 = 0$$

から $\lambda_{\max} = \infty^{(40)}$ を得る。結局特異点の横坐標は

$$0 \leq \sqrt{2}\lambda \leq \infty \quad \text{----- (50)}$$

の関係を満たさなければならない。更に液滴の性質を調べるには (41) 式の厳密解を求めねばならず、これは今後に残された問題であろう。筆者は実際に液滴の形を求めるために (37), (38) 両式を前同様に変形して Runge-Kutta の数値積分法を適用した。その計算結果が才 2 表であり、液滴の形を画くと才 11 図 (本報告その一) の如くなる。液滴容積は $0 \sim h_0$ 間では

$$V = \pi \int_0^R r^2 dr = \pi a^3 x [-U + (y + h_0)x]$$

となる。今液滴根本半径を R , 高さを H , 全容積を V で表せば

$$V = \pi a^3 \lambda^2 (Y + h_0) = \pi R^2 \left(H + \frac{a^2}{R_0}\right) \quad \text{----- (51)}$$

を得る。

以上で大体の計算方法を述べた訳であるが、非線型という難関のために容易に問題の本質に近づき得ない。同じ近似解でも更に近似度の高い解を得ることが望ましいが、これも今後に残された問題であろう。筆者は本研究に關聯して回転体による液体の微粒化機構について調べておるが追って発表できることと思う。摘筆に當り終始御導を賜わる本学部井原教授に對して厚く感謝の意を表す。尚本研究は文部省自然科学研究費補助によつて行つたものである。

文 献

- (1)~(6) Gray, Mathews : A Treatise on Bessel Function, p.25, p.301
 (7) T. Lohnstein ; Ann. d. Phys. 4, 20(1906) 237. 4, 20(1906) 606.
 " Ann. d. Phys. u. Chem. 4, 21(1907), 1030
 (8)~(10) (1)~(6) に同じ.

第 1 表 (その二)

$k_0 = 0.2$			$k_0 = 0.8$		
U	$C_x(X=C_x\sqrt{\frac{I}{P\beta}})$	$C_Y(Y=C_Y\sqrt{\frac{I}{P\beta}})$	U	$C_x(X=C_x\sqrt{\frac{I}{P\beta}})$	$C_Y(Y=C_Y\sqrt{\frac{I}{P\beta}})$
0.000	0.000000	0.000000	0.50	1.168336	0.32820
0.050	0.42467	0.01056	0.5518	1.34664	0.43881
0.100	0.86823	0.04418	0.6147	1.73432	0.72165
0.1456	1.41105	0.11259	0.60	2.09835	1.00449
0.1639	1.94385	0.19745	0.50	2.50225	1.27641
0.150	2.46898	0.28230	0.40	2.75526	1.40489
0.100	3.05197	0.35749	0.30	2.96683	1.48434
0.050	3.45360	0.38802	0.20	3.15924	1.53411
0.000	3.81297	0.39706	0.10	3.34070	1.56180
			0.00	3.51817	1.57070
$k_0 = 0.4$			$k_0 = 1.0$		
0.000	0.000000	0.000000	0.00	0.00000	0.00000
0.050	0.21564	0.00536	0.10	0.18234	0.00907
0.100	0.42728	0.02128	0.20	0.35963	0.03598
0.150	0.64201	0.04850	0.30	0.53646	0.08172
0.200	0.87297	0.08948	0.40	0.71771	0.14963
0.250	1.13575	0.15041	0.50	0.91044	0.24713
0.3054	1.55414	0.27292	0.60	1.12867	0.39182
0.3242	1.97551	0.41434	0.70	1.42521	0.64959
0.300	2.40063	0.55576	0.7287	1.56657	0.79449
0.250	2.74562	0.65523	0.7422	1.82368	1.07734
0.200	2.99236	0.71257	0.70	2.09143	1.36018
0.150	3.20264	0.76014	0.60	2.37112	1.60312
0.100	3.39437	0.77428	0.50	2.57190	1.73642
0.050	3.57622	0.78799	0.40	2.74413	1.82361
0.000	3.75370	0.79244	0.30	2.90152	1.88262
$k_0 = 0.6$			$k_0 = 1.2$		
0.00	0.000000	0.000000	0.00	0.00000	0.00000
0.10	0.25986	0.01292	0.10	0.15821	0.00787
0.20	0.51531	0.05176	0.20	0.31151	0.03113
0.30	0.78124	0.12070	0.30	0.46280	0.07024
0.40	1.08193	0.23381	0.40	0.61489	0.12718
0.5028	1.68161	0.54328	0.50	0.77110	0.20613
0.50	2.16169	0.82612	0.60	0.93670	0.31566
0.40	2.48837	0.96969	0.70	1.12184	0.47519
0.30	2.83729	1.10153	0.80	1.36358	0.75460
0.20	3.11358	1.17335	0.8327	1.49064	0.94006
0.10	3.36189	1.21122	0.85	1.65764	1.22291
0.00	3.59926	1.22315	0.80	1.94568	1.63924
$k_0 = 0.8$			$k_0 = 1.2$		
0.00	0.000000	0.000000	0.70	2.17336	1.90243
0.10	0.22202	0.01104	0.60	2.34190	2.04776
0.20	0.43705	0.04400	0.50	2.48796	2.14442
0.30	0.65955	0.10111			
0.40	0.89497	0.18945			

0.40	2.62191	2.21216
0.30	2.74852	2.25960
0.20	2.87056	2.29119
0.10	2.96988	2.30933
0.00	3.10794	2.31525

$k_0 = 1.4$

0.00	0.00000	0.00000
0.10	0.14365	0.00714
0.20	0.28234	0.02818
0.30	0.41814	0.06327
0.40	0.55290	0.11371
0.50	0.68861	0.18225
0.60	0.82777	0.27421
0.70	0.97450	0.40039
0.80	1.13777	0.58754
0.90	1.35968	0.96055
0.9261	1.48345	1.24343
0.9271	1.59638	1.52627
0.90	1.71705	1.80911
0.80	1.92579	2.16003
0.70	2.07368	2.32971
0.60	2.20145	2.43967
0.50	2.31857	2.51712
0.40	2.42918	2.57303
0.30	2.53555	2.61287
0.20	2.63916	2.63968
0.10	2.74110	2.65521
0.00	2.84225	2.66029

$k_0 = 1.6$

0.00	0.00000	0.00000
0.10	0.13898	0.00691
0.20	0.27236	0.02713
0.30	0.40192	0.06060
0.40	0.52908	0.10817
0.50	0.65522	0.17186
0.60	0.78181	0.25546
0.70	0.91092	0.36638
0.80	1.04623	0.52113
0.90	1.19779	0.77177
0.95	1.29275	1.00916
0.9740	1.35957	1.25205
0.9829	1.41719	1.53489
0.9778	1.47218	1.81773
0.95	1.55441	2.10058
0.90	1.64538	2.32828
0.80	1.78167	2.55420
0.70	1.89651	2.68569
0.60	2.00116	2.77568
0.50	2.09971	2.84082
0.40	2.19428	2.88861
0.30	2.28636	2.92309
0.20	2.37647	2.94640
0.10	2.46547	2.95993
0.00	2.55395	2.96437

$k_0 = 1.7996$

0.00	0.00000	0.00000
0.10	0.14381	0.00713
0.20	0.28029	0.02808
0.30	0.41115	0.06187
0.40	0.53760	0.10915
0.50	0.66051	0.17118
0.60	0.78063	0.25045
0.70	0.89871	0.35180

0.80	1.01583	0.48549
0.90	1.13457	0.68074
0.999	1.27756	1.35097
0.9999	1.28604	1.74684
0.9997	1.29281	1.93122
0.90	1.44235	2.69200
0.80	1.54900	2.86811
0.70	1.64445	2.97730
0.60	1.73382	3.05412
0.50	1.81930	3.11061
0.40	1.90215	3.14247
0.30	1.98318	3.18281
0.20	2.06297	3.20344
0.10	2.14198	3.21545
0.00	2.22063	3.21940

$k_0 = 2.0$

0.00	0.00000	0.00000
0.10	0.18569	0.00847
0.20	0.35942	0.03477
0.30	0.52437	0.07736
0.40	0.68231	0.13639
0.50	0.83390	0.21286
0.60	0.97916	0.30867
0.70	1.11745	0.42726
0.80	1.24789	0.57595
0.90	1.37028	0.77644
1.0000	1.49344	1.35880
0.9913	1.46914	1.67839
0.997	1.39726	2.27333
1.0000	1.39536	2.34034
0.999	1.39699	2.41089
0.90	1.50390	2.89037
0.80	1.59297	3.03720
0.70	1.67522	3.13123
0.60	1.75347	3.19848
0.50	1.82908	3.24843
0.40	1.90285	3.28570
0.30	1.97533	3.31283
0.20	2.04691	3.33135
0.10	2.11793	3.34214
0.00	2.18869	3.34569

$k_0 = 2.2$

0.00	0.00000	0.00000
0.10	0.26276	0.01299
0.20	0.50981	0.05043
0.30	0.74809	0.11199
0.40	0.98506	0.20067
0.50	1.22064	0.31958
0.60	1.44968	0.47027
0.70	1.65769	0.64829
0.80	1.82757	0.84078
0.90	1.95710	1.05119
0.999	2.05536	1.44853
1.0000	2.05632	1.48428
0.999	2.05532	1.52698
0.9547	1.94241	2.03892
0.999	1.82456	2.60017
1.0000	1.82337	2.64273
0.999	1.82448	2.69075
0.90	1.91198	3.07233
0.80	1.98911	3.19936
0.70	2.06169	3.28231
0.60	2.13148	3.34228
0.50	2.19938	3.38713

0.40	2.26593	3.42075	$r_0 = 2.6$		
0.30	2.33153	3.44531			
0.20	2.39647	3.46210			
0.10	2.46099	3.47191			
0.00	2.52530	3.47513	0.00	0.00000	0.00000
$r_0 = 2.4$			0.10	0.18657	0.00927
0.00	0.00000	0.00000	0.20	0.36653	0.03657
0.10	0.24616	0.012216	0.30	0.54432	0.08255
0.20	0.48317	0.04819	0.40	0.72424	0.14992
0.30	0.72070	0.10965	0.50	0.91160	0.24465
0.40	0.96900	0.20276	0.60	1.11536	0.37953
0.50	1.24417	0.34216	0.70	1.35732	0.58648
0.60	1.58450	0.56845	0.7824	1.70825	0.98693
0.70	2.13859	1.05105	0.80	2.12075	1.55261
0.80	2.47478	1.44634	0.7612	2.42298	1.92890
0.90	2.61997	1.64648	0.80	2.12075	2.21175
1.0000	2.68932	1.93327	0.90	2.74792	2.35295
0.9185	2.57744	2.29523	1.0000	2.79218	2.53465
1.0000	2.36355	3.06609	0.9189	2.75397	2.70794
0.90	2.43925	3.42526	0.90	2.52873	3.13220
0.80	2.50758	3.53772	1.0000	2.42279	3.55625
0.70	2.57268	3.61211	0.90	2.48950	3.86913
0.60	2.63575	3.66630	0.80	2.55103	3.97037
0.50	2.69741	3.70703	0.70	2.61017	4.03794
0.40	2.75807	3.73766	0.60	2.66778	4.08742
0.30	2.81800	3.76009	0.50	2.72428	4.12476
0.20	2.87741	3.77546	0.40	2.78005	4.15291
0.10	2.93651	3.78444	0.30	2.83527	4.17358
0.00	2.99547	3.78690	0.20	2.89005	4.18775
			0.10	2.94459	4.19603
			0.00	2.99900	4.19876

第 2 表 (その二)

$r_0 = -0.2$			$r_0 = -0.6$		
U	C _x	C _y	U	C _x	C _y
0.00	0.00000	2.01631	0.999	1.62607	0.60906
0.05	0.34830	2.00764	1.0000	1.62680	0.57829
0.10	0.66893	1.98367	0.999	1.62609	0.54818
0.15	0.94924	1.94852	0.90	1.56458	0.28440
0.20	1.18959	1.90595	0.80	1.50874	0.19245
0.25	1.39571	1.85848	0.60	1.40681	0.08993
0.30	1.57391	1.80760	0.40	1.31384	0.03556
0.35	1.72960	1.75418	0.20	1.22774	0.00818
0.40	1.86702	1.69865	0.00	1.14749	0.00000
0.50	2.09937	1.58192	$r_0 = -0.8$		
0.60	2.28908	1.45718	0.00	0.00000	1.60090
0.70	2.44711	1.32203	0.10	0.17609	1.57208
0.80	2.58023	1.17073	0.20	0.34821	1.56598
0.90	2.69241	0.98771	0.30	0.51300	1.52345
0.999	2.78327	0.62719	0.40	0.66809	1.46552
1.0000	2.78401	0.59549	0.50	0.81208	1.39295
0.999	2.78327	0.56889	0.60	0.94438	1.30577
0.90	2.71998	0.29726	0.70	1.06489	1.20253
0.80	2.66241	0.20245	0.80	1.17366	1.07871
0.70	2.60819	0.14049	0.90	1.27052	0.92039
0.60	2.55638	0.09596	0.999	1.35285	0.59100
0.50	2.50646	0.06298	1.0000	1.35355	0.56125
0.30	2.41106	0.02092	0.999	1.35288	0.53209
0.00	2.27628	0.00000	0.90	1.30508	0.27605
$r_0 = -0.4$			0.80	1.25070	0.18650
0.00	0.00000	1.87094	0.60	1.15154	0.08675
0.05	0.17609	1.86656	0.40	1.06153	0.03410
0.10	0.34824	1.85363	0.20	0.97884	0.00780
0.15	0.51319	1.83288	0.00	0.90260	0.00000
0.20	0.66877	1.80526	$r_0 = -1.0$		
0.25	0.81391	1.77178	0.00	0.00000	1.48271
0.30	0.94838	1.73335	0.10	0.14107	1.47565
0.40	1.18597	1.64446	0.20	0.28006	1.45456
0.50	1.38985	1.54240	0.30	0.41512	1.41966
0.60	1.56306	1.41428	0.40	0.54467	1.37126
0.70	1.70892	1.28945	0.50	0.66755	1.30930
0.80	1.83506	1.14601	0.60	0.78293	1.23323
0.90	1.94335	0.96922	0.70	0.89027	1.14123
0.999	2.03233	0.61537	0.80	0.98909	1.02868
1.0000	2.03307	0.58401	0.90	1.07877	0.88200
0.999	2.03233	0.55860	0.999	1.15649	0.56989
0.90	1.96970	0.28977	1.0000	1.15716	0.54134
0.80	1.91285	0.19616	0.999	1.15650	0.51772
0.60	1.80875	0.09148	0.90	1.09829	0.26833
0.40	1.71312	0.03558	0.80	1.04514	0.18132
0.20	1.62372	0.00718	0.60	0.94833	0.08391
0.00	1.53940	0.00000	0.40	0.86091	0.03276
$r_0 = -0.6$			0.20	0.78132	0.00743
0.00	0.00000	1.73076	0.00	0.70886	0.00000
0.10	0.23410	1.71908	$r_0 = -1.2$		
0.20	0.45913	1.68500	0.00	0.00000	1.38150
0.30	0.66850	1.63103	0.10	0.11764	1.37561
0.40	0.85895	1.55995	0.20	0.23408	1.35793
0.50	1.02985	1.47390	0.30	0.34808	1.32846
0.60	1.18202	1.37368	0.40	0.45881	1.28006
0.70	1.31684	1.25832	0.50	0.56528	1.23336
0.80	1.43571	1.12297	0.60	0.66677	1.16642
0.90	1.53941	0.95360			

0.70	0.76256	1.98421	$\eta_0 = -1.6$		
0.80	0.85235	0.98202	0.00	0.00000	1.20568
0.90	0.93505	0.84667	0.10	0.08830	1.20200
0.999	1.00802	0.69398	0.20	0.17613	1.18866
1.0000	1.00866	0.52531	0.30	0.26292	1.16623
0.999	1.00504	0.49852	0.40	0.34820	1.13433
0.70	0.95205	0.25966	0.50	0.43149	1.09223
0.80	0.90067	0.17506	0.60	0.51234	1.03896
0.60	0.80697	0.08079	0.70	0.59027	0.97211
0.40	0.72260	0.03141	0.80	0.66477	0.88718
0.20	0.64615	0.00707	0.90	0.73513	0.77192
0.00	0.57749	0.00000	0.999	0.79906	0.65403
$\eta_0 = -1.4$			1.0000	0.79964	0.48805
0.00	0.00000	1.28588	0.999	0.79907	0.46383
0.10	0.10088	1.28083	0.90	0.74753	0.24485
0.20	0.20100	1.26563	0.80	0.69970	0.16611
0.30	0.29961	1.24014	0.60	0.61207	0.07795
0.40	0.39755	1.20349	0.40	0.53340	0.03189
0.50	0.49079	1.15644	0.20	0.46314	0.00950
0.60	0.58072	1.09712	0.00	0.40125	0.00000
0.70	0.66674	1.02335			
0.80	0.74822	0.93048			
0.90	0.82438	0.80577			
0.999	0.89264	0.52967			
1.0000	0.89325	0.50379			
0.999	0.89266	0.47829			
0.90	0.83888	0.24963			
0.80	0.78926	0.16794			
0.60	0.69860	0.07673			
0.40	0.61712	0.02903			
0.20	0.54393	0.00572			
0.00	0.47688	0.00000			