2次元抵抗領域につけた2電極間の抵抗値の計算

荒 又 光 夫，寺 門 龍 一

Calculation of the Resistance Value between two Electrodes attached on the Two-Dimensional Resistance Domain

Mitsuo ARAMATA and Ryûiti TERAKADO

Abstract: —In a previous paper were shown the calculating methods of the resistance value between two electrodes attached on the periphery of the resistance plate which is simply connected and fundamental in shape, such as a circle, rectangle and half-plane. At first, in this paper, the calculating methods are extended to a doubly connected domain when it can be divided into two simply connected and congruent domains. Successively, the methods are applied to the case of the surface of revolution which can be conformally transformed to a plane by theory of differential geometry.

1. ま え が き

さきに，厚さと抵抗率の一様な平板抵抗体のうち，円，長方形，半平面およびこれらに容易に等角に写像することのできる形のものについて，その周辺に2電極を密着させたときの，電極間の抵抗値を求める計算式を示した[(1)]。その考えをさらにすすめて，より複雑な図形，たとえば，穴のある円板抵抗体や，回転曲面抵抗薄膜などに，2つの電極をつけたときの，2電極間の抵抗値を計算する方法を考究した。したがって，この報告には，前の論文の計算式を利用した部分が非常に多い。本文中に既報とあるのは，すべてこの文献(1)の論文をさすものである。

また，既報では，抵抗板の厚さ d，抵抗率 ρ として抵抗値を示したが，面抵抗率 $\rho/d=1$ とすれば，抵抗値は抵抗領域の形と電極配置だけで幾何学的に決定されるので，この報告では，すべて $\rho/d=1$ として幾何学的な抵抗を考えている。

2. 無 限 平 面

無限平面抵抗薄膜の表面に，ごく幅の狭い，ある長さの線状の2電極を密着させたとき

の，電極間の抵抗値について考える。今，この2電極間に電流を流すとき，一方の電極の両端から，他の電極の両端に至る2本の電流線を生ずる場合には，この2本の電流線と，2電極とで作られる閉曲線の内と外とは，並列な電流界となるので，この閉曲線の内部と外部の図形が，それぞれ抵抗計算可能な図形であれば，抵抗値を求めることができる。また内外の電流線の数が等しければ，両方の抵抗値は等しく，一方の抵抗値の½が求める抵抗値となる。以下この条件を満足する場合について述べる。

＜2.1＞　無限平面の直線上に2電極をおくとき

無限平面抵抗薄膜の1直線に沿って，線分状の2電極をつけるときは，図形の対称性から明らかに，この直線の両側の電流界は全く等しくなり，この直線に沿う電流線も必ず存在する。したがって，このときの抵抗値は，半平面のへりに，同じように電極をつけたときの抵抗値の½となるから，既報ノモグラムによって容易に求めることができる。

＜2.2＞　無限平面の円周上に2電極をおくとき

無限平面上1つの円周に沿って2電極をおいたときの電流界は，次の写像によって明確となる。今，考えている無限平面を w 平面とし，電極をおいた円の半径を1として，これを，写像関数

$$z=\frac{1-w}{1+w}i \quad \cdots\cdots (1)$$

によって，z 平面に写像すれば，w 平面の半径1の円周は z 平面の x 軸に，そして電極は x 軸上の2つの線分に，また円の内部は上半平面に外部は下半平面に，それぞれ写像される。この写像された z 平面の電流界は＜2.1＞のそれにほかならないから，これをもとの w 平面にもどして考えれば，無限平面の1円周に沿って2電極をおくときは，円周上の電極をおかない部分を通る電流線が必ず存在し，これを境に，円の内外の電流線数同じになって，両方の抵抗値は等しくなり，求める抵抗値は，円板の周辺に2電極をつけたときのそれの½として，既報により求めることができる。

3.　穴のある円板

＜3.1＞　円板に同心の円形穴のあるとき

円板抵抗体にこれと同心な円形穴のあるとき，その周辺に2電極をつけたときの抵抗値は，この領域をすでに計算ずみの，円，長方形等に写像できれば求まるわけである。この領域を長方形に写像する関数としては，

$$z=\log w \quad \cdots\cdots (2)$$

が知られている。これは図1のように，w 平面上の半径1の円に，半径 r の穴があるとき，これを z 平面の縦 2π，横 $\log r$ の長方形に写像するものである。このとき，w 平面の半径1の外円周は，z 平面の y 軸上の 2π の長さの線分に，また w 平面の半径 r の内円周は，z 平面の y 軸に平行な 2π の長さの線分に，それぞ

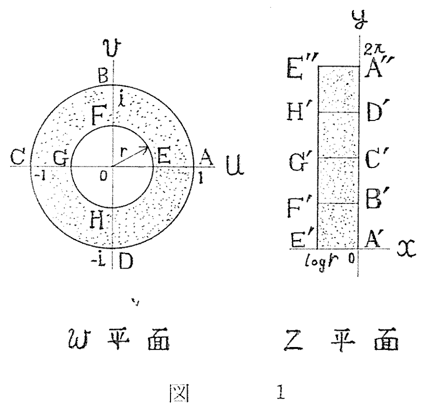


図　1

れ写像され，長方形の相対する2辺となる。そして，長方形の残りの対辺は，w 平面のAEの部分が切り開かれたものである。したがって，長方形への等角写像がなされるためには，AEを切り開いても電流の流れが変化しないことが必要であり，そのためには，AEに沿って電流線が通っていなければならない。よって，周辺に電極をつける際には，この条件をみたすよう，両電極とも u 軸に関して対称であることが要求される。

まず，図2(a)のように，外円周部に u 軸に対称に2電極が配置され，その中心角がそれぞれ 2α，2β の場合を考える。この場合は明らかに u 軸を電流線が通る。これを z 平面に写像したときの電極の位置は，(2) 式に

$$w=re^{i\theta},\ z=x+iy$$

を代入すると，

$$x=\log r,\ y=\theta \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

となるから，A′, B′, C′, D′, の y 座標はそれぞれ，図2(b) のように

$$y_{A'}=2\pi-\alpha,\ y_{B'}=\alpha,\ y_{C'}=\pi-\beta,$$
$$y_{D'}=\pi+\beta$$

となるので，図(c) のようにその半分を考えると，それは長方形に2電極をつけたものとなり，その間の抵抗値は既報によって計算でき，求める穴のある円板の抵抗値は，長方形が2つ並列となるから，その値の½である。

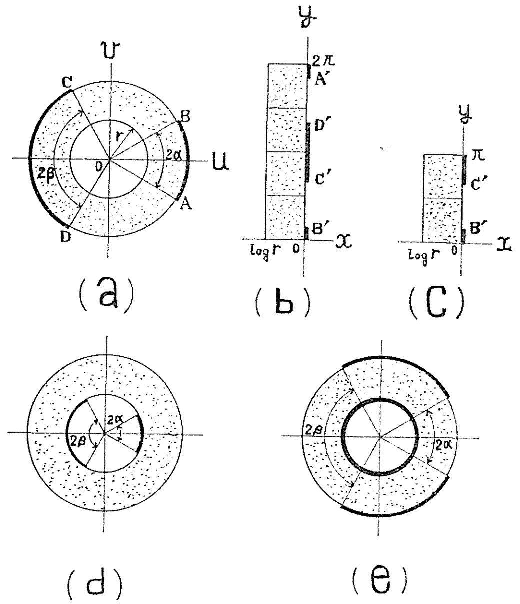


図　2

また図 (d) のように，内円周に u 軸に対称に2電極をつけた場合の抵抗値が，外円周につけた場合と等しくなることは，これを長方形に写像して考えれば当然である。

さらに図2 (e) のように，図 (a) で外円周の電極でなかった部分を2電極とし，内円周に電極ではない導体を密着させたときの2電極間の抵抗値は，これを R' とし，図 (a) のときの抵抗値を R とすれば

$$R'=1/R$$

として求めることができる。[2]

特別の場合として，2つの電極長が等しい，すなわち $2\alpha=2\beta$ の場合について，穴の半径 r と抵抗値 R との関係を，穴に導体を密着させたときと，つけないときの両方について示すと図3のようになる。

また，2電極を内外の円周にわけてつけた場合も，同様の方法で計算することができる。

＜3.2＞ 円板に偏心の円形穴のあるとき

ここでは，偏心円を同心円に写像して抵抗値を計算する。図4のように，z 平面の偏心円形穴のある円領域を，w 平面の同心円形穴をもつ円領域に等角に写像する関数としては

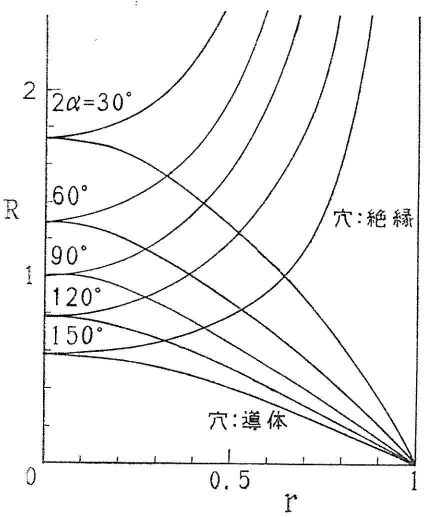


図　3

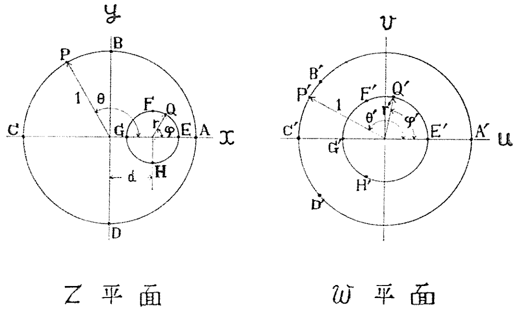


図　4

$$w=-t\frac{z-s}{z-t} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

ただし

$$st=1,\quad (d-s)(d-t)=r^2$$

[3]がある。この写像関数によれば，z 平面の単位円は w 平面でも単位円となり，z 平面の中心 $x=d$，半径 r の円は，w 平面上では，同心で，半径

$$r'=\frac{tr}{t-d}=\frac{(1+r^2-d^2)-\sqrt{(1+r^2-d^2)^2-4r^2}}{2r} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5)$$

の円となる。次に，z 平面の外円周および偏心内円周上の点が，w 平面の円周上のどこに写像されるかを求める。(4) 式から

$$u=\frac{-t(1+x^2+y^2)+(1+t^2)x}{(x-t)^2+y^2},\qquad v=\frac{-t(1-t^2)y}{(x-t)^2+y^2} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6)$$

の関係を得るので，まず外円周上の点については，

$$x=\cos\theta,\quad y=\sin\theta$$

を (6) に代入して，t を消去し

$$u=\cos\theta'=\frac{(1+d^2-r^2)\cos\theta-2d}{(1+d^2-r^2)-2d\cos\theta} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7)$$

を得る。内円周上の点については

$$x=d+r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi$$

を (6) に代入して

$$\cos\varphi'=\frac{(d^2+r^2-1)\cos\varphi+2rd}{(d^2+r^2-1)+2rd\cos\varphi} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8)$$

となる。この (7)，(8) 式によって，偏心円板周辺の2電極を，同心円周に写像すれば，<3.1>の方法によって抵抗値を計算できる。ただし，計算可能な偏心円板上の電極配置は，これを同心円周に写像したときに，前述のように，両電極ともある軸に対して対称な配置になっていなければならない。それには，偏心円板上で，2電極とも x 軸に対称であればよいのはいうまでもないが，偏心円板では対称でなくとも，これを同心円板に写像して対称となる場合には計算できるわけである。

一例として，偏心円内外全円周に導体をつけて2電極とするときは，その抵抗値は

$$R=\frac{1}{2\pi}log\left\{\frac{2r}{(1+r^2-d^2)-\sqrt{(1+r^2-d^2)^2-4r^2}}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(9)$$

となる。(9) 式を，電流界と静電界との対応を与える

$CR=\varepsilon\rho$

の関係式に代入して，偏心円柱コンデンサの単位長当りの静電容量を求めると

$$C=\frac{2\pi\varepsilon}{log\left\{\frac{(1+r^2-d^2)+\sqrt{(1+r^2-d^2)^2-4r^2}}{2r}\right\}}=\frac{2\pi\varepsilon}{cosh^{-1}\frac{1+r^2-d^2}{2r}}\cdots\quad(10)$$

となる。

<3.3> 長 円 形 板

長円形の抵抗板の周辺に，2電極をつけたときの抵抗値を求める。長円の内部領域は単連結であるが，これを，円，長方形等の他の単連結な領域に写像する関数は，非常に繁雑なので，ここでは，次のような穴のある円への写像によって考える。

$$z=\frac{w\pm\sqrt{w^2+b^2-1}}{1+b}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(11)$$

あるいはこれを逆に解いた

$$w=\frac{cosh\{log\,z+tanh^{-1}b\}}{cosh\,tanh^{-1}b}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(12)$$

は，図5のように，w 平面の長軸1，短軸 b の長円の内部を，z 平面の外半径1，内半径

$$r=\sqrt{\frac{1-b}{1+b}}\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(13)$$

の穴のある円領域に写像するものである。ここで，長円の2焦点 $\pm\sqrt{1-b^2}$ を結ぶ線分が，円の穴に対応するので，長円は本来単連結であるが，この写像による場合には，焦点を結ぶ線分が切り開かれた2重連結領域としての性格をも持つことになる。したがって，どちらの領域として考えても，電流の状態が同じになる場合にのみ用いられる。すなわち，この線分を電流線が通るように，2電極とも u 軸に関して対称に配置される必要がある。次に，長円周上の点と，円周上の点との対応関係を示す式を導く。(12) 式において

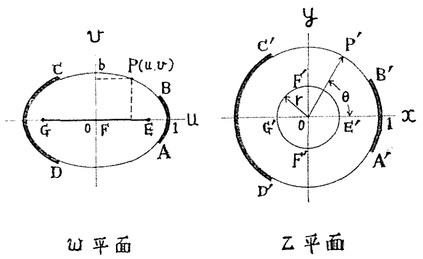


図 5

$w=u+iv,\quad z=e^{i\theta}$

とおくとと

$$u=cos\theta,\quad v=b\,sin\theta\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(14)$$

なるから，長円周上の u 座標を知れば，ただちに円周上の中心角がわかるので，<3.1>の方法で抵抗値を計算できる。

4. 回 転 曲 面

一般に任意の曲面は，これを平面に等角に対応させることが可能であるが，回転曲面は比較的容易にそれを平面に写像する対応関係を見いだすことができるので，回転曲面抵抗

薄膜に2電極をつけたときの抵抗値を計算する方法について述べる。

<4.1> 回転円群から同心円群への写像

回転曲面の一般式は，その母線の方程式を図6のように，

$$z=\varphi(u) \qquad (15)$$

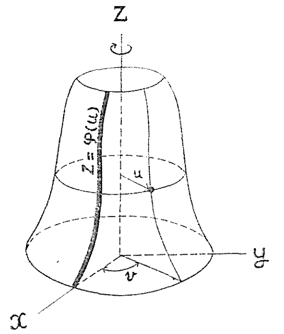


図 6

とすると

$$\begin{cases} x=u\cos v \\ y=u\sin v \\ z=\varphi(u) \end{cases} \qquad (16)$$

であらわされる。この曲面上の回転円群を平面上の同心円群に等角に対応させる。この曲面の第一基本量は

$$\begin{cases} E_1=1+\{\varphi'(u)\}^2 \\ F_1=0 \\ G_1=u^2 \end{cases} \qquad (17)$$

であり，これに対応する平面上の同心円群の方程式を

$$\begin{cases} x=f(u)\cos v \\ y=f(u)\sin v \\ z=0 \end{cases} \qquad (18)$$

であらわせば，その第一基本量は

$$\begin{cases} E_2=\{f'(u)\}^2 \\ F_2=0 \\ G_2=\{f(\mathrm{u})\}^2 \end{cases} \qquad (19)$$

となる。この2つが等角対応するためには，

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{F_1}{F_2}=\frac{G_1}{G_2} \qquad (20)$$

であればよい。[4] (17)，(19) 式を (20) に代入して

$$\frac{1+\varphi'^2}{f'^2}=\frac{u^2}{f^2}$$

$$\therefore \quad \log f=\int \pm\frac{\sqrt{1+\varphi'^2}}{u}du+C \qquad C\text{: 積分定数}$$

よって，平面上の円群の半径は

$$f=Ae^{\int \frac{\pm\sqrt{1+\varphi'^2}}{u}du} \qquad (21)$$

となり，円群の方程式は

$$\begin{cases} x=Ae^{\int \frac{\pm\sqrt{1+\varphi'^2}}{u}du}\cdot\cos v \\ y=Ae^{\int \frac{\pm\sqrt{1+\varphi'^2}}{u}du}\cdot\sin v \end{cases} \qquad (22)$$

となる。これによって，回転曲面円群の平面上同心円群への等角対応が得られる。

<4.2> 回転円群の平行直線群への写像

回転曲面の回転円群を，平面上の平行直線群に写像する。回転曲面の方程式を（16）式とすると，その曲面の線素は

$$ds^2=(1+\varphi'^2)du^2+u^2dv^2$$

とあらわすことができる。これを変形すると

$$ds^2=\{\pm\sqrt{1+\varphi'^2}\,du+iudv\}\{\pm\sqrt{1+\varphi'^2}\,du-iudv\}$$

となるから

$$d\alpha=\frac{1}{u}\{\pm\sqrt{1+\varphi'^2}\,du+iudv\}=\frac{\pm\sqrt{1+\varphi'^2}}{u}du+idv$$

$$d\beta=\frac{1}{u}\{\pm\sqrt{1+\varphi'^2}\,du-iudv\}=\frac{\pm\sqrt{1+\varphi'^2}}{u}du-idv$$

とおけば

$$\alpha=\int\frac{\pm\sqrt{1+\varphi'^2}}{u}du+iv,\quad \beta=\int\frac{\pm\sqrt{1+\varphi'^2}}{u}du-iv$$

が得られる。したがって

$$\alpha=\xi+i\eta,\quad \beta=\xi-i\eta$$

とおけば

$$\xi=\int\frac{\pm\sqrt{1+\varphi'^2}}{u}du+C,\quad \eta=v\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (23)$$

C：積分定数

であって，しかも

$$ds^2=\frac{1}{u^2}(d\xi^2+d\eta^2)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (24)$$

である。したがって，回転曲面上の点（u, v）を（23）式によって平面上の直交座標（ξ, η）に対応させるならば，回転曲面の平面上への等角対応が得られる。

<4.3> 1つの周辺をもつ回転曲面

回転曲面抵抗薄膜が1つの周辺をもつ単連結曲面である場合，すなわち，図7のように母線 $z=\varphi(u)$ の一端 u_1 のみが z 軸上にある場合は，これを<4.1>の方法で平面に写像すると，u_1 点の対応する円の半径は（21）式から

$$f_{u1}=\lim_{u\to 0} e^{\left|\int\frac{\pm\sqrt{1+\varphi'^2}}{u}\right|du}=\infty \text{または} 0\cdots\cdots\cdots(25)$$

となるので，u_1 点が半径0の点に対応するように符号を選べば，この曲面は1つの円の内部に写像され，回転曲面周辺の中心角は，そのまま円周の中心角となるので，単連結回転曲面抵抗薄膜の周辺に2電極をつけたときの抵抗値は，円板抵抗体の周辺に同じように電極をつけたときの抵抗値と全く等しくなり，既報によって求められる。

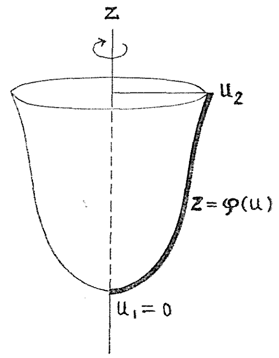


図 7

<4.4> 2つの周辺をもつ回転曲面

回転曲面の母線の両端とも z 軸上にない場合は，これを<4.1>の方法で写像すると，

2つの同心円の間の領域に移るので，<3.1>にしたがって計算できる。同心円に写像したときの内外円の半径は (21) 式で計算できる。

<4.5>　回転閉曲面

母線の両端が回転軸上にある場合は，回転曲面は，位相幾何学でいう示性数0の閉曲面となる。その任意の回転円に沿って2電極をつけるものとし，その間の抵抗値を考える。<4.1>の方法でこれを写像すると，(25) 式から明らかなように，図8の u_1，u_2 点は半径0または∞のいずれかに写像されるのであるから，曲面を平面に写像したときに，重なりあう部分がないよう，(22) 式の符号を適当に選べば，u_1 が半径0ならば u_2 は∞に写像され，結局閉曲面は全平面に対応する。そして，回転円群は同心円群に対応するので，回転閉曲面抵抗薄膜の1つの回転円に沿って電極をつけることは，無限平面の1円周に沿って電極をつけることと等価であり，これは 2.2 の場合にほかならない。そして，無限平面の場合の抵抗値が，円の半径に無関係であることから，回転閉曲面の場合にも，どの回転円に沿って電極をつけても，抵抗値は等しいことがわかる。

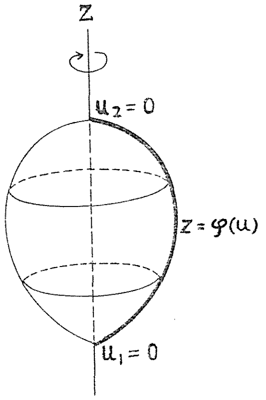
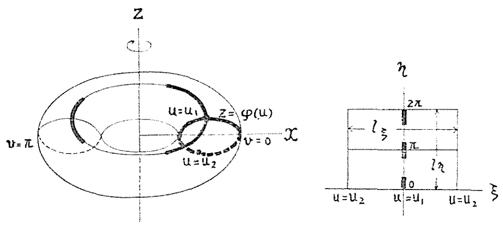


図　8

<4.6>　環状閉曲面

図9(a) のように，母線が閉曲線であると，回転曲面は，示性数1の閉曲面，すなわち環状の閉曲面となる。そして電極は，母線上の任意の点 $u=u_1$ を回転した円周に沿ってつけるものとする。この曲面を <4.2> の方法で平面に写像すると，(23) 式から明らかなように，平面の η 軸方向には 2π の長さ，また ξ 軸方向には，(23) 式の積分を計算して得られる長さの長方形に写像される。このとき，(23) 式の積分定数と符号を，u_1 の値に応じて適当に選ぶならば，電極をつけた回転円を写像した線分が，ちょうど長方形の中央にくるようにすることができる。図9 (a) から (b) への対応がそれを示しているが，この対応が得られるためには，環状閉曲面は2本の曲線に沿って切り開かれねばならない。その1本は，$v=0$ すなわち母線であり，他は $u=u_1$ から母線に沿って (23) 式の積分を計算したときに，どちら側からも等しい点 $u=u_2$ を回転した円周である。このような展開によって電流の流れが変化しないよう，この2本の曲線を電流線が通る必要がある。まず $v=0$ の母線を電流線が通るためには，2電極とも，xz 平面に関して対称でなければならない。また $u=u_2$ 点は，直角座標に写像すれば，$u=u_1$ から両側に等距離にある点であるから，$u=u_2$ の回転円を電流線が横切ることはない。したがって2電極ともに xz 平面に対称であることだけが必要となる。そこで，図9 (b) の¼の長方形について抵抗値を計算すれば，その値の¼が求める抵抗値となる。また，電極をつ



(a)　　(b)

図　9

ける $u=u_1$ 点をどこに選んでも，これに対応する $u=u_2$ 点は必ず得られ，その写像は積分定数を変更するだけで，長方形の縦横の長さは変化しないから，どの回転円に沿って電極をつけても抵抗値は等しくなる。したがって実際には，長方形の形だけを知れば，その中心線分上に電極をつけて計算してよいのである。

また，電極を母線に沿ってつけた場合でも，これを長方形に写像して，対称な配置が得られる場合には抵抗値を計算することができる。<6.4>にその具体例を示してある。

<4.7> 円　環　面

円環面は環状閉曲面の1つであるが，重要であるので特にとりあげる。この場合も，回転曲面の一般式（16）と同じく，図6のように助変数 u をとってもよいのであるが，こ

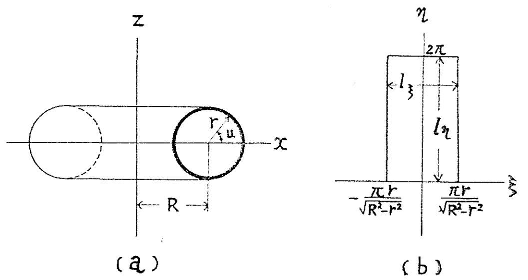


図　　10

こでは図10（a）のように u をえらぶと，円環面の方程式は

$$\begin{cases} x=(R+r\cos u)\cos v \\ y=(R+r\cos u)\sin v \\ z=r\sin u \end{cases} \quad \cdots\cdots (26)$$

となり，その第一基本量は

$$\begin{cases} E=r^2 \\ F=0 \\ G=(R+r\cos u)^2 \end{cases}$$

となる。これを用いて<4.2>と同じ手順で平面上の直交 ξ，η 座標に対応させると

$$\begin{cases} \xi=\displaystyle\int\frac{r}{R+r\cos u}du+C=\frac{2r}{\sqrt{R^2-r^2}}\tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{R-r}{R+r}}\tan\frac{u}{2}\right\}+C \\ \qquad C:\text{積分定数} \\ \eta=v \end{cases} \quad \cdots\cdots (27)$$

を得る。これに $u=0$, $u=\pi$, $u=-\pi$ を代入して，それぞれ

$$\xi_{u=0}=0,\ \xi_{u=\pi}=\frac{\pi r}{\sqrt{R^2-r^2}},\ \xi_{u=-\pi}=-\frac{\pi r}{\sqrt{R^2-r^2}}$$

となり，この円環表面は縦 l_η，横 l_ξ それぞれ

$$l_\eta=2\pi,\ l_\xi=\frac{2\pi r}{\sqrt{R^2-r^2}} \quad \cdots\cdots (28)$$

そして縦横比

$$\frac{l_\eta}{l_\xi}=\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{r} \quad \cdots\cdots (29)$$

の長方形に対応することを知る。

5. 対称性から容易に判断できる特殊な場合

＜5.1＞ n 本の対称軸をもつ図形

単連結な図形は円に等角に写像可能であるが，その写像関数を見いだすことは一般には容易でなく，それは正多角形の場合でも例外ではない。しかし，それが正 n 角形であれば n 本の対称軸をもっており，対称軸と周辺との $2n$ 個の交点については，これを円周上に対応させることができる。例を正3角形にとると，普通正3角形領域を円に写像するには，図11のように，正3角形の各頂点を，円周上の3等分点に対応させるのがもっとも自然である。そうすると，正3角形の各辺の中点は，円周3等分点の中央に写像されるのは当然である。したがって，電極をつけるにあたって，その端がこれら6点のいずれかになるようにすれば，ただちに円に対応がつき，既報によって計算できる。また，対称軸を n 本持つ図形であれば，正多角形と同じように計算でき，たとえば図12の (a) (b) (c) は，全く同一な抵抗値を与える。

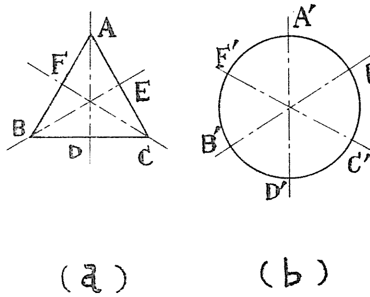


図　　11

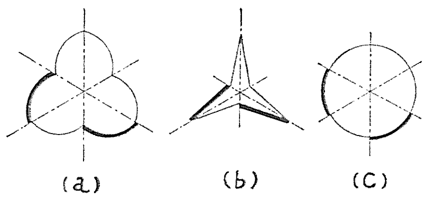


図　　12

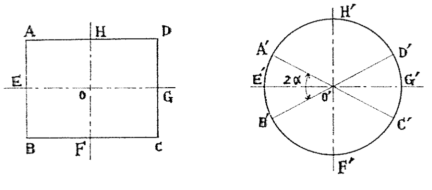


図　　13

＜5.2＞ 長　方　形

長方形は2本の対称軸をもつので，＜5.1＞の方法で円に対応させると，図13の E, F, G, H は円周の4等分点 E′, F′, G′, H′ にうつる。この対応では，長方形の頂点 A, B, C, D の写像は円周上でも，長方形 A′ B′ C′ D′ を形成する。その位置を決定するため，電極を長方形の AB, CD につけるものとして，これを円に写像したときの対向等長電極の中心角 $\angle A'O'B'=2\alpha$ を求めると，既報にしたがって，第一種完全だ円積分表から

$$\frac{K'}{K}=2\frac{AB}{BC} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (30)$$

のときの k の値を求め

$$\sin\alpha=\frac{1-k}{1+k} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (31)$$

によって，容易に α を知るので，長方形の8点を円周に対応させることができる。

このような方法で，1つの長方形で計算できる電極配置が41種得られる。長方形は無限にあるから，この計算法だけでもずいぶん役立つものであろう。

6. 抵抗値計算の具体例

<6.1> 長円形板の例

図14 (a) の場合，これを穴のある円板に写像したときの穴の半径は，(13) 式に代入

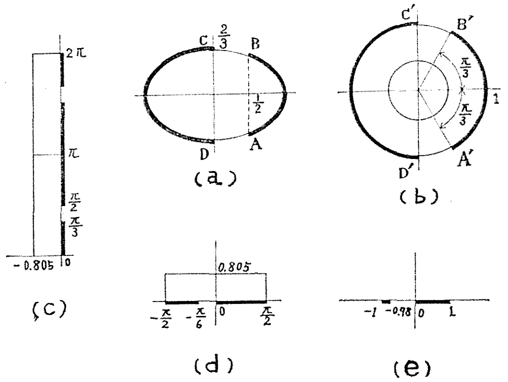


図 14

して

$$r=\sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}}=0.447$$

電極の位置は (14) 式に，$u=1/2$, $u=0$ を代入して

$$\theta=cos^{-1}\frac{1}{2}=\pm\frac{\pi}{3},\quad \theta=cos^{-1}0=\pm\frac{\pi}{2}$$

したがって図 (b) となる。次に，これを長方形に写像して，縦 2π，横は (3) 式に代入して

$$x=log\,0.447=-0.805$$

電極の位置を記入して図 (c) となる。この半分の図 (d) を既報にしたがって半平面に写像して計算する。

$$\frac{K'}{K}=\frac{0.805}{\frac{\pi}{2}}=0.512$$

完全だ円積分表により

$$K=3.09,\quad k=0.983$$

図 (d) における電極端の座標は，左側から順に

$$-K,\quad -K/3,\quad 0,\quad K$$

となるから，これを半平面に写像したときの位置は，それぞれ

$$-1,\quad sn(X=-3.09/3,\ k=0.983)=-0.78,\quad 0,\quad 1$$

となり図 (e) を得る。よって既報ノモグラムを用い，抵抗値を求め 1.52 となる。求める長円板の抵抗値はその½であるから

$$R=0.76$$

＜6.2＞　2つの周辺をもつ回転曲面の例

$$z=1/u,\quad 1\leq u\leq 2$$

を回転した曲面に図15（a）のように電極がつけられたときの抵抗値を求める。

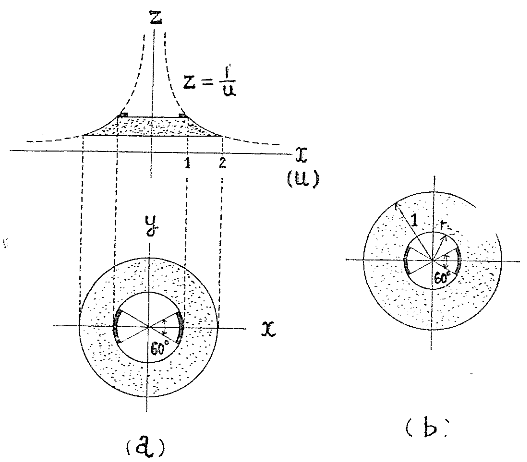


図　　15

$$\varphi(u)=1/u,\quad \varphi'(u)=-1/u^2$$

を（21）に代入して

$$f=\sqrt{u^2+\sqrt{1+u^4}}\,e^{-\frac{\sqrt{1+u^4}}{2u^2}}$$

を得る。この式に $u=1,\ 2$ を代入し，対応する同心円の半径を求めると，

$$f_{u=1}=0.765$$

$$f_{u=2}=1.70$$

外径を1とすると，内径は 0.45 となり，図（b）となる。2電極が等長であるから，図3のグラフから抵抗値を読んで

$$R\fallingdotseq 1.80$$

＜6.3＞　環状閉曲面の例

図16（a）の3角形 ABC を回転した閉曲面薄膜の場合。3つの直線部分をそれぞれ写像する。

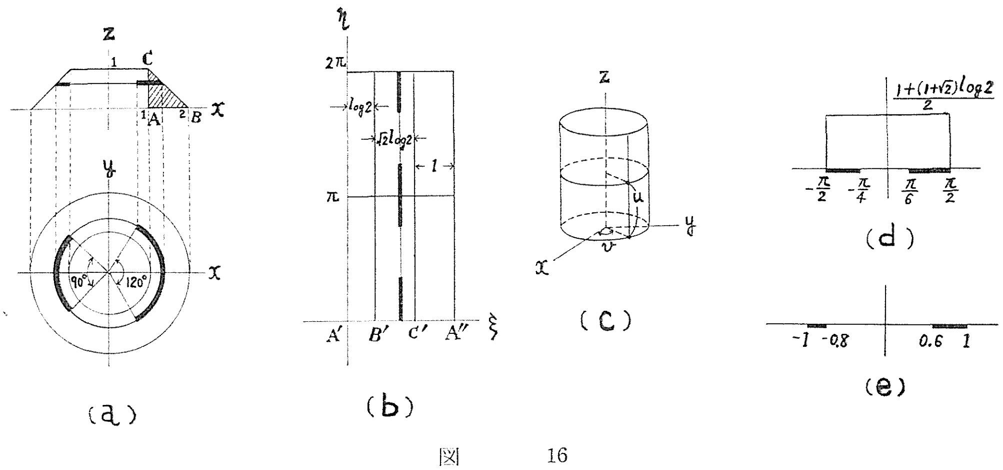


図　　16

(1)　AB 部分

$$z=\varphi=0,\quad \varphi'=0$$

であるから，平面に写像したとき，AB に対応像る ξ 軸方向の長さは（23）式から

$$\xi_{AB}=\int_1^2\frac{du}{u}=\log 2$$

(2) BC 部分

$$z=\varphi=2-u,\quad \varphi'=-1$$

したがって，BC 部分に対する長さは

$$\xi_{BC}=\int_1^2 \frac{\sqrt{2}}{u}du=\sqrt{2}\ log\,2$$

(3) CA 部分

z 軸に平行であるから，助変数 u を図 (c) のようにとり，

$$\begin{cases} x=\cos v \\ y=\sin v \\ z=u \end{cases} \qquad \begin{cases} E=1 \\ F=0 \\ G=1 \end{cases}$$

これを＜4.2＞の方法で直交座標に対応させて

$$\xi=u,\quad \eta=v$$

したがって，CA 部分に対応する長さは

$$\xi_{CA}=1$$

以上から，この曲面の対応する長方形は

$$l_\eta=2\pi,\ l_\xi=\xi_{AB}+\xi_{BC}+\xi_{CA}=1+(1+\sqrt{2})\log 2$$

すなわち図 (b) となる。電極をどの回転円に沿ってつけても抵抗値は等しいから，図(b) のように，長方形の A′A″ の中央につけるものとし，この長方形の¼である図 (d) を半平面に写像して，既報にしたがって計算して抵抗値1.94を得る。求める抵抗値は，図(d) の長方形が4個並列であるから，

$$R=0.485$$

となる。

＜6.4＞ 円環面の例

$R=5,\ r=4$ の円環面の，$v=0$，および $v=\pi$ の円周上に，図17 (a) のように電極をお

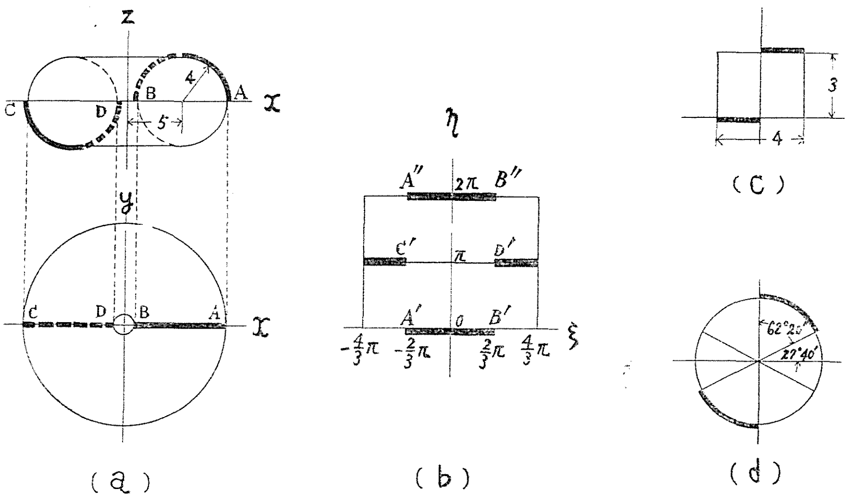


図 17

いたときの抵抗値を求める。これを長方形に写像したときの２辺の長さは (28)，(29) に代入して

$$l_\eta=2\pi,\quad l_\xi=\frac{8}{3}\pi,\quad \frac{l_\eta}{l_\xi}=\frac{3}{4}$$

電極端の対応する位置は，積分定数を

$$C=-\frac{2}{3}\pi$$

として (27) に代入して

$$\xi_{A'}=\frac{8}{3}tan^{-1}\left\{\frac{1}{3}tan0\right\}-\frac{2}{3}\pi=-\frac{2}{3}\pi$$

$$\xi_{B'}=\frac{2}{3}\pi,\quad \xi_{C'}=\frac{2}{3}\pi,\quad \xi_{D'}=-\frac{2}{3}\pi$$

よって，図 (b) を得る。この電極配置は明らかに対称であるから抵抗値を計算できる。この¼である図 (c) は，ちょうど<5.2>の場合に該当するから，(30) により

$$\frac{K'}{K}=\frac{3}{2}$$

これに対する k の値は，完全だ円積分表から

$$k=0.366$$

ゆえに (31) 式によって

$$sin\alpha=\frac{0.634}{1.366}=0.464$$

$$\therefore\quad \alpha=27°40'$$

すなわち図 (d) となる。この円板の抵抗は既報から 1.25 を得るので，求める値は

$$R=0.32$$

である。

7. む す び

やや複雑な形の抵抗領域に，２電極をつけたときの抵抗値を計算によって求める方法を述べた。その方法のほとんどが，連結数の異なる領域間の等角写像によっている。すなわち，位相幾何学でいう位相同形でないものどうしの写像であるから，その対応にあたって制限をうける。しかし，その制限条件さえ満足すれば，等角対応が成り立って，抵抗値を計算できる。その条件は，電流線に沿って切り開くことであったが，この方法を電流界以外の分野に応用する場合には，それに応じた条件を判断する必要があろう。いずれにしても，それは電流界と類推的に扱い得るはずである。

またここでは，抵抗値だけを対象としたので，内部の電流線の状態にはふれていない。もし，前記の写像関数によって，抵抗計算とは逆の順序で，領域の内部について写像計算を行えば，電流線，等電位線の状態も明らかになるわけであるが，その計算を実行するのは困難であろう。しかし，それを計算によらず図式的に求めるならば，容易に目的が達成される。この集報の別の所にその方法を述べている。

この研究は，池田芳郎先生の「等角写像とその方法」をはじめ，参考文献にはあげてな

い多くの等角写像，微分幾何，位相幾何等の内外の文献を参考にさせていただいた。ここに感謝の意を表わすものであります。また，卒業研究として助力された中島真人君，図面作成を担当して下さった笠原英司，名野隆夫の両君に深謝いたします。

（昭和41年9月7日投稿）

文　献

(1) 荒又，寺門：茨城大学工学部研究集報，第13巻（昭41）p. 79

(2) 荒又，寺門：茨城大学工学部研究集報，第11巻（昭39）p. 31

(3) H. Kober: Dictionary of Conformal Representations, Dover Publications (1957) p. 30

(4) 矢野：微分幾何学，朝倉書店（昭24）p. 233