

長方形複合抵抗領域の対辺電極間の抵抗値上下界

小林正典*, 寺門龍一**, 荒又光夫**

(1971年9月8日受理)

Upper and Lower Bounds of a Resistance Value between Electrodes attached on Opposite Sides of a Rectangular Compound Domain of Resistance

Masanori KOBAYASHI, Ryûiti TERAKADO and Mitsuo ARAMATA

Abstract:— The resistance value of a square compound domain of resistance was calculated approximately by Goldner and exactly by Aramata and Terakado. In this paper, the method by means of calculus of variations is given for calculating a resistance value between electrodes attached on whole length of the opposite sides of the rectangular compound domain of resistance that has different conductivities, σ_1 and σ_2 , in the each domain divided with a diagonal line in this rectangle. The resistance value is approximately calculated in the form of lower and upper bounds by supposing variously the equipotential lines that are composed of polygonal lines. For the equipotential lines, the lower and upper bounds are numerically shown.

1. ま え が き

長方形抵抗板の導電率が、その一本の対角線を境に異なっているとき、一組の相対する辺の長さ全部を導体電極としたときの電極間の抵抗値の計算がこの論文の目的である。正方形抵抗板については、Goldnerによる近似計算法⁽¹⁾と、荒又と寺門による正確な計算法⁽²⁾がある。ここに述べる変分法の応用による方法では、数値計算を行なうことにより、かなり精度良く抵抗値の上界および下界を求めることができる。変分法を適用するにあたり、仮想的等電位線を折れ線で表わした。その種々の仮想線に対して、長方形の縦横の比と導電率比のいろいろの場合の抵抗値の上下界の計算方法を述べ、その数値例を示す。

* 茨城大学大学院学生電気工学専攻

** 茨城大学工学部電気工学科

2. 計算原理と方法

変分法の一般理論については、すでに文献に詳述されているので、ここでは二次元複合抵抗領域について、電極間の抵抗値の上界および下界の求め方を略述する。厚さ d が 1 である抵抗体 G が図 1 のように、異なる導電率 σ_1, σ_2 を有する二つの領域 G_1, G_2 からなる場合を考える。相対する部分 A_1, A_2 を電極としたときの電極間の抵抗値 R は

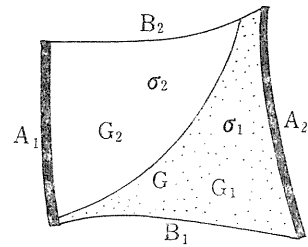


図 1 計算原理説明図

$$\frac{1}{\int_G (\text{gradu})^2 dS} \leq R \leq \int_G \frac{i^2}{\sigma} dS \dots \dots \dots (1)$$

と表わされる。ここで u, i はそれぞれ条件

$$\left. \begin{aligned} u: A_1 \text{ 上で } 1, A_2 \text{ 上で } 0 \\ i: \text{div}i=0, B_1, B_2 \text{ 上で } i_n=0 \\ \int_{A_1} i_n ds=1 \text{ (} n \text{ は } G \text{ 内に向いた法線)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

を満たす関数とする。(1) 式の等号は u, i がそれぞれ真の電位分布、真の電流分布のとき成立する。実際には真の電位分布、真の電流分布を知ることは特別な場合を除いては不可能である。そこで、 u, i を条件 (2) を満足するように適当に仮想し、その仮想線を用いて得られる範囲内の抵抗値の最良の下界および上界を、(1) 式の左右辺それぞれの最大値、最小値を見出す変分問題と考えると求めることになる。したがって上界および下界が高精度になるように、計算可能な範囲内で、仮想関数 u, i をいかにして決めるかが重要な問題となる。その仮想関数 u に対する抵抗値の下界の計算式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{du}{j(u)} \leq R, \quad j(u) = \int_{u=\text{const}} \sigma(x, y) \frac{du}{dn} ds \\ u: \text{仮想的等電位線} \\ ds: \text{仮想的等電位線 } u \text{ 上での線素} \\ dn: \text{仮想的等電位線の法線素} \\ \sigma(x, y): \text{領域 } G_1, G_2 \text{ ではそれぞれ } \sigma_1, \sigma_2 \text{ をとる} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

図 1 で電極でなかった相対する部分 B_1, B_2 を A_1, A_2 の代わりに電極とし、領域 G_1, G_2 の導電率をそれぞれ A_1, A_2 が電極のときの値の逆数として、このときの抵抗値 R' の下界を(3)式と同様にして求めれば、この R' の値の逆数は、図 1 の抵抗値 R の上界となる。⁽⁴⁾

3. 長方形複合抵抗領域への適用

図 2 のような縦の長さが 1、横の長さが b で導電率が σ_1, σ_2 の二つの領域 G_1, G_2 からなる抵抗板の抵抗値の下界を次のようないろいろの仮想的等電位線について計算する方法を示す。抵抗値の上界の方は、前述の方法で求めることができるので、下界の求め方だけ

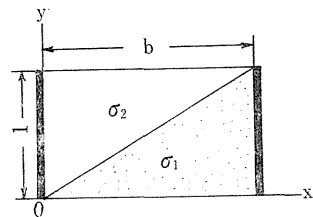


図 2 長方形複合領域

を示すことにする。

<3.1> 電極に平行な仮想線による場合

仮想線を図3のように電極に平行にしたときがもっとも計算が簡単である。この仮想線を用いて, 抵抗値の下界を計算すると, 次のようになる。

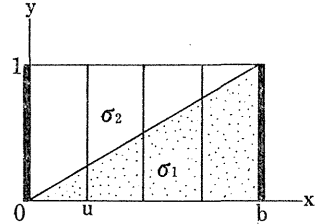


図3 電極に平行な仮想線

$$\begin{aligned}
 j(u) &= \int_{\sigma_1} \sigma_1 \frac{du}{dx} dy + \int_{\sigma_2} \sigma_2 \frac{du}{dx} dy \\
 &= \int_0^{\frac{x}{b}} \frac{1}{b} \sigma_1 dy + \int_{\frac{x}{b}}^1 \frac{1}{b} \sigma_2 dy \\
 &= \frac{1}{b} \cdot \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{b} \cdot \left(x + \frac{b\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \right) \\
 R > \int_0^1 \frac{du}{j(u)} &= \frac{b}{\sigma_1 - \sigma_2} \log_e \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \dots\dots\dots (4)
 \end{aligned}$$

$\sigma_1=n, \sigma_2=1$ のときの抵抗値の上界と下界は次のようになる。

$$\frac{b \log_e n}{n-1} < R < \frac{b(n-1)}{n \log_e n} \dots\dots\dots (5)$$

横の長さ b が 1 のとき, すなわち正方形の場合は, (5) 式の上界と下界の相乗平均を取ると, $R=1/\sqrt[n]{n}$ となる。これは真の抵抗値と一致している。 $b \neq 1$ のときには, 相乗平均の値は, 正方形のときの真の抵抗値 $1/\sqrt[n]{n}$ の b 倍となっており, $b > 1$ の場合は, より改良された上界となり, $b < 1$ の場合は, より改良された下界となる。

<3.2> 三つの折れ点を持つ平行な仮想線による場合

仮想線を図4のように, $x < b/2, x > b/2$ の範囲でそれぞれ ABCDE, A'B'C'D'E' とする。仮想線の一部 AB, DE, A'B', D'E' はそれぞれ電極に平行である。仮想線の一部 BC, B'C' は平行で, その傾きを m とすると, 必然的に CD, C'D' は平行となり, その傾きは $2/b - m$ となる。まず, $x < b/2$ の範囲における $j(u)$ を求める。仮想線の電位の基準として, 点Eを考え, 原点Oからの距離 OE の値を b で割ったものをその仮想線の電位 $u=x/b$ とする。線分 CD, CB の長さは次のようになる。

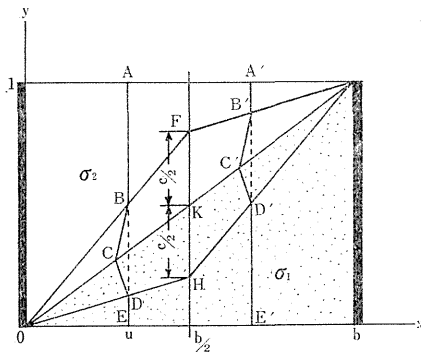


図4 三つの折れ点を持つ平行な仮想線

$$\begin{aligned}
 CD &= cx \sqrt{1 + (m - 2/b)^2} / (mb - 1) \\
 CB &= cx \sqrt{1 + m^2} / (mb - 1)
 \end{aligned}$$

du/dn は ED, BA の部分では $1/b$ であり, DC, CB 部分では次のようになる。

$$\begin{aligned}
 du/dn &= \frac{1}{b} b \sqrt{1 + (m - 2/b)^2} / (mb - c - 1) \quad (\text{DC 部分}) \\
 du/dn &= \frac{1}{b} b \sqrt{1 + m^2} / (mb - c - 1) \quad (\text{CB 部分})
 \end{aligned}$$

したがって、 $x < b/2$ の範囲での $j(u)$ は次のようになる。

$$j(u) = \int_{ED} \sigma_1 \frac{du}{dn} dy + \int_{DC} \sigma_1 \frac{du}{dn} ds + \int_{CB} \sigma_2 \frac{du}{dn} ds + \int_{BA} \sigma_2 \frac{du}{dn} dy$$

$$= (\sigma_2 + Ax)/b$$

$$A = \sigma_1 \left[\frac{bc\{1+(m-2/b)^2\}}{(mb-1)(mb-c-1)} + \frac{1-c}{b} \right]$$

$$+ \sigma_2 \left[\frac{bc(1+m^2)}{(mb-1)(mb-c-1)} - \frac{1+c}{b} \right]$$

$x > b/2$ についても同様の方法で $j(u)$ は次のように求まる。

$$j(u) = \{\sigma_1 + B(b-x)\}/b$$

$$B = \sigma_1 \left[\frac{bc\{1+(m-2/b)^2\}}{(mb-1)(mb+c-1)} - \frac{1+c}{b} \right]$$

$$+ \sigma_2 \left[\frac{bc(1+m^2)}{(mb-1)(mb+c-1)} + \frac{1-c}{b} \right]$$

境界線上での屈折の条件を満足するように、 m を定めると、 $m = \{b^2(\sigma_1 + \sigma_2) + 2\sigma_1\} / \{b(\sigma_1 - \sigma_2)\}$ となる。この m を使って、 $\sigma_1 = n, \sigma_2 = 1$ の場合の抵抗値 R の下界を計算すると次のようになる。

$$R > \frac{b}{n-1} \left\{ f(n) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$$

$$f(n) = \frac{n\{b^2 + (1-c)\} + \{b^2 + (1+c)\}}{n\{b^2 + (1-c)^2\} + \{b^2 + (1+c)^2\}} \log_e$$

$$\frac{n^2\{b^2 + (1-c)^2\} + 2n\{b^2 + (1+c)\} + \{b^2 + (1+c)(1-c)\}}{2[n\{b^2 + (1-c)\} + \{b^2 + (1+c)\}]}$$

<3.3> 境界線上に折れ点を持つ平行でない仮想線による場合

仮想線が図 5 のように ABC の折れ線の場合を考える。AB 部分、BC 部分の延長線はそれぞれ点 D、点 G で電極の延長線と交わるものとする。点 B を仮想線の電位の基準とし、原点からの距離 $\sqrt{b^2+1} x$ を $\sqrt{b^2+1}$ で割った値をその仮想線の電位 u とする。線分 GC, GB, DB, DA の長さは次のようになる。

$$GC = g\sqrt{b^2(b-x)^2 + (x+bg)^2} / (x+bg)$$

$$GB = \sqrt{b^2(b-x)^2 + (x+bg)^2} / b$$

$$DB = \sqrt{b^2x^2 + (x+bd)^2} / b$$

$$DA = (1+d) \sqrt{b^2x^2 + (x+bd)^2} / (x+bd)$$

直線 CB 上で点 G からの距離が l である点 Q での du/dn は次のようになる。

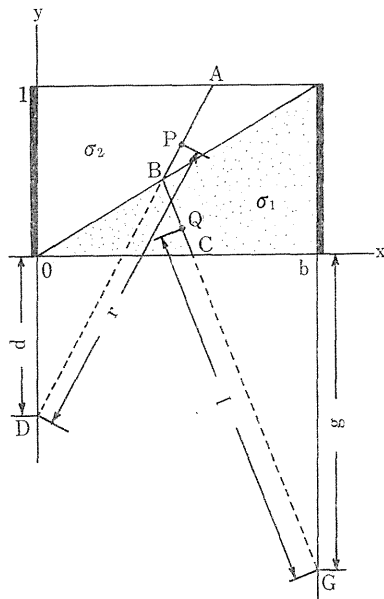


図 5 境界線上に折れ点を持つ平行でない仮想線

$$\frac{du}{dn} = \frac{GB}{l} \frac{1}{b} \frac{\sqrt{b^2(x-b)^2 + (x+bg)^2}}{b(g+1)} \quad (\text{CB 上の点 Q})$$

一方, 直線 BA 上で, 点 D からの距離が r である点 P での du/dn は次のようになる。

$$\frac{du}{dn} = \frac{DB}{r} \frac{1}{b} \frac{\sqrt{b^2x^2 + (x+bd)^2}}{bd} \quad (\text{BA 上での点 P})$$

以上のことより, 抵抗値 R の下界は次のようになる。

$$R > \int_0^1 \frac{du}{j(u)} = \int_0^b \frac{dx}{bj(u)} \left. \begin{aligned} bj(u) &= \frac{\sigma_1 \{b^2(b-x)^2 + (x+bg)^2\}}{b^2(g+1)} \log_e \frac{x+bg}{bg} \\ &+ \frac{\sigma_2 \{b^2x^2 + (x+bd)^2\}}{b^2d} \log_e \frac{b(1+d)}{x+bd} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

4. 計算例とその検討

電極に平行な仮想線による場合, 三つの折れ点を持つ平行な仮想線による場合, 境界線上に折れ点を持つ平行でない仮想線による場合の抵抗値の計算法をそれぞれ A, B, C とする。計算法 A で求めた上界と下界の相乗平均をとることにより, 抵抗値を求める方法を A' とする。この四種類の計算法による抵抗値の上下界の計算結果を表 1 に示す。ただし導電率 σ_2 は 1 としてある。 $\sigma_1 < 1$ の場合は, $\sigma_1 > 1$ の場合から簡単に求まるので, $\sigma_1 > 1$ の場合のみを示した。例えば, $\sigma_1 = 1/n$ ($=0.2, 0.5$) の場合の抵抗値は, それぞれ $\sigma_1 = n$ ($=5, 2$) の場合の抵抗値に n ($=5, 2$) を掛ければ求めることができる。計算法 B の場合で, 全体を通じての最適の c の値はだいたい 0.6 であることがわかったので, $c=0.6$ として計算した。計算法 C の場合には, 横の長さ b と導電率 σ_1 のいろいろの場合について, 最良の d と g を見つけなければならない。そのために d と g のいろいろの組み合わせについて, 数値積分を行ない, その値を決めた。最良の d, g と b, σ_1 との間関係式を求めようとしたが, うまくゆかなかったので, 表 1 を計算するときに使った d, g を参考までに表 2 に示す。

表 1 の結果より, 三つの計算法 A, B, C の特徴を述べてみる。計算法 A は数値積分をしないうで, 抵抗値の上下界を簡単に計算できる。しかも横の長さ b が 1 の正方形のときには, 上界と下界の相乗平均の値は真の抵抗値と一致する。横の長さが 1 よりきわめて大きい場合には下界, 小さい場合には上界の値を近似抵抗値と考えれば, なかなか精度の良い計算方法である。計算法 B は数値積分をしなくてもよい点では簡単であるが, 最適な c と m を求めなければならない。しかし前述したように, $c=0.6, m=\{b^2(\sigma_1+\sigma_2)+2\sigma_1\}/\{b(\sigma_1-\sigma_2)\}$ として考えれば, 上界と下界の両方を欲しい場合には, 実用的な方法である。計算法 C は数値積分をしなければならないことと, 最適な d と g を個々の場合に求めなければならないという欠点がある。しかし三つの中では一番精度が良い。特に b が 1 より離れるほど, すなわち長方形が細長くなるほど, σ_1 が 1 に近いほど高精度である。最高の精度は $b=0.1, \sigma_1=2; b=10, \sigma_1=2$ の場合で, その誤差は 0.37[%] である。この誤差は, (上界-下界)/下界 $\times 100$ [%] として求めた。したがって高精度の抵抗値計算にはきわめて有用である。三つの計算法とも b が 1 に近い範囲での精度が悪い。そこ

表 1 いろいろの仮想線による抵抗値の上下界

σ_1		b	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10
		真	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10
2	上界	A	0.0722	0.145	0.361	0.722	1.443	3.607	7.214
		B	0.0722	0.145	0.360	0.716	1.425	3.554	7.106
		A'	/	/	/	/	1.415	3.536	7.072
		C	0.0722	0.145	0.360	0.715	1.412	3.486	6.959
	下界	真	/	/	/	0.707	/	/	/
		C	0.0718	0.143	0.354	0.699	1.391	3.467	6.931
		A'	0.0707	0.141	0.353	/	/	/	/
		B	0.0703	0.140	0.351	0.693	1.391	3.468	6.932
5	上界	A	0.0498	0.0995	0.249	0.498	0.995	2.486	4.971
		B	0.0497	0.0991	0.245	0.477	0.931	2.293	4.573
		A'	/	/	/	/	0.895	2.237	4.473
		C	0.0497	0.0990	0.242	0.466	0.877	2.069	4.079
	下界	真	/	/	/	0.447	/	/	/
		C	0.0490	0.0966	0.228	0.429	0.826	2.020	4.028
		A'	0.0447	0.0894	0.223	/	/	/	/
		B	0.0437	0.0872	0.215	0.419	0.818	2.018	4.027
10	上界	A	0.0391	0.0782	0.196	0.391	0.782	1.955	3.909
		B	0.0391	0.0778	0.191	0.364	0.687	1.650	3.273
		A'	/	/	/	/	0.633	1.582	3.163
		C	0.0390	0.0774	0.185	0.341	0.618	1.380	2.633
	下界	真	/	/	/	0.316	/	/	/
		C	0.0379	0.0725	0.161	0.294	0.541	1.293	2.565
		A'	0.0316	0.0632	0.158	/	/	/	/
		B	0.0305	0.0606	0.145	0.275	0.525	1.285	2.561
10	下界	A	0.0255	0.0511	0.127	0.255	0.511	1.279	2.558

A : 電極に平行な仮想線による場合

B : 三つの折れ点を持つ平行な仮想線による場合

C : 境界線上に折れ点を持つ平行でない仮想線による場合

A' : 仮想線 A による上界と下界の相乗平均 (正方形の真の抵抗値 $\times b$)b : 長方形の横の長さ (縦の長さは 1) ; σ_1 : 導電率 ($\sigma_2=1$)

表 2 境界線上に折れ点を持つ平行でない仮想線による方法の d と g の値

σ_1	b	d	g
2	0.1	0.8	1.6
	0.2	0.9	1.8
	0.5	1.2	4.8
	1	3	24
	2	8	40
	5	45	450
5	0.1	0.21	0.42
	0.2	0.25	0.5
	0.5	0.35	1.4
	1	0.55	4.4
	2	1.9	10
	5	11	110
10	0.1	0.1	0.17
	0.2	0.15	0.3
	0.5	0.2	0.8
	1	0.3	2.5
	2	0.85	9
	5	6	60
10	22	220	

で、この場合には、計算法 A' で求めた値を近似抵抗値とすれば、実用にはさしつかえないだろう。

5. む す び

長方形複合抵抗領域の抵抗値の計算を変分法の応用により求める方法は、横と縦の長さの比が 1 よりきわめて大きい場合、小さい場合の両方で非常に精度が高いことを知った。しかしその比が 1 に近いときはあまり精度が良くない。⁽²⁾ 比が 1 のときには、真の抵抗値がわかっているので、これからの研究の進め方としては、縦横の比が 1 に近い部分での精度を高めるように、計算可能な別の仮想線を見つけることである。

参 考 文 献

- (1) R. B. Goldner: Proc. IEEE (Letters), **56** (1968) p. 1367
- (2) M. Aramata & R. Terakado: Proc. IEEE (Letters), **57** (1969) p. 734
- (3) 寺沢 : 自然科学者のための数学概論(応用編), 岩波(昭35) p. 462
- (4) 寺門 : 抵抗値の計算可能な二次元不均一抵抗領域, 電気四学会連合大会(昭45)