量子電気力学とREDUCEプログラム

山田　満*

（昭和61年9月8日受理）

REDUCE-aided Quantum Electrodynamics

Mitsuru YAMADA*

Abstract — Four examples of REDUCE-aided computation in perturbative quantum electrodynamics are shown: the Compton scattering; pair annihilation of an electron and a positron; the Moeller scattering; the Bhabha scattering. Useful formulae of relativistic kinematics and conventions for the scattering cross-section are also presented.

1. はじめに

REDUCEは米国のA.C.Hearnが1960年代後半に創始した数式処理システムである(1)。現在までこの他にも多数の数式処理システムが考案されて来ているが高エネルギー物理学での応用ではREDUCEが最も有用であると言える。それはDiracガンマ行列の積のトレースを計算する命令が組みこまれていることによる。本篇では量子電気力学(2,3)での反応断面積の摂動論による計算の代表的な4つの場合について，くりこみを必要としない最低次において，それらをREDUCEに援けられて実行する。§2では準備として，相対論的運動学と反応断面積の各種の規格化についてまとめる。§3から§6にかけてCompton散乱，電子陽電子の対消滅，Moeller散乱，Bhabha散乱をこの順にあつかう。使用したREDUCEは東京大学大型計算機センターに公開されているVersion 3.0である(1)。又，相対論的力学の記述では時間的な計量を用いる，即ち$g=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$とする(4)。

量子電気力学の散乱過程の計算を従来の方法で実行しようとすると，Diracガンマ行列のトレースの計算の際，多大な労力を要するという事はよく知られている。本篇では，とりあげる4つの場合すべてについて，計算のその部分を，REDUCEプログラムを書いて実行させることによって，正確にかつ迅速に処理する。得られる結果は旧来の筆算によるものと当然ながら一致する。このことはさらにこみいった過程の遷移確率を求める場合への希望を持たせるものである。

2. 準　　備

2.1 量子電気力学のFeynman則

電子の電磁的相互作用は次のLagrangianで記述される。

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{1}{2\alpha}(\partial A)^2 +\bar{\psi}\{\gamma_\mu(i\partial^\mu-eA^\mu)-m\}\psi .$$

ここでαはゲージ・パラメータで後の計算では常に1と置く．従って電子と光子とが行う衝突過程の遷移行列要素T_{fi}を求める為のFeynman則は次の通りである。

(1) 始状態の電子，陽電子，光子に対して，各々該当する次の様なスピノルを書く。

$$u(p),\quad \bar{v}(p),\quad \varepsilon_\mu(k)$$

(2) 終状態の電子，陽電子，光子に対して，各々該当する次の様なスピノルを書く。

$$\bar{u}(p),\quad v(p),\quad \varepsilon_\mu{}^*(k)$$

(3) 電子の内線に対して次の様なプロパゲータを書く。

*茨城大学工業短期大学部一般教育（日立市中成沢町）
General Education, College of Technology, Ibaraki University, Hitachi 316, Japan

$$\frac{1}{\not{p}-m}$$

(4)　光子の内線に対して次の様なプロパゲータを書く。

$$\frac{-g_{\mu\nu}+(1-\alpha)\dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{k^2}$$

(5)　電子，電子，光子の線の合する頂点に次の様な行列を書く。

$$e\,\gamma_\mu$$

(6)　ループの運動量 k に対して次の様な4次元積分を行う。

$$\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4k$$

(7)　電子の内線のつくるループ1個について（－1）を乗ずる。

なお，規則(1)，(2)にある電子，陽電子，光子のスピノルに関しては次の様な規格化をしておくとする。

$$\sum_{\text{spin}} u(p)\,\overline{u}(p)=\not{p}+m$$

$$\sum_{\text{spin}} v(p)\,\overline{v}(p)=\not{p}-m$$

$$\sum_{\text{spin}} \varepsilon_\mu(k)\ \varepsilon_\nu^*(k)=-g_{\mu\nu}+\text{ゲージ項}$$

2.2　相対論的運動学

2.2.1　相対論的2粒子系

4次元運動量が p_1 と p_2 で質量が各々 m_1 と m_2 である様な2個の自由粒子の系を考える。

$$s=(p_1+p_2)^2$$

とするとき関数

$$\lambda(s, m_1^2, m_2^2)=s^2-2(m_1^2+m_2^2)s+(m_1^2-m_2^2)^2$$

を使うと便利である。この関数を単に λ と書くことも許すことにしよう。λ はいく通りにも因数分解できる。例えば，

$$\lambda=(\sqrt{s}+m_1+m_2)(\sqrt{s}-m_1-m_2)\times$$
$$(\sqrt{s}+m_1-m_2)(\sqrt{s}-m_1+m_2)$$

$$=\{s-(m_1+m_2)^2\}\{s-(m_1-m_2)^2\}.$$

$\sqrt{s}$，m_1，m_2 を3辺にもつ三角形の面積を S とすると有名なHeronの式により

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{-\lambda}\qquad \text{即ち}\quad \lambda=-16\,S^2.$$

力学的に意味のある場合には $\lambda\geqq 0$ となり S は純虚数になる。

まずLorentz 変換によって2粒子系の重心系に移った場合を考える。この系での全エネルギーは $\sqrt{s}$ になる。この系でどちらか一方の粒子が持つ3次元運動量の大きさを p_{CM} と書いておこう。次に1番目の粒子が静止する様な実験室系に移ったときの2番目の粒子のエネルギーと3次元運動量の大きさを E_2^{L} と p_2^{L}，逆に2番目の粒子が静止する系に移った時の1番目の粒子のエネルギーと3次元運動量の大きさを E_1^{L} と p_1^{L} と書く．これらの量の間の関係は次の式であらわされる。

$$\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}=\sqrt{s}\ p_{\text{CM}}=m_1\,p_2^{\text{L}}=m_2\,p_1^{\text{L}},$$

$$s-m_1^2-m_2^2=2\,m_1E_2^{\text{L}}=2\,m_2\,E_1^{\text{L}}.$$

特別な場合の λ の形を求めておく。

$$\lambda(s,\ m^2,\ m^2)=s(s-4\,m^2),$$

$$\lambda(s,\ m^2,\ 0)=(s-m^2)^2,$$

$$\lambda(s,\ 0,\ 0)=s^2.$$

2.2.2　2体→2体反応

反応1＋2→3＋4でそれぞれの粒子の4次元運動量を p_1，p_2，p_3，p_4 とし，質量を m_1，m_2，m_3，m_4 とする。

$$s=(p_1+p_2)^2=(p_3+p_4)^2,$$

$$t=(p_1-p_3)^2=(p_2-p_4)^2,$$

$$u=(p_1-p_4)^2=(p_2-p_3)^2.$$

という3つの変数がしばしば用いられる。これらのうち独立な変数は2つだけである。即ち

$$s+t+u=\sum_{i=1}^{4} m_i^2.$$

重心系でこの反応を観測するとき p_1 と p_3，又は p_2 と p_4 と

のなす角度を散乱角と呼びθと書くと

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_f}}\{s(t-u)+(m_1^2-m_2^2)(m_3^2-m_4^2)\}$$

ただし

$$\lambda_i=\lambda(s,\ m_1^2,\ m_2^2),$$

$$\lambda_f=\lambda(s,\ m_3^2,\ m_4^2).$$

2.3　状態，S行列要素，反応断面積等の規格化

2.3.1　最も一般的な状態の規格化を行う場合

3次元運動量がpである状態の波動関数を，最も一般的に

$$<x\mid p>=\sqrt{\rho}\ e^{ipx}$$

としたとしよう。ρはpに依存してもよいとする。このとき運動量状態の直交性は

$$<p'\mid p>=(2\pi)^3\rho\ \delta^3(p'-p).$$

そこで1粒子状態に対する単位の分割は

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{\rho}\mid p><p\mid=I.$$

このことを，1粒子状態の相空間（phase space）の積分要素が

$$d\,\mathrm{PS}=\frac{1}{(2\pi)^3}\ \frac{d^3p}{\rho}$$

と書けると言ってもよい。

異種粒子のn体系については

$$d\,\mathrm{PS}=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(2\pi)^3}\ \frac{d^3p_i}{\rho_i}$$

となる。同種粒子が2個以上含まれる場合には，それらが互に区別できないことを考慮して，修正しなければならない。例えば同種粒子ばかりn個ある系の場合には

$$d\,\mathrm{PS}=\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(2\pi)^3}\ \frac{d^3p_i}{\rho_i}.$$

さて，この様に規格化した自由粒子状態$\mid i>$，$\mid f>$を各々始状態，終状態にもつ様なS行列要素は

$$S_{fi}=<f\mid S\mid i>$$

と書かれる。Sはユニタリ作用素である。今$<f\mid i>=0$として，始状態$\mid i>$から終状態$\mid f>$への毎秒・単位体積当りの遷移確率をw_{fi}とすると

$$w_{fi}=\frac{\mid S_{fi}\mid^2}{V\cdot T},$$

ここで，$V\cdot T$は相互作用が行われている4次元時空領域の体積である。外場がない場合には

$$V\cdot T=\int d^4x\,e^{i0x}=(2\pi)^4\,\delta^4(0)$$

と考えることができる。又

$$S_{fi}=\delta_{fi}-i(2\pi)^4\,\delta^4(\Sigma p_f-\Sigma p_i)T_{fi}$$

によって遷移行列要素T_{fi}を導入しても十分一般的であるからその様にすると

$$w_{fi}=(2\pi)^4\,\delta^4(\Sigma p_f-\Sigma p_i)\mid T_{fi}\mid^2$$

となる。

終状態の相空間の体積要素$d\mathrm{PS}$内への毎秒当りの遷移確率は

$$d\,w_{fi}=w_{fi}\ d\,\mathrm{PS}$$

である。

衝突過程$1+2\rightarrow 3+4+\cdots$については衝突断面積の概念が一般的に用いられるが，これはp_1とp_2とが互に平行か又はどちらかが0になる様な慣性系で定義される量である。終状態$d\mathrm{PS}$内へ向かう断面積は

$$d\,\sigma=\frac{w_{fi}}{\mathrm{flux}}\ d\,\mathrm{PS}$$

となる。ここで

$$\mathrm{flux}=\rho_1\,\rho_2\,v_{\mathrm{rel}}$$

$$v_{\mathrm{rel}}=\left|\frac{p_1}{E_1}-\frac{p_2}{E_2}\right|.$$

$d\,\sigma$はLorentz不変な量であり面積の単位で量られる。

粒子の崩壊過程$1\rightarrow 2+3+\cdots$では毎秒当りの終状態$d\mathrm{PS}$内への崩壊確率

$$d\Gamma=\frac{w_{fi}}{\rho_1}\ d\,\mathrm{PS}$$

で表わすのが便利である。この量は(1/秒)の単位で量られる。

2.3.2 我々の使う状態規格化の場合

我々は§3以下で専ら

$$\rho = 2\,\omega_p = 2\sqrt{p^2 + m^2}$$

の規格化を用いる。こうすると

$$\langle x \mid p \rangle = \sqrt{2E_p}\; e^{ipx}$$

$$\langle p' \mid p \rangle = (2\pi)^3\, 2E_p\, \delta^3(p' - p)$$

$$d\,\mathrm{PS} = \frac{1}{(2\pi)^3}\,\frac{d^3p}{2E_p}\,.$$

さらにfluxがLorentz不変になって

$$\mathrm{flux} = 2\sqrt{\lambda_i}$$

従って

$$d\,\sigma = \frac{1}{2\sqrt{\lambda_i}}(2\pi)^4\delta^4(\Sigma p_f - \Sigma p_i)\,|T_{fi}|^2 d\mathrm{PS}$$

$$d\,\Gamma = \frac{1}{2E_1}(2\pi)^4\delta^4(\Sigma p_f - \Sigma p_i)\,|T_{fi}|^2\, d\mathrm{PS}.$$

波動力学の衝突問題で用いられる弾性衝突の散乱振幅$f(\theta, \phi)$と我々の遷移行列要素T_{fi}との関係は

$$f(\theta,\ \phi) = -\frac{T_{fi}}{8\pi\sqrt{s}}\,.$$

2体→2体反応の重心系における微分断面積は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{64\pi^2 s}\,\frac{p_f}{p_i}\,|T_{fi}|^2.$$

又,

$$d\Omega = 2\pi\ \ d\cos\theta = \frac{\pi}{p_i\,p_f}\,d\,t$$

だから次の様に書いてもよい。

$$\frac{d\sigma}{d\,t} = \frac{|T_{fi}|^2}{16\pi\,\lambda_i}\,.$$

重心系における2体崩壊$1 \to 2+3$の確率の角度分布は

$$\left(\frac{d\,\Gamma}{d\,\Omega}\right)_{\mathrm{CM}} = \frac{p_f}{32\pi^2 m_1^2}\,|T_{fi}|^2.$$

なおこれらの最終結果に必ず$|T_{fi}|^2$という量があらわれている。もし,始状態のスピンの偏りが全く平均化されている情況で,終状態のスピンの偏りについて和をとったもののみを観測する場合には,これまでに求めた式で$|T_{fi}|^2$の替りに,衝突の場合には

$$\frac{1}{N_1 N_2}\sum_{\substack{\mathrm{initial}\\ \mathrm{spins}}}\ \sum_{\substack{\mathrm{final}\\ \mathrm{spins}}} |T_{fi}|^2$$

を代入したものが,又崩壊の場合には

$$\frac{1}{N_1}\sum_{\substack{\mathrm{initial}\\ \mathrm{spin}}}\ \sum_{\substack{\mathrm{final}\\ \mathrm{spins}}} |T_{fi}|^2$$

を代入したものが実験と比べられなければならない。ここでN_iはi番目の粒子のスピン多重度の意味で,その粒子が質量をもち,スピンの大きさがj_iなら$N_i = 2j_i + 1$となる。それが光子の場合には$N_i = 2$である。$|T_{fi}|^2$の替りに用いられるべきこれらの量は以下しばしば単に

$$\Sigma' |T_{fi}|^2 \ \text{又は}\ \ \mathrm{TSQ}$$

としてあらわされる(後者はT Squaredの意)。

3. Compton 散乱

Compton散乱は電子による光子の弾性散乱である。各粒子の運動量を次の様にとろう。

$$e(p_a) + \gamma(k_a) \to e(p_b) + \gamma(k_b).$$

2次のFeynman図は二つ生ずる。

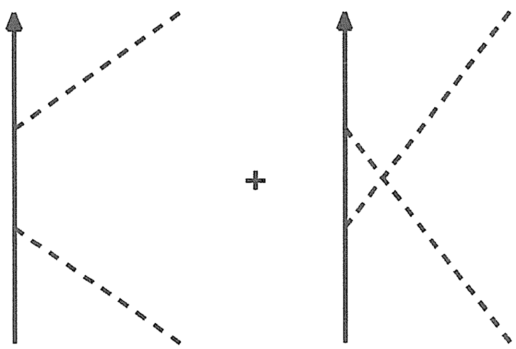

Fig. 1 Feynman diagrams for the Compton scattering.

散乱振幅は

$$\frac{1}{e^2}T_{fi}=\varepsilon_a(k_a)_\mu\,\varepsilon_b^*(k_b)_\nu\,\overline{u}(p_b)\left\{\frac{\gamma_\nu(\not k_a+\not p_a+m)\gamma_\mu}{s-m^2}\right.$$

$$\left.+\frac{\gamma_\mu(\not p_a-\not k_b+m)\gamma_\nu}{u-m^2}\right\}u(p_a).$$

ここで$\varepsilon_a(k_a)_\mu$と$\varepsilon_b(k_b)_\mu$は各々始状態と終状態の光子の偏りベクトルである。

これから

$$\frac{1}{e^4}\mathrm{TSQ}=\frac{1}{4e^4}\sum_{\text{spins}}\sum\sum\sum|T_{fi}|^2$$

$$=\frac{A_a}{(s-m^2)^2}+\frac{A_a+B_a}{(s-m^2)(u-m^2)}+\frac{B_b}{(u-m^2)^2}.$$

ただし

$$A_a=\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[(\not p_a+m)\gamma_\mu(\not k_a+\not p_a+m)\gamma_\nu\right.$$
$$\left.(\not p_b+m)\gamma_\nu(\not k_a+\not p_a+m)\gamma_\mu\right]$$

$$B_b=\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[(\not p_a+m)\gamma_\nu(\not p_a-\not k_a+m)\gamma_\mu\right.$$
$$\left.(\not p_b+m)\gamma_\mu(\not p_a-\not k_b+m)\gamma_\nu\right]$$

$$A_b=\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[(\not p_a+m)\gamma_\nu(\not p_a-\not k_b+m)\gamma_\mu\right.$$
$$\left.(\not p_b+m)\gamma_\nu(\not k_a+\not p_a+m)\gamma_\mu\right]$$

$$B_b=\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[(\not p_a+m)\gamma_\mu(\not k_a+\not p_a+m)\gamma_\nu\right.$$
$$\left.(\not p_a+m)\gamma_\mu(\not p_a-\not k_b+m)\gamma_\nu\right].$$

この4つの量をREDUCEプログラムを用いて計算すると，

$$A_a=2\{(s-m^2)t+s^2+3m^4\}$$
$$B_b=2\{(u-m^2)t+u^2+3m^4\}$$
$$=2\{(s-3m^2)t+s^2-4m^2s+7m^4\}$$
$$A_b=B_a=2m^2\{-t+4m^2\}.$$

全断面積を求める為の角度積分を実行しよう。$x=u-m^2$としてTSQをxのべきに展開すると

$$\frac{1}{e^4}\mathrm{TSQ}=\frac{-2x}{s-m^2}+\frac{8m^2s}{(s-m^2)^2}$$
$$+\frac{2}{x}\,\frac{-s^2+6m^2s+3m^4}{s-m^2}+\frac{8m^4}{x^2}.$$

さらに

$$\frac{d\sigma}{dx}=\frac{d\sigma}{dt}=\frac{\mathrm{TSQ}}{16\pi(s-m^2)^2}$$

であるから

$$\sigma_{\text{tot}}=\int_{x_1}^{x_2}\frac{d\sigma}{dx}dx=\frac{e^4}{16\pi}\left\{\frac{s+m^2}{s^2}\right.$$
$$\left.+\frac{2(s^2-6m^2s-3m^4)}{(s-m^2)^3}\ln\frac{s}{m^2}+\frac{16m^2}{(s-m^2)^2}\right\}.$$

ここで積分の上下限x_1，x_2は

$$x_1=-s+m^2\quad(\text{前方散乱})$$

$$x_2=-m^2+\frac{m^4}{s}\quad(\text{後方散乱}).$$

実験室系での光子エネルギーをωとすると$2m\omega=s-m^2$，従ってωであらわした全断面積は

$$\sigma_{\text{tot}}=\pi r^2\left\{\frac{2m(m+\omega)}{(m+2\omega)^2}+\frac{4m^2}{\omega^2}\right.$$
$$\left.+\frac{m}{\omega^3}(-2m^2-2m\omega+\omega^2)\ln\frac{m+2\omega}{m}\right\},$$

ここで

$$r=\frac{e^2}{4\pi m}=2.817\times10^{-13}\ \mathrm{cm}$$

は電子の古典半径である。

低エネルギー極限では

$$\sigma_{\text{tot}}=\pi r^2\left\{\frac{8}{3}-\frac{16}{3}\frac{\omega}{m}+O\left(\frac{\omega^2}{m^2}\right)\right\}.$$

反対に，高エネルギー極限では

$$\sigma_{\text{tot}}=2\pi r^2\cdot\frac{m^2}{s}\ln\frac{s}{m}+O\left(\frac{1}{s}\right),$$

又は，$y=\dfrac{\omega}{m}$として

$$\sigma_{\text{tot}} = \pi r^2 \left\{ \frac{\ln 2y}{y} - \frac{2}{y^2} \ln 2y + O(y^{-2}) \right\}$$

が成り立つ。

なお実験室系での微分断面積を与える次式はKlein-Nishinaの式と呼ばれる。

$$\left(\frac{d\gamma}{d\Omega}\right)_{\text{Lab}} = \frac{r^2}{2} \frac{\omega'}{\omega} \left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta \right).$$

ここではω, ω'が各々散乱前,散乱後の光子のエネルギーをあらわす。又,θは実験室系での散乱角であり,これら3者の間には次の関係がある。

$$\omega' = \frac{m\omega}{m + \omega(1 - \cos\theta)}, \quad \omega = \frac{m\omega'}{m - \omega'(1 - \cos\theta)}.$$

$\omega \to 0$ の極限をとると

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Lab}} = \frac{r^2}{2} (1 + \cos^2\theta)$$

となり低エネルギー極限でも球対称にならない。

```
%--------------------- COMPTON SCATTERING -------;
LINELENGTH(78);
130

MASS PA=M,PB=M,KA=0;
MSHELL PA,PB,KA;

PA.PB:=M**2-TT/2¥
PA.KA:=(S-M**2)/2¥
PB.KA:=(M**2-U)/2¥
U:=2*M**2-S-TT¥

INDEX MU,NU;
OPERATOR F;

FORALL P LET F(P)=G(L,P);

AA:=(F(PA)+M)*F(MU)*(F(PA+KA)+M)*F(NU)*
     (F(PB)+M)*F(NU)*(F(PA+KA)+M)*F(MU);

               4     2          2
AA := 2*(3*M   - M *TT + S   + S*TT)

BB:=(F(PA)+M)*F(NU)*(F(PB-KA)+M)*F(MU)*
     (F(PB)+M)*F(MU)*(F(PB-KA)+M)*F(NU);

               4      2         2         2
BB := 2*(7*M   - 4*M *S - 3*M *TT + S   + S*TT)

AB:=(F(PA)+M)*F(NU)*(F(PB-KA)+M)*F(MU)*
     (F(PB)+M)*F(NU)*(F(PA+KA)+M)*F(MU);

           2      2
AB := 2*M *(4*M   - TT)

BA:=(F(PA)+M)*F(MU)*(F(PA+KA)+M)*F(NU)*
     (F(PB)+M)*F(MU)*(F(PB-KA)+M)*F(NU)¥

AB-BA;
0

AA-SUB(S=2*M**2-TT-S,BB);
0

END;
```

Fig. 2 REDUCE program for the Compton scattering.

4. 電子陽電子消滅

これは電子と陽電子の対が消滅して２個の光子になる反応である。各粒子の４次元運動量を

$$e^-(p)+e^+(q)\to\gamma(k_1)+\gamma(k_2)$$

となる様にとる。２次のFeynman図は２個生じ，それらによる寄与を同符号にて加えあわせたものがT_{fi}を与える。

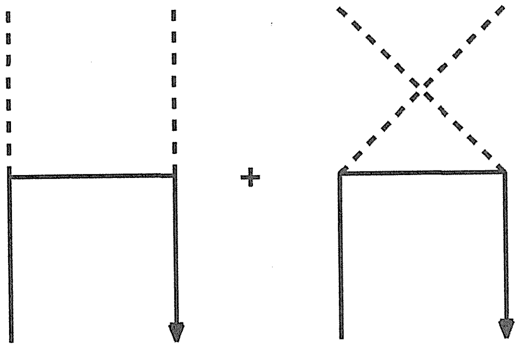

Fig. 3　Feynman diagrams for pair annihilation.

即ち，

$$\frac{T_{fi}}{e^2}=\bar{v}(q)\left\{\frac{\gamma_\nu(\not p-\not k_1+m)\gamma_\mu}{t-m^2}+\frac{\gamma_\mu(\not p-\not k_2+m)\gamma_\nu}{u-m^2}\right\}\varepsilon_\mu{}^*(k_1)\,\varepsilon_\nu{}^*(k_2),$$

$$\frac{1}{e^4}\mathrm{TSQ}=\frac{1}{4e^2}\sum_{\text{spins}}\sum\sum\sum|T_{fi}|^2$$

$$=\frac{A_a}{(t-m^2)^2}+\frac{A_b+B_a}{(t-m^2)(u-m^2)}+\frac{B_b}{(u-m^2)^2}.$$

ここで，

$$A_a=\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[(\not q-m)\gamma_\nu(\not p-\not k_1+m)\gamma_\mu(\not p+m)\gamma_\mu(\not p-\not k_1+m)\gamma_\nu\right],$$

$$A_b=\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[(\not q-m)\gamma_\nu(\not p-\not k_1+m)\gamma_\mu(\not p+m)\gamma_\nu(\not p-\not k_2+m)\gamma_\mu\right],$$

$$B_a=\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[(\not q-m)\gamma_\mu(\not p-\not k_2+m)\gamma_\nu(\not p+m)\gamma_\mu(\not p-\not k_1+m)\gamma_\nu\right],$$

$$B_b=\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[(\not q-m)\gamma_\mu(\not p-\not k_2+m)\gamma_\nu(\not p+m)\gamma_\nu(\not p-\not k_2+m)\gamma_\mu\right].$$

これらをREDUCEによって求めると

$$A_a=-2t^2-2st+2m^2s-6m^4,$$

$$A_b=2m^2(s-4m^2)=B_a,$$

$$B_b=-2u^2-2su+2m^2s-6m^4$$

$$=-2t^2+2t(4m^2-s)-14m^4+6m^2s.$$

従って，$x=t-m^2$，$y=u-m^2$とし，さらに

$$F(x)=-2+\frac{1}{x}\left(-2s-8m^2+\frac{16m^4}{s}\right)-\frac{8m^4}{x^2}$$

とすると

$$\frac{1}{e^4}\mathrm{TSQ}=F(x)+F(y).$$

この反応では

$$\frac{d\sigma}{dt}=\frac{\mathrm{TSQ}}{16\pi s(s-4m^2)}.$$

全断面積σ_{tot}は，終状態が同種粒子よりなることにより，微分断面積を全立体角で積分したものの半分である。即ち，

$$\sigma_{tot}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)d\Omega=\frac{1}{2}\int_{t_{min}}^{t_{max}}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)dt$$

$$t_{max}=-\frac{s}{2}+m^2+\frac{1}{2}\sqrt{s}\sqrt{s-4m^2}$$

$$t_{min}=-\frac{s}{2}+m^2-\frac{1}{2}\sqrt{s}\sqrt{s-4m^2}.$$

こうして

$$\sigma_{tot}=\frac{e^4}{8\pi s(s-4m^2)}\left\{\left(s+4m^2-\frac{8m^4}{s}\right)\times\right.$$

$$\ln\frac{\sqrt{s}+\sqrt{s-4m^2}}{\sqrt{s}-\sqrt{s-4m^2}}$$

$$-\sqrt{\frac{s-4m^2}{s}}\ (s+4m^2)\Bigg\}.$$

重心系での e^+ 又は e^- の速度

$$\beta=\sqrt{\frac{s-4m^2}{s}}$$

であらわすと

$$\sigma_{tot}=\frac{\pi\alpha^2}{4m^2\beta}(1-\beta^2)\Bigg\{2(\beta^2-2)$$

$$+\frac{3-\beta^4}{\beta}\ \ln\frac{1+\beta}{1-\beta}\Bigg\}.$$

初期状態において電子が静止している実験室系で陽電子のエネルギーをE_+とし$\gamma=(E_+/m)$を用いてあらわすと

$$\sigma_{tot}=\frac{\pi\gamma^2}{\gamma+1}\Bigg\{\frac{\gamma^2+4\gamma+1}{\gamma^2-1}\ \ln\left(\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}\right)$$

$$-\frac{\gamma+3}{\sqrt{\gamma^2-1}}\Bigg\}.$$

高エネルギー極限 ($s\to\infty$) では,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM}=\frac{\alpha^2}{2s}\left(\frac{u}{t}+\frac{t}{u}\right)$$

$$=\frac{\alpha^2}{2s}\left(\tan^2\frac{\theta}{2}+\cot^2\frac{\theta}{2}\right),$$

```
%-------- PROGRAM FOR  PAIR ANNIHILATION CROSS SECTION;
LINELENGTH(78);
130

MASS P=M,Q=M,K1=0,K2=0;
MSHELL P,Q,K1,K2;

OPERATOR F;
FORALL PP LET F(PP)=G(L,PP);

U:=2*M**2-S-T¥
K2:=P+Q-K1¥
P.Q:=S/2-M**2¥
P.K1:=(M**2-T)/2¥
Q.K1:=(S+T-M**2)/2¥

ON RAT;
FACTOR T;
ORDER T,S,M;

INDEX MU, NU;

AA:=(F(Q)-M)*F(NU)*(F(P)-F(K1)+M)*F(MU)*
     (F(P)+M)*F(MU)*(F(P)-F(K1)+M)*F(NU);
               2              2          2
AA :=  - 2*T   - 2*T*S + 2*M *(S - 3*M )

AB:=(F(Q)-M)*F(NU)*(F(P)-F(K1)+M)*F(MU)*
     (F(P)+M)*F(NU)*(F(P)-F(K2)+M)*F(MU);
            2          2
AB := 2*M *(S - 4*M )

BA:=(F(Q)-M)*F(MU)*(F(P)-F(K2)+M)*F(NU)*
     (F(P)+M)*F(MU)*(F(P)-F(K1)+M)*F(NU);
            2          2
BA := 2*M *(S - 4*M )

BB:=(F(Q)-M)*F(MU)*(F(P)-F(K2)+M)*F(NU)*
     (F(P)+M)*F(NU)*(F(P)-F(K2)+M)*F(MU);
               2                   2         2            2
BB :=  - 2*T   + 2*T*( - S + 4*M ) + 2*M *(3*S - 7*M )

END;
```

Fig. 4 REDUCE program for pair annihilation.

$$\sigma_{\mathrm{tot}} = \frac{e^4}{8\pi}\frac{1}{s}\ \ln\frac{s}{m^2} + O\left(\frac{\ln s}{s^2}\right).$$

低エネルギー極限（$\beta \to 0$）では

$$\sigma_{\mathrm{tot}} = \frac{\pi\alpha^2}{2m^2}\frac{1}{\beta} + O(\beta^0)$$

となり発熱反応特有の（$1/v$）特性を示す。

5. Moeller 散乱

Moeller散乱は相対論的な2粒子の弾性散乱である。各粒子の運動量を

$$e(p_1) + e(p_2) \to e(q_1) + e(q_2)$$

ととろう。2次のFeynman 図は二つ生じ，それらの寄与の差が散乱振幅である。

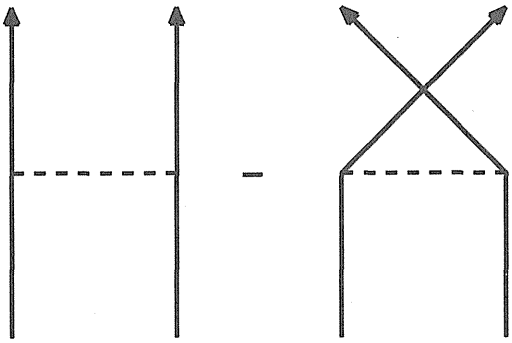

Fig. 5 Feynman diagrams for the Moeller scattering.

即ち，

$$\frac{1}{e^2}T_{fi} = -\frac{1}{t}\,\overline{u}(q_1)\gamma_\mu u(p_1)\cdot\overline{u}(q_2)\gamma_\mu u(p_2)$$

$$+\frac{1}{u}\,\overline{u}(q_1)\gamma_\mu u(p_2)\cdot\overline{u}(q_2)\gamma_\mu u(p_1).$$

さらに

$$\frac{1}{e^4}\mathrm{TSQ} = \frac{4}{t^2}A_a + \frac{1}{tu}(A_b + B_a) + \frac{4}{u^2}B_b,$$

$$A_a = \frac{1}{16}\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(\not{p}_1 + m)\gamma_\nu(\not{q}_1 + m)]\cdot$$
$$\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(\not{p}_2 + m)\gamma_\nu(\not{q}_2 + m)],$$

$$A_b = -\frac{1}{4}\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(\not{p}_1 + m)\gamma_\nu(\not{q}_2 + m)$$
$$\gamma_\mu(\not{p}_2 + m)\gamma_\nu(\not{q}_1 + m)],$$

$$B_a = -\frac{1}{4}\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(\not{p}_2 + m)\gamma_\nu(\not{q}_2 + m)$$
$$\gamma_\mu(\not{p}_1 + m)\gamma_\nu(\not{q}_1 + m)],$$

$$B_b = \frac{1}{16}\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(\not{p}_2 + m)\gamma_\nu(\not{q}_1 + m)]\cdot$$
$$\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(\not{p}_1 + m)\gamma_\nu(\not{q}_2 + m)].$$

REDUCEによって計算すると

$$A_a = \frac{1}{2}t^2 + st + (s - 2m^2)^2$$

$$A_b = 2(s^2 - 8m^2 s + 12m^4) = B_a$$

$$B_b = \frac{1}{2}u^2 + su + (s - 2m^2)^2$$

$$= \frac{1}{2}t^2 - 4m^2 t + \frac{1}{2}s^2 - 4m^2 s + 12m^4.$$

こうして

$$\frac{1}{e^4}\mathrm{TSQ} = \frac{4}{t^2}A_a + \frac{2}{tu}A_b + \frac{4}{u^2}B_b$$

とかけるが，右辺の第1項と第3項は各々 t- channel と u- channel に光子を交換したために生ずる項，第2項はそれらの干渉の結果生ずる項である。この干渉項は $s = 2m^2$ と $s = 6m^2$ で符号をかえその間で負である。前者は非物理的な値であり，後者は $p_{\mathrm{CM}} = \frac{m}{\sqrt{2}}$ に相当する値である。

この反応では，

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{CM}} = \frac{\mathrm{TSQ}}{64\pi^2 s}$$

であるが，これを特に p と $\sin\theta$ であらわすと

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{p^4(m^2 + p^2)}\frac{1}{\sin^4\theta}\Big\{p^4\sin^4\theta$$
$$-(3m^4 + 12m^2p^2 + 8p^4)\sin^2\theta$$
$$+4(m^2 + 2p^2)^2\Big\}.$$

ここで$\alpha=\dfrac{e^2}{4\pi}$は微細構造定数である。又簡単の為$p_{\rm CM}=p$と書いた。この様に微分断面積は前方と後方に鋭いピークを持ち，そのために$\sigma_{\rm tot}=\infty$となってしまう。

低エネルギー極限では

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\rm CM}=\frac{\alpha^2 m^2}{p^4\sin^4\theta}\left(1-\frac{3}{4}\sin^2\theta\right)+O\left(\frac{1}{p^2}\right).$$

これは非相対論的Coulomb散乱，その交換項およびそれらの干渉項にわけられる。即ち

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\rm CM}=\frac{\alpha^2 m^2}{16\,p^4}\left(\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}-\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{\cos^4\frac{\theta}{2}}\right)+O\left(\frac{1}{p^2}\right)=\frac{\alpha^2 m^2}{16\,p^4}\times$$

$$\left|\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}+\exp\left(\pm\frac{2}{3}\pi i\right)\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right|^2+O\left(\frac{1}{p^2}\right).$$

高エネルギー極限に相当する式は始めの式で$m=0$とおいて考えられる。

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\rm CM}=\frac{\alpha^2}{s}\,\frac{1}{\sin^4\theta}\,(4-\sin^2\theta)^2$$

又は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\rm CM}=\frac{\alpha^2}{2s}\left\{\frac{u^2+s^2}{t^2}+\frac{2s^2}{tu}+\frac{t^2+s^2}{u^2}\right\}.$$

```
%---------------------- MOELLER SCATTERING--------;
LINELENGTH(78);
130
INDEX MU,NU;
MASS PA=M,PB=M,QA=M,QB=M;
MSHELL PA,PB,QA,QB;
PA.PB:=QA.QB:=S/2-M**2¥
PA.QA:=PB.QB:=M**2-TT/2¥
PA.QB:=PB.QA:=M**2-U/2¥
U:=4*M**2-S-TT¥
ORDER TT,S,M;
FACTOR TT;

OPERATOR J,K;
FORALL P LET J(P)=G(L1,P),K(P)=G(L2,P);
    AA:=    J(MU)*(J(PA)+M)*J(NU)*(J(QA)+M)*
            K(MU)*(K(PB)+M)*K(NU)*(K(QB)+M);
         2                 2       2        4
AA := (TT   + 2*TT*S + 2*(S   - 4*S*M   + 4*M ))/2

    AB:=   -J(MU)*(J(PA)+M)*J(NU)*(J(QB)+M)*
            J(MU)*(J(PB)+M)*J(NU)*(J(QA)+M);
          2         2       4
AB := 2*(S   - 8*S*M   + 12*M )

    BA:=   -J(MU)*(J(PB)+M)*J(NU)*(J(QB)+M)*
            J(MU)*(J(PA)+M)*J(NU)*(J(QA)+M);
          2         2       4
BA := 2*(S   - 8*S*M   + 12*M )

    BB:=    J(MU)*(J(PB)+M)*J(NU)*(J(QA)+M)*
            K(MU)*(K(PA)+M)*K(NU)*(K(QB)+M);
         2         2    2        2        4
BB := (TT   - 8*TT*M   + S   - 8*S*M   + 24*M )/2

AB-BA;
0
SUB(TT=4*M**2-S-TT,BB)-AA;
0
END;
```

Fig. 6　REDUCE program for the Moeller scattering.

6. Bhabha散乱

Bhabha散乱は電子と陽電子との弾性散乱である。各粒子の4次元運動量を

$$e\,(p_1)+e^+(q_1)\rightarrow e\,(p_2)+e^+(q_2)$$

ととろう。2次のFeynman図は二つ生じ，これらの寄与の差が散乱振幅を与える。

従って，

$$\frac{1}{e^2}T_{fi}=\frac{1}{t}\cdot\bar{u}(p_2)\gamma_\mu\, u(p_1)\cdot\bar{v}(q_1)\gamma_\mu\, v(q_2)$$

$$-\frac{1}{s}\cdot\bar{v}(q_1)\gamma_\mu u(p_1)\cdot\bar{u}(q_2)\gamma_\mu\, v\,(q_2).$$

これから

$$\frac{1}{e^4}\,\mathrm{TSQ}=\frac{4A}{t^2}-\frac{2B}{s\,t}+\frac{4C}{s^2},$$

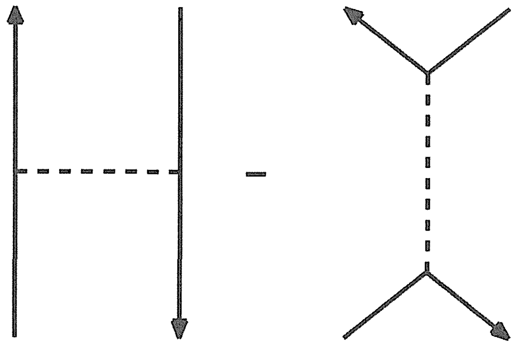

Fig. 7 Feynman diagrams for the Bhabha scattering.

```
%--------------------- CROSS SECTION OF BHABHA SCATTERING ----;

MASS P1=M,P2=M,Q1=M, Q2=M;
MSHELL P1,P2,Q1,Q2;
Q2:=P1+Q1-P2¥
P1.Q1:=S/2-M**2¥
P1.P2:=M**2-T/2¥
Q1.P2:=(S+T)/2-M**2¥

OPERATOR J,K;
FORALL P LET J(P)=G(L1,P);
FORALL P LET K(P)=G(L2,P);

INDEX MU,R;
FACTOR T;
ORDER T,S,M;

 (J(P2)+M)*J(MU)*(J(P1)+M)*J(R)*(K(Q1)-M)*K(MU)*(K(Q2)-M)*K(R);
  2              2       2    4
(T  + 2*T*S + 2*(S  - 4*S*M  + 4*M ))/2

AA:=WS¥


-(J(P2)+M)*J(MU)*(J(P1)+M)*J(R)*(J(Q1)-M)*J(MU)*(J(Q2)-M)*J(R);
   2               2     2
2*T  + 4*T*S + 2*(S  - 4*M )

BB:=WS¥


 (J(Q1)-M)*J(MU)*(J(P1)+M)*J(R)*(K(P2)+M)*K(MU)*(K(Q2)-M)*K(R);
   2               2     2    4
(2*T  + 2*T*(S - 4*M ) + S  + 8*M )/2

CC:=WS¥

END;
```

Fig. 8 REDUCE program for the Bhabha scattering.

$$A=\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\left[(\not{p}_2+m)\gamma_\mu(\not{p}_1+m)\gamma_\rho\right]\cdot$$
$$\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\left[(\not{q}_1-m)\gamma_\mu(\not{q}_2-m)\gamma_\rho\right],$$
$$B=\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\left[(\not{p}_2+m)\gamma_\mu(\not{p}_1+m)\gamma_\rho\right.$$
$$\left.(\not{q}_1-m)\gamma_\mu(\not{q}_2-m)\gamma_\rho\right],$$
$$C=\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\left[(\not{q}_1-m)\gamma_\mu(\not{p}_1+m)\gamma_\rho\right]\cdot$$
$$\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\left[(\not{p}_2+m)\gamma_\mu(\not{q}_2-m)\gamma_\rho\right].$$

REDUCEによれば

$$A=\frac{1}{2}\,t^2+st+s^2-4m^2s+4m^4\ ,$$
$$B=2(-t^2-2st-s^2+4m^4)\ ,$$
$$C=\frac{1}{2}\,s^2+ts+t^2-4m^2t+4m^4\ .$$

交叉対称性から，uを不変にしてsとtとを入れかえると，Bは不変にとどまりAとCは互いに入れかわる。

重心系での微分断面積は，

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{CM}}=\frac{\mathrm{TSQ}}{64\,\pi^2 s}$$

より求まる。この量は$\theta=0$の前方にのみ鋭いピークを示し，その為$\sigma_{\mathrm{tot}}(s)=\infty$となる。

7. むすび

典型的な量子電気力学の反応をREDUCEプログラムに援けられながら記述して来た。ここにとりあげなかったもので重要なものの中には，真空中の2光子のDelbrueck散乱および外場中でおこる諸過程，例えば電子の制動輻射，1個の光子による電子陽電子対創生，1個の光子の2光子への崩壊等がある。さらに，くりこみを必要とする諸結果を求めるのにもREDUCEプログラムは有用である。これらの問題については稿をあらためて述べることとしたい。

参考文献

(1) A.C. Hearn：*REDUCE User's Manual, Vesion 3.0*, Rand Corporation (1983)

(2) ハイトラー著，沢田克郎訳：輻射の量子論（上，下），吉岡書店（1957）

(3) A.I.Akhiezer and V.B.Berestetskii：*Quantum Electrodynamics,* Interscience Publishers (1965)

(4) J.D. Bjorken and S.D.Drell：*Relativistic Quantum Fields,* McGraw-Hill (1965)