McDuffの非可算因子についての一考察

芳 賀 義 則*

(昭和53年9月4日受理)

A Note on Uncountably Many II_1-Factors of McDuff

YOSHINORI HAGA

Abstract: – In the appendix of [6], it was shown that there exist two factors of type II_1 which are not algebraically isomorphic to each other but are such that each is algebraically isomorphic to a subfactor of the other. In the present note, we show that there exist uncountably many factors of type II_1 each pair of two factors of which has the same property as above. Hence each factor of them contains uncountably many non isomorphic subfactors of type II_1 and is embedded isomorphically in each of the other factors. Our example is obtained by analysing the construction of an uncountable number of II_1-factors by McDuff [5].

まえがき

可分Hilbert空間上のII_1型因子の代数型の研究はMc Duff〔5〕, 次いでSakai〔7〕,〔8〕によって非可算個の異なる代数型が存在する事が示されて以来大きな進展が無い。Connes〔2〕による"漸近有限因子 (hyperfinite factor)の部分因子はすべて漸近有限である"という結果が目立つ程度である。そして，代数型をすべて網羅し分類することが当分見込みが無さそうに思われる現状においては，より粗い分類を試みる必要があろう。例えば〔6〕の類 (genus)の概念をその観点から眺める事も出来よう。また代数型の包含関係を調べる事によってII_1型因子の間に何らかの順序関係を導入し，類別を試みることも可能かも知れない。Connes の上述の結果は，"任意のII_1型因子は漸近有限因子を部分因子として含む"という〔5〕の結果と併せて，漸近有限因子が此の意味で最小のII_1型因子であることを示しているわけである。一方〔6〕の付記において von Neumann は次のような例を示した。すなわち，"代数同型でない2つのII_1型因子で，互いに他の部分因子に同型であるものが存在する。" 此れは集合論におけるBernstein型の定理がII_1型因子の包含関係については成立しない事を云っているわけである。此の結果の拡張として此の論文では，"その中のどの2つも互いに同型でない非可算無限個のII_1型因子で，しかもそのいずれもが互いに他の部分因子に同型であるようなものが存在する" ことを示す。従って此れらのII_1型因子のおのおのは非可算無限個の互いに非同型な部分因子を含み，しかも互いに他の因子に代数的に埋め込まれることになる。此の例はMc Duff〔5〕の構成した非可算個のII_1型因子から可算個を除くことによって得られる。

1. Mc Duff の因子

Gを離散可算群，eをその単位元とする。共役類

$$C_h = \{ ghg^{-1} \mid g \in G \}$$

がすべての$h \in G$, $h \neq e$ に対して無限集合であるときGを無限共役類群 (infinite conjugacy class group) 或いはICC群とよぶ。離散可算群Gに対し，$L_2(G)$ 上の左移動作用素L_g：

$$(L_g \xi)(h) = \xi(g^{-1}h), \quad \xi \in L_2(G)$$

で生成される$L_2(G)$上の von Neumann 環をA(G) で表わすと，周知のようにGが{e} 以外のICC群ならばA(G)はII_1型因子である。

補 題 1. (〔5〕Appendix, Lemma A. 3)

* 茨城大学工学部応用数学科 (日立市中成沢町)

G_1，G_2が共にICC群で，G_1がG_2の部分群に同型ならば$A(G_1)$は$A(G_2)$の部分因子に同型である。

証　明．　一般にG上の有限個の点以外では0になる複素数値関数の全体は合成積（convolution）

$$(x*y)(g)=\sum_{h\in G} x(h^{-1}g)y(h)$$

と対合（involution）

$$x^*(g)=\overline{x(g^{-1})}$$

および$L_2(G)$の内積に関してHilbert環であり，$L_2(G)$はその完備化になる。よって，$x\in L_2(G)$に対して作用素$T(x)$を

$$T(x)f=x*f,\qquad f\in L_2(G)$$

で定義すれば，$A(G)$は$T(x)$が有界作用素であるような$x\in L_2(G)$から成る$L_2(G)$の部分環に同型である。（$L_2(G)$自身は環にはならない。）（〔3〕Ⅲ.§7.6，〔8〕p.182）さて，$T(x_1)\in A(G_1)$に対して

$$x_2(g)=\begin{cases} x_1(g) & (g\in G_1) \\ 0 & (g\in G_2\setminus G_1)\end{cases}$$

と定義すれば　$T(x_2)\in A(G_2)$であって，$A(G_1)$は$A(G_2)$の部分環

$$A_1=\{A\in A(G_2)\mid A=T(x),\ x(g)=0\ (g\in G_2\setminus G_1)\}$$

と同型になる。（〔5〕Lemma A.2，A.3 参照）。

Mc Duff〔5〕による非可算個の非同型なII_1型因子の構成について述べよう。離散可算群Gに対して，先ず次のように2つの群$L_0(G)$，$L_1(G)$を作る。

$L_0(G)$：　$G_j=G$　（$j=1,2,\cdots\cdots$）としてその無限直和を$\tilde{G}$で表わす。

$$\tilde{G}=G_1\oplus G_2\oplus\cdots\cdots$$

F_∞を可算無限個の元δ_1，δ_2，……　から生成される自由群として，$\tilde{G}$とF_∞との自由積を$\tilde{G}*F_\infty$と書こう。此の自由積において

$$\delta_i g_j \delta_i^{-1} g_j^{-1}\qquad (i\leqq j,\ g_j\in G_j)$$

の形の元全体で生成される正規部分群をN_1とし

$$L_0(G)=(\tilde{G}*F_\infty)/N_1$$

と定義する。此れはδ_iで生成される無限巡回群をH_iとすれば，〔4〕で定義された群（H_1，H_2，……；G_1，G_2……）を考えることに他ならない。従って$L_0(G)$は$g_j\in G_j$（$j=1,2,\cdots\cdots$）とδ_1，δ_2……で生成される群で，定義関係が

(i)　$g_j g_i=g_i g_j$　　　（$i\neq j$）
(ii)　$g_j\delta_i=\delta_i g_j$　　　（$i\leqq j$）

で与えられる群と考えてよい。

$L_1(G)$：　正の整数全体の中の有限個のみを動かす置換全体から成る群をΠで表わし，Πの$\tilde{G}$上への作用を

$$\pi g_j\pi^{-1}=g_{\pi(j)}$$

で定義する。ここで$\pi(j)$は置換$\pi\in\Pi$による j の像である。此の作用に関する$\tilde{G}$とΠとの半直積（$\tilde{G}$，Π）を作る。すなわち（$\tilde{G}$，Π）は$\tilde{g}=(g_j)\in\tilde{G}$と$\pi\in\Pi$との対（$\tilde{g}$，$\pi$）から成り，

$$\pi(\tilde{g})=(g_{\pi(j)})$$

として，積を

$$(\tilde{g},\pi)(\tilde{h},\rho)=(\tilde{g}\pi(\tilde{h}),\pi\rho)$$

で定義した群である。$\tilde{G}$がICC群なら（$\tilde{G}$，Π）もICC群である。此の半直積とF_∞との自由積$(\tilde{G},\Pi)*F_\infty$において

$$\delta_i g_j \delta_i^{-1} g_j^{-1}\qquad (i\leqq j,\ g_j\in G_j)$$

（G_jは（$\tilde{G}$，Π）の部分群とみなしている。）の形の元全体で生成される正規部分群をN_2とし

$$L_1(G)=((\tilde{G},\Pi)*F_\infty)/N_2$$

と定義する。此の群はまた，$g_j\in G_j$（$j=1,2,\cdots\cdots$）とδ_1，δ_2……　および$\pi\in\Pi$の全体で生成される群で，定義関係が

(i)　$g_j\ g_i=g_i\ g_j$　　　（$i\neq j$）
(ii)　$g_j\ \delta_i=\delta_i\ g_j$　　　（$i\leqq j$）
(iii)　$\pi g_j\pi^{-1}=g_{\pi(j)}$

で与えられる群と考えてよい。

次の3つの補題は〔1〕からの引用である。補題2は49頁 Appendix に証明があるが，直観的には明らかであろ

う。元xの表示(1)の一意性に注意しよう。

補　題　2.

$L_0(G)$ の元xは次の形にただ一通りに表わされる。

$$x = \gamma_1 \Delta_1 \gamma_2 \cdots\cdots \gamma_p \Delta_p \gamma_{p+1} \qquad (1)$$

ただし，$\Delta_j \in F_\infty$ であり，また γ_1 と γ_{p+1} は単位元であり得るが，それ以外の γ_2，……，γ_p は単位元とは異なる $\widetilde{G}$ の元で，$\gamma_j \in G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots\cdots \oplus G_s$（ s は $\Delta_{j-1} \in F_\infty$ の最後の文字 δ_s^n（ $n \neq 0$ ）の番号）である。

$L_1(G)$ の元xも同様に表わされる。ただし $\gamma_j = \gamma_j{}' \pi$（ $\pi \in \Pi$ ）で，$\gamma_j{}' \in G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots\cdots \oplus G_s$ である。

補　題　3.

GがICC群ならば $L_0(G)$, $L_1(G)$ は共にICC 群である。

証　明．補題2を用いて $x=\gamma_1 \Delta_1 \gamma_2 \cdots\cdots \gamma_p \Delta_p \gamma_{p+1}$ $x \neq e$ とすると，整数 $n>p+1$ に対して $\delta_n^k x \delta_n^{-k}$（ $k=1, 2, \cdots\cdots$ ）がxの共役類の無限個の元である。

補　題　4.

θ：G→Hが群Gと群Hの準同型ならば，θ は準同型 $\bar{\theta}$：$L_i(G) \to L_i(H)$（ $i=0, 1$ ）を誘導する。θ が1対1ならば，$\bar{\theta}$ も1対1である。

証　明．$i=0$ に対して示す。$i=1$ の場合も同様である。θ は自然に $\widetilde{G} \to \widetilde{H}$ へ拡張される。δ_k は不変であるとして，さらに $\widetilde{G}*F_\infty \to \widetilde{H}*F_\infty$ へ拡張できる。従って元 $\delta_i\, g_j\, \delta_i^{-1} g_j^{-1}$ は $\delta_i\, \theta(g_j)\, \delta_i^{-1} \theta(g_j^{-1}) = \delta_i h_j \delta_i^{-1} h_j^{-1}$ に移るから $L_0(G) \to L_0(H)$ の準同型 $\bar{\theta}$ が得られる。

次に θ が1対1であるとする。$x \in L_0(G)$ に対し $\bar{\theta}(x) = e$ であるならば，補題2によって $x=\gamma_1 \Delta_1 \gamma_2 \cdots\cdots \gamma_p \Delta_p \gamma_{p+1}$ と書ける。しかるとき

$$\bar{\theta}(x) = \theta(\gamma_1) \Delta_1 \theta(\gamma_2) \cdots\cdots \theta(\gamma_p) \Delta_p \theta(\gamma_{p+1})$$

は $L_0(H)$ の単位元であるから，すべての j に対して $\theta(\gamma_j) = e$，$\Delta_j = e$ となる。θ が1対1だから $\gamma_j = e$. よって $x=e$ となり，$\bar{\theta}$ は1対1である。

さて，各定数 $\alpha \in [0, 1]$ に対し1つのICC群 G^α を対応させる。ICC群Gとして例えば2個の生成元の自由群 F_2 をとる。2進展開を用いて各 α を0と1とからなる無限数列とみなすことができる（有限小数も無限列で表わす。小数点とその前の0は省略する）：

$$\alpha = a_1\, a_2\, a_3 \cdots\cdots \qquad (a_j = 0 \text{ または } 1)$$

以後簡単のため $L_i(G)$（ $i=0, 1$ ）を $i(G)$ とかき，$i(j(G))$ は $i\,j(G)$ と書くことにしよう。補題2からも分かるように，Gは自然に $i(G)$ に埋め込まれるから，補題4によって

$$a_{n-1}(G) \subset a_{n-1}\, a_n(G)$$
$$a_{n-2}\, a_{n-1}(G) \subset a_{n-2}\, a_{n-1}\, a_n(G)$$

等となり，一般に任意のnに対して

$$a_1\, a_2 \cdots a_{n-1}(G) \subset a_1\, a_2 \cdots a_{n-1}\, a_n(G).$$

よってICC群の増加列が得られた事になる。G^α をその和集合として定義する：

$$G^\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_1\, a_2 \cdots\cdots a_n(G)$$

此の時，補題3により $A(G^\alpha)$（ $\alpha \in [0, 1]$ ）はすべて II_1 型因子になるが，Mc Duff〔5〕はそれら非可算個の因子がすべて互いに同型で無い事を，強剰余列（strongly residual sequence）等の概念を用いて示したのである。なお，例えば $\alpha = 1000\cdots\cdots$ は $\alpha = 0111\cdots\cdots$ とも展開されるが，展開が異なれば異なる II_1 型因子が得られる。

2. 包 含 関 係

前節でその構成を述べたMc Duffの因子について，相互の包含関係を調べよう。此の節では群Gの $i(G)$（ $i=0.1$ ）への埋め込みを ε_i または単に ε で表わすことにする：

$$G \simeq \varepsilon_i(G) \subset i(G) \qquad (i=0, 1)$$

補　題　5.

無限列 $a_1, a_2, \cdots$（ $a_j = 0$ または1 ）の部分列を $b_1, b_2, \cdots$ とし，$\alpha = a_1 a_2 \cdots\cdots$，$\beta = b_1 b_2 \cdots\cdots$ とする。此のとき，GがICC群ならば，G^β は G^α の部分群に同型である。

証　明．例えば $b_1 = a_2$，$b_2 = a_5$，…… としよう。しかるとき，

$$b_1(G) = a_2(G) \simeq \varepsilon a_2(G) \subset a_1 a_2(G)$$

であり，また補題4を用いると

$$b_1 b_2(G) = a_2 a_5(G) \simeq \varepsilon a_2 \varepsilon\varepsilon a_5(G) \subset a_1 a_2 a_3 a_4 a_5(G)$$

である。一般に，$b_m = a_n$ として

$$b_1 b_2 \cdots b_m(G) \simeq \varepsilon a_2 \varepsilon\varepsilon a_5 \cdots\cdots a_n(G) \subset a_1 a_2 \cdots\cdots a_m(G)$$

となる。ところが $a_1 a_2 \cdots\cdots a_m(G)$ は増加列であって，その和集合が G^{α} であったから，任意のmに対して $b_1 b_2 \cdots\cdots b_m(G)$ は G^{α} の部分群と同型である。従って

$$G^{\beta} = \bigcup_{n=1}^{\infty} b_1 b_2 \cdots\cdots b_m(G)$$

も G^{α} の部分群と同型である。

補　題　6.

$G^{\alpha}(\alpha \in [0, 1])$ の中の非可算個は互いに他の部分群に同型である。

証　明. $\alpha \in [0, 1]$ を2進展開したときに，0と1を共に無限個含むような α の集合をKとする。α, $\beta \in K$ を2進展開した時，それぞれの数列は互いに他の部分列として表わすことができる。従って補題5によって，G^{α} と G^{β} は互いに他の部分群に同型である。ところで，Kの補集合は有限小数を表わすから可算集合であり，よってKは非可算集合である。

定　理. 互いに同型でないが，しかし互いに他の部分因子に同型であるような非可算個の II_1 型因子が存在する。

証　明. Gを例えば2個の生成元をもつ自由群 F_2 としてで $G^{\alpha}(\alpha \in [0, 1])$ を作れば，$A(G^{\alpha})$ は[5]により互いに同型でない II_1 型因子である。補題6と補題1によりその中の非可算個が定理の条件を満たす。

以上でまえがきに述べた結果は示されたわけであるが此の結果からしても当然次の疑問が起こる。因子Aが他の漸近有限でない II_1 型因子Bの部分因子に同型でないような対(A, B)は存在するか。また，漸近有限でない2つの II_1 型因子A，Bが互いに他の部分因子に同型でないことがあるか。此れらは II_1 型因子の分類にも関連して今後の課題である。

参考文献

[1] S. Anastasio and P. Willig: The structure of factors. Algorithmics Press, New York. (1974)

[2] A. Connes: Classification of injective factors. Ann. of Math., 103 (1976) 73–115.

[3] J. Dixmier: Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien. Gauthier-Villars, Paris. (1969)

[4] J. Dixmier and E. Lance: Deux nouveaux facteurs de type II_1. Invent. Math., 7 (1969) 226–234.

[5] D. McDuff: Uncountably many II_1 factors. Ann. of Math., 90 (1969) 372–377.

[6] F. Murray and J. von Neumann: On rings of operators IV. Ann. of Math., 44 (1943) 716–808.

[7] S. Sakai: An uncountable number of II_1 and II_{∞} factors. J. of Funct. Anal., 5 (1970) 236–246.

[8] S. Sakai: C*-algebras and W*-algebras. Ergebn. Math. Grenzgeb. 60, Springer, Berlin. (1971)