β面上の円柱まわりの流れにおけるエクマン粘性の効果

松浦知德*

（昭和59年9月4日受理）

The effect of Ekman friction on a flow past a circular cylinder in a beta plane

TOMONORI MATSUURA

Abstract – The effect of Ekman friction on homogeneous, incompressible, eastward and westward, low Rossby number flow past a circular cylinder in a beta plane is studied. The flow domain is open laterally but contained horizontally by two rigid planes. The circular cylinder is replaced by the dipole and the quasi-geostrophic vorticity equation linearlized by an Oseen approximation is solved using Fourier transform. The solution of this model for eastward flow shows that the Ekman friction damps the Rossby lee waves, with an exponential decay length of $2/\alpha$ like the case of the monopole. For westward flow, it is found that the wavy pattern does not appear and that the flow pattern bears resemblance to the potential flow. The wake region shows the asymmetry in the upstream-downstream direction with increasing Ekman friction different from inviscid case. The perturbed velocities at upstream stations for eastward flow and downstream stations for westward flow are indicated in detail.

概　　要

β平面内の均質，非圧縮，東西方向，低ロスビー数の円柱を通過する流れに関するエクマン粘性の効果を調べた。流れの領域は水平方向に無限に広がっており，上下に固体壁が存在する場合を考える。円柱は二重涌点で置き換えられ，オセーン近似をした準地衡流方程式がフーリエ変換を使用することによって解かれた。東向流に対するこのモデルの解は単一涌点の場合と同様にエクマン粘性はロスビー波を２／αの距離で１／ｅに減衰させることを示す。西向流では，波動は現われず，流れのパターンはポテンシャル流に類似する。非粘性の場合と異なり，ウェークの領域はエクマン粘性の効果が増大するとともに上下流方向に非対称性を示す。東向流では上流について，西向流では下流について，擾乱の速度分布を詳しく示した。

1. はじめに

地球の回転角速度の鉛直成分の緯度変化（β効果）を考慮した円柱を通過する流れの研究は，黒潮等の強い海流が大きな島（１００km程度）や半島を通過し，それによって影響を受けた時の流れの変動や渦の形成に関連した基礎的な研究として重要である。この問題で最も顕著な現象は，北半球において，東向流ではロスビーリー波が発生し，西向流では物体背後に非常に長いウェークが形成されることである（Long 1952, Yamagata 1976a）。

流体力学の問題として，非粘性の円柱まわりの流れでは，一様流と二重涌点の重ね合わせでその解を表現できることはよく知られている。成層流体と回転流体中の物体まわりの流れにおいても，方程式系をオセーンタイプの渦度方程式で近似し，物体の存在を涌点で置き換えるモデルが使用されてきた。Janowitz（1968）は，こ

＊茨城大学工学部建設工学科（日立市中成沢町）

のモデルを使って成層流体中の水平粘性による前方ウェークの様子を詳しく調べた。またJanowitz(1974)は，成層流体を対象に涌点の強さによる流れの依存性，造波抵抗を調べている。回転系（β面上）の問題を扱ったものとして，非粘性では，McCartney(1976),エクマン粘性を考慮した問題ではYamagata(1976b)とStevenson & Janowitz(1977)の研究がある。

ポイントボルテックスアプローチによる，エクマン粘性の効果を考慮したβ面上の西向流の研究はまだ成されていない。そこで，準地衡流渦位方程式をオセーンタイプの渦位方程式で近似し，円柱を二重涌点で置き換えることにより積分解を求め，エクマン粘性の流れの場に与える影響を調べた。この手法は海山を乗り越える流れに対してStevenson & Janowitz(1977)が最初に使用している。

2. 定式化とその解

ここでは，Fig. 1 に示した回転流体中の円柱を通過する流れのシステムを取り扱う。円柱の半径はRで，高さはHとする。全システムは円柱の中心にとった回転軸Zのまわりに，y方向に変化する回転角速度Ωで回転している。ここではβ面近似を仮定しているので，$f=2\Omega=f_0+\beta y$である。流体の密度と動粘性係数はそれぞれρとνで一定とする。基本流は水平方向に境界はなく，

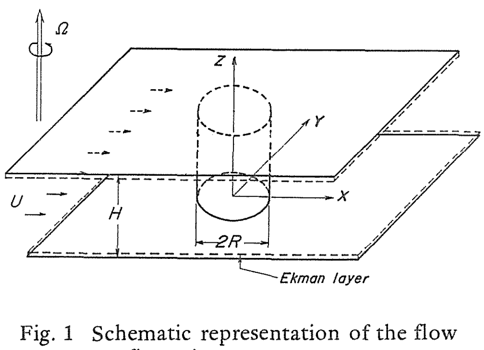

Fig. 1 Schematic representation of the flow configuration.

一様な速度Uとする。座標上で，xの正方向の流れが東向流で，xの負の方向の流れが西向流である。座標系は回転系上に直交座標(x, y, z)を取り，それぞれの方向の相対速度を(u, v, w)とする。Fig. 1 の状況のもとに，無次元化したβ面上の準地衡流渦位方程式は，

$$\frac{D}{Dt}\left(\nabla_H\Psi+\hat{\beta}y\right)=-\alpha\nabla_H^2\Psi \tag{1}$$

ここで，$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}$，　$\nabla_H^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ である。

$z=z^*/H$，$(x, y)=(x^*, y^*)/R$，$(u, v)=(u^*, v^*)/U$で無次元化しているので，無次元パラメータはつぎのようになる。

$$\hat{\beta}=\beta R^2/U,\ \alpha=\sqrt{E_k}/R_0\ (R_0=U/f_0R,\ E_k=2\nu/f_0H^2,\ H/2R=1) \tag{2}$$

流線に沿って(1)式を積分すると，

$$\nabla_H^2\Psi+\hat{\beta}(y-y_0)=-\alpha\int_{(\mp\infty,\,y_0)}^{(x,\,y)}\nabla_H^2\Psi\cdot\frac{ds}{|\nabla_H\Psi|} \tag{3}$$

ここで，y_0は無限遠上流での流線Ψのy座標の値，sは流線の長さである。まず東向流に対して，流線を一様流の成分と擾乱の成分に分けると，

$$\Psi(x, y)=-y+\psi(x, y)=-y_0 \tag{4}$$

(3)式を擾乱だけの式にし，オセーンタイプの近似を使用すると，

$$\nabla_H^2\psi+\hat{\beta}\psi=-\alpha\int_{(-\infty,\,y_0)}^{(x,\,y)}\nabla_H^2\psi\ dx \tag{5}$$

(5)式をxとyで微分し，従属変数をx方向の擾乱の速度u'で書くと，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla_H^2u'\right)+\hat{\beta}\frac{\partial u'}{\partial x}=-\alpha\nabla_H^2u' \tag{6}$$

ここで，$u'=-\frac{\partial\psi}{\partial y}$，$v'=\frac{\partial\psi}{\partial x}$，円柱を$x=0$，$y=0$の位置に存在する二重涌点で置き換える。二重涌点によって生ずるx方向の速度をu_Sとすると，

$$u_S=-UR^2(x^2-y^2)/(x^2+y^2)^2 \tag{7}$$

ここで，UR^2は二重涌点の強さを示す。一方西向流では，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla_H^2u'\right)-\hat{\beta}\frac{\partial u'}{\partial x}=\alpha\nabla_H^2u' \tag{8}$$

そして，$x=0$，$y=0$の二重涌点は，

$$u_S=UR^2(x^2-y^2)/(x^2+y^2)^2 \tag{9}$$

となる。したがって，(7)，(9)式の条件の基に(6)，(8)式を解くことになる。(6)式と(8)式の解をフーリエ積分で表現すると，

$$u'(x, y)=\int_0^\infty\hat{u}(K, y)\cos Ky\,dK \tag{10}$$

ここで，$\hat{u}=A_i(K)\exp[a_i(K)x]$，$(i=1, 2, 3)$。$A_i(K)$は，$K\to\infty$のとき$x=0$，$y=0$で(7)，(9)式が満足されるように決定される(Janowitz 1974)。

この時，$u'=-\dfrac{\partial \phi}{\partial y}$ を使用して求めた東向流のϕは，

$$\phi^-(x,y)=-2UR^2\int_0^\infty \frac{K(a_2+a_3)}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)}\cdot \exp[a_1x]\cdot \sin Ky\, dK,\ x\leq 0,$$

$$\phi^+(x,y)=-2UR^2\int_0^\infty \frac{K(a_2+a_3)}{(a_2-a_1)(a_3-a_2)}\cdot \exp[a_2x]\cdot \sin Ky\, dK -2UR^2\int_0^\infty \frac{K(a_1+a_2)}{(a_2-a_3)(a_3-a_1)}\cdot \exp[a_3x]\cdot \sin Ky\, dK,\ x\geq 0, \tag{11}$$

ここで，$a_i\,(i=1,2,3)$は$a^3+\alpha a^2+(\hat{\beta}-K^2)a-\alpha K^2=0$ の3次方程式の3根であり，その値の求め方は補足に示す。したがって，一様流を含めた流線は，

$$\Psi^\pm(x,y)=-y+\phi^\pm(x,y) \tag{12}$$

一方，西向流の場合は，

$$\phi^-(x,y)=-2UR^2\int_0^\infty \frac{K(a_3+a_1)}{(a_2-a_1)(a_3-a_2)}\cdot \exp[a_2x]\sin Ky\, dK -2UR^2\int_0^\infty \frac{K(a_1+a_2)}{(a_2-a_3)(a_3-a_1)}\cdot \exp[a_3x]\sin Ky\, dK,\ x\leq 0,$$

$$\phi^+(x,y)=-2UR^2\int_0^\infty \frac{K(a_2+a_3)}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)}\cdot \exp[a_1x]\sin Ky\, dK,\ x\geq 0 \tag{13}$$

ここで，$a_i\,(i=1,2,3)$は$a^3-\alpha a^2-(\hat{\beta}+K^2)a+\alpha K^2=0$の3次方程式の3根で，その値の求め方は補足に示す。したがって，流線関数は，

$$\Psi^\pm(x,y)=y+\phi^\pm(x,y) \tag{14}$$

である。

3. 結果と考察

3.1　他の解法との比較

2章で行った解法の妥当性を調べるために，$\alpha=0$とした非粘性の解に匹敵するリー波関数（Miles 1968）と非粘性の初期値問題を数値的に求めた結果との比較を行う。Fig. 2は$\hat{\beta}=1.0$とし，$\alpha=0$（非粘性）の場合の3種類の異なった方法で解かれた流線図である。(a)はMiles（1968）の一様成層流体中のリー波の定常解で

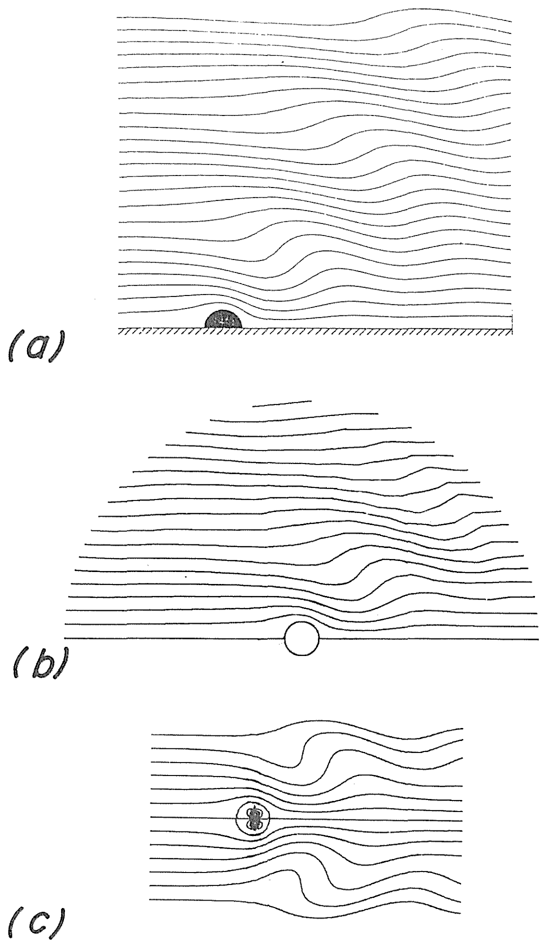

Fig. 2 Streamlines for inviscid eastward flow for $\hat{\beta}=1.0$;
(a) Miles's result (1968),
(b) numerical computation,
(c) present study

ある。(b)は初期値問題として数値積分によって得たものある。(c)はここで行った解き方による流線である。この3つの流線図を比較したとき，波長に関しては，どの解法の場合も等しくなる。しかし，振幅に関しては(a)と(b)はほぼ等しいが，(c)はそれらと比べると大きくなる。この原因を(a)と(c)から考察すると，(a)では上流遠方で擾乱の速度が$O(r^{-\frac{3}{2}})$で小さくなる放射条件を課しているのに対し，(c)ではその条件を与えなかったために，上流の擾乱の速度が$O(r^{-1})$で減衰する解になっているためと考えられる。(b)の数値解法では放射条件を課していないが，少なくとも$\hat{\beta}=1.0$あたりまではMiles

(1968)の解とよく一致する。エクマン粘性を考慮した二重涌点のモデルでは，擾乱の速度は$O(r^{-\frac{3}{2}})$で減衰するため，数値積分の結果とよく一致する。

3.2 東向流

Fig. 3 は東向流の場合で，$\hat{\beta}=1.0$と一定にし，エクマン粘性の大きさを変化させたときの流線図である。この図から解かるように，エクマン粘性の役割は，単一

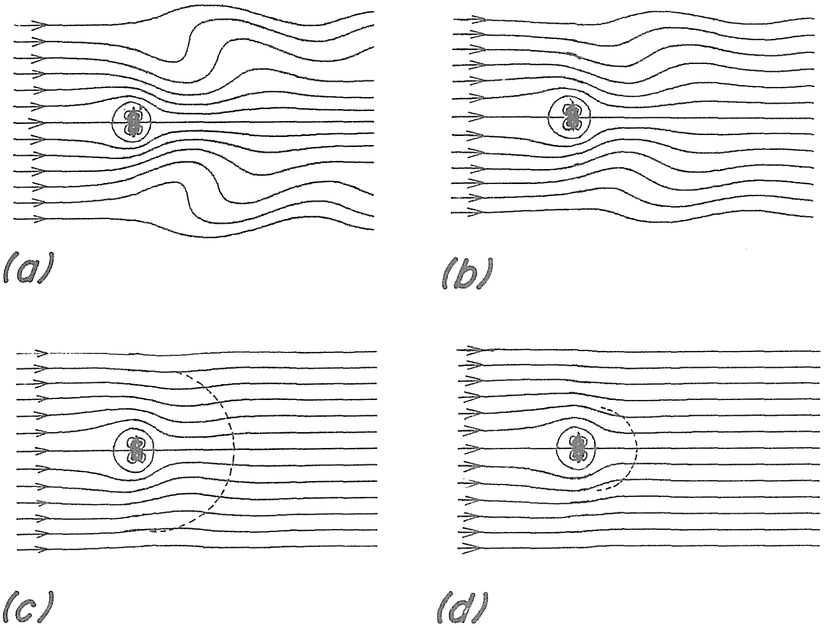

Fig. 3 Streamlines for eastward flow for $\hat{\beta}=1.0$ and varying α;
(a) $\alpha=0.0$, (b) $\alpha=0.1$, (c) $\alpha=0.5$, (d) $\alpha=1.0$

の涌点の場合(Stevenson & Janowitz 1977)と同様に，ロスビーリー波の振幅を二重涌点の表面から$2/\alpha$の距離で$1/e$に減衰させることである。Fig. 3 (c), (d)の破線はそれぞれの場合の二重涌点の表面から$2/\alpha$の位置を示している。Fig. 3 (a), (b)の比較から解かるように，エクマン粘性のロスビーリー波の波長に与える影響はその振幅に与える影響に比べて非常に小さい。Fig. 4 は二重涌点の前方ウェークの速度分布u'を示した図である。この図で特徴的なことは，αの値が大きくなるにしたがい前方ウェークの減衰が速いことである。Fig.5 は$\alpha=0.1$と固定し，$\hat{\beta}$の値を変化させたときの前方ウェークの様子を示したものである。前方ウェークの強さは$\hat{\beta}$の大きさに顕著には依存していないが，ウェークの幅は$\hat{\beta}$が大きいほど狭くなる。ここで，$|x|\gg\frac{1}{\alpha}$の場合に対する擾乱$u'(x, y)$の漸近解を求める。

$$u'(x,y)\simeq-\frac{\sqrt{\pi}}{2}(UR^2)\left(\frac{\hat{\beta}}{\alpha}\right)^{1/2}\frac{1}{|x|^{3/2}}\left(1-\frac{\hat{\beta}}{2\alpha|x|}y^2\right)$$

$$\times\exp\left[-\frac{1}{4}\frac{\hat{\beta}}{\alpha|x|}y^2\right] \tag{15}$$

(15)式から$u'=0$となるyの値は，

$$y=\pm\sqrt{\frac{2\alpha|x|}{\hat{\beta}}} \tag{16}$$

$\alpha=0$，つまり非粘性の場合，$\sqrt{\hat{\beta}}|x|\gg1$で$(\hat{\beta}x)^2\gg\sqrt{\hat{\beta}}\,y$の領域では，

$$u'(x,y)\simeq\sqrt{\hat{\beta}}(UR^2)\cos(\sqrt{\hat{\beta}}\,y)\cdot\frac{1}{|x|} \tag{17}$$

となる(Janowitz 1974)。(17)式と(15)式から，非粘性の場合，擾乱は$O(|x|^{-1})$で減衰し，エクマン粘性を考慮した場合は$O(|x|^{-\frac{3}{2}})$で減衰する。したがって，エクマン粘性を考慮した涌出しモデルでは放射条件が満足されている。

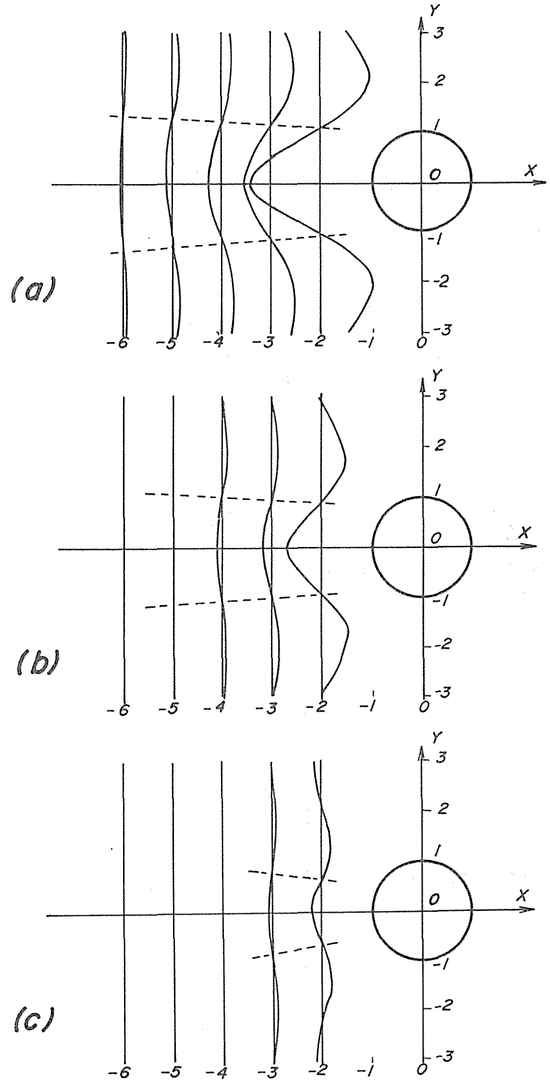

Fig. 4 Profiles of the x component velocity perturbation for eastward flow for a fixed $\hat{\beta}$ = 1.0 and varying α at upstream stations x=−2, −3, −4, −5, −6;
(a) α = 0.0, (b) α = 0.1, (c) α = 0.5

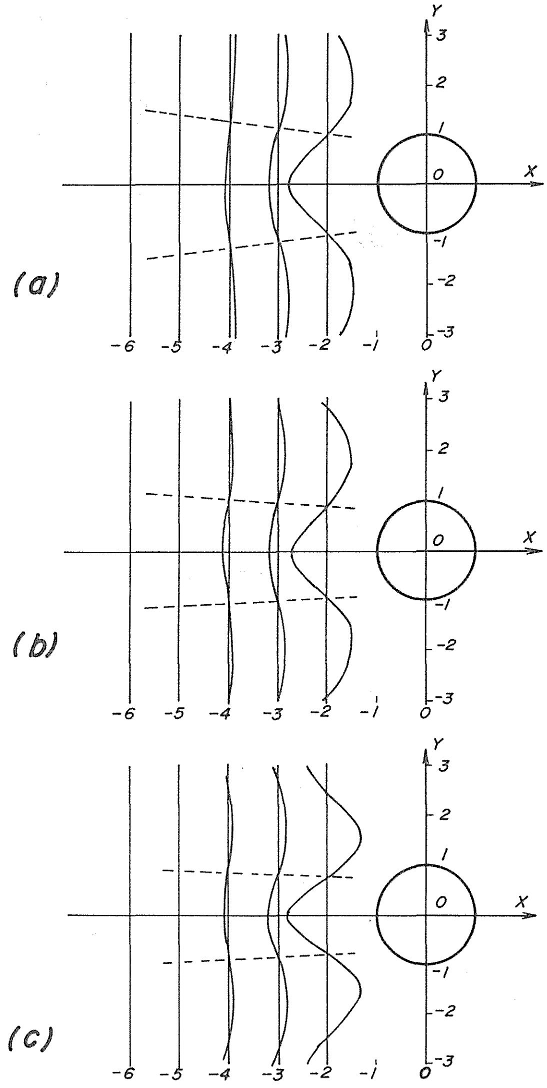

Fig. 5 Profiles of the x component velocity perturbation for eastward flow for a fixed α = 0.1 and varying $\hat{\beta}$ at upstream stations x=−2, −3, −4, −5, −6;
(a) $\hat{\beta}$ = 0.5, (b) $\hat{\beta}$ = 1.0, (c) $\hat{\beta}$ = 2.0

3.3 西向流

Fig. 6 は西向流の場合で，$\hat{\beta}=1.0$ と一定にし，α の値を大きくしていったときの流線図である。流れのパターンは東向流と異なり，波動的挙動を示さずポテンシャル流に似たパターンである。非粘性の場合の解(a)は上下流対称な解である（Fig. 7 (a)参照）。α の値を大きくしていくにしたがい上下流の非対称性が大きくなっていく。Fig. 7 は α を変化させたときのウェークの領域の擾乱の速度分布を図示したものである。$\hat{\beta}$ が一定（$\hat{\beta}=1.0$）の場合，二重涌点の近くでは α が大きいものほど強いウェークができる。しかし，遠方では α が大きいものほど急速に擾乱 u' は減衰する。Fig. 8 は $\alpha=0.1$ と固定し，$\hat{\beta}$ の値を大きくしていったときのウェークの様子を図示したものである。$\hat{\beta}$ の値が大きくなるにした

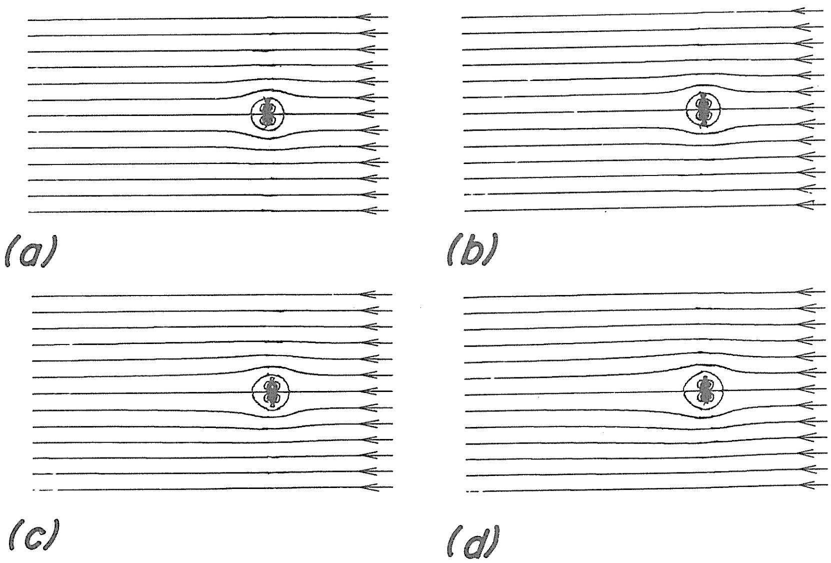

Fig. 6 Streamlines for westward flow for $\hat{\beta} = 1.0$ and varying α; (a) $\alpha = 0.0$, (b) $\alpha = 0.1$, (c) $\alpha = 0.5$, (d) $\alpha = 1.0$

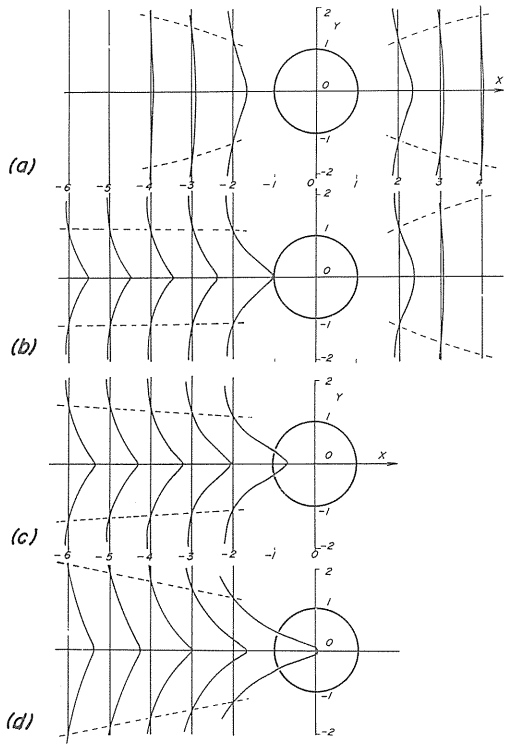

Fig. 7 Profiles of the x component velocity perturbation for westward flow for a fixed $\hat{\beta} = 1.0$ and varying α at stations x= −6, −5, −4, −3, −2, 2, 3, 4; (a) $\alpha = 0.0$, (b) $\alpha = 0.1$, (c) $\alpha = 0.189$, (d) $\alpha = 0.5$

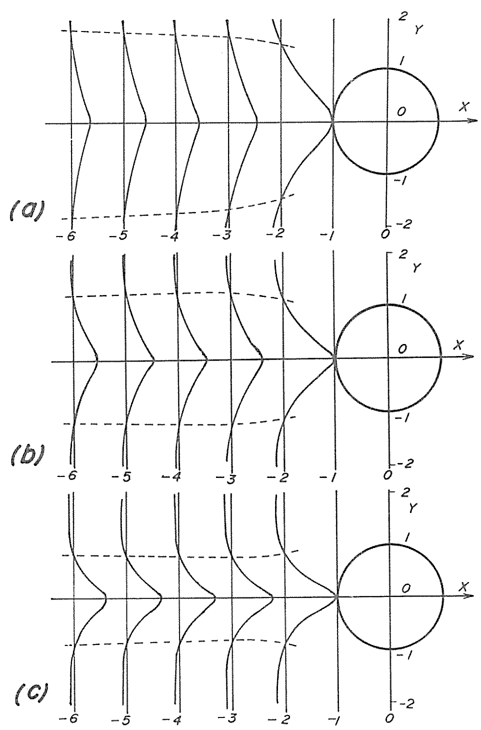

Fig. 8 Profiles of the x component velocity perturbation for westward flow for a fixed $\alpha = 0.1$ and varying $\hat{\beta}$ at downstream stations x=−2, −3, −4, −5, −6; (a) $\hat{\beta} = 0.5$, (b) $\hat{\beta} = 1.0$, (c) $\hat{\beta} = 2.0$

がい，強いウェークが遠方まで保たれる。ウェークの幅は，$\hat{\beta}$が大きくなるにしたがい，狭くなる。ここで，$|x| \gg \frac{1}{\alpha}$でのu'の漸近解を求めると，

$$u'(x,y) \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{2}(UR^2)\left(\frac{\hat{\beta}}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{|x|^{3/2}}\left(1-\frac{\hat{\beta}}{2\alpha|x|}y^2\right) \times \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{\hat{\beta}}{\alpha|x|}y^2\right] \quad (18)$$

となる。また(19)式から$u'(x, y)=0$となるyの値は，

$$y=\pm\sqrt{\frac{2\alpha|x|}{\hat{\beta}}} \quad (19)$$

である。Yamagata（1976 b）は，非粘性の場合にウェークの幅が$\hat{\beta}^{-\frac{1}{2}}$に比例することを示した。$|x| \gg \frac{1}{\alpha}$の漸近解(18)，(19)はFig. 7，8の$|x|<\frac{1}{\alpha}$の結果と同じ傾向の$\hat{\beta}$依存性を示している。

4. おわりに

準地衡流渦位方程式をオセーンタイプの方程式で近似し，円柱を二重涌点で置き換えたモデルを使用することによって，β面上の円柱まわりの流れにおけるエクマン粘性の効果を調べた。このモデルでは，非粘性の場合，放射条件を課した場合に比べて，振幅が大き目になるが，エクマン粘性を考慮すると放射条件を満足していることが解かった。東向流の場合，ロスビーリー波が発生するが，単一の涌点の場合と同様，エクマン粘性によって，二重涌点から$2/\alpha$の距離でその振幅が$1/e$に減衰する。前方ウェークは，エクマン粘性のため極度に弱くなる。西向流の場合，波動的挙動は示さず，ポテンシャル流に似た流れのパターンを示す。しかし，エクマン粘性を考慮すると上下流で非対称になることが解かった。ウェークの強さは，円柱の近傍ではエクマン粘性の大きい方が強い。一方，遠方では，エクマン粘性によって擾乱は極度に減衰する。ウェークの$\hat{\beta}$への依存性は，それが大きいほど強くなり，ウェークの幅は$\hat{\beta}^{-\frac{1}{2}}$に比例することが解かった。

この問題はダイポール渦が東西に移動する問題に類似し，西向流の非粘性の場合は準地衡流方程式の厳密解であるモドン解に匹敵している。

補　　足

(11)，(13)式の3次方程式の3根はつぎのようにして求めた。

i）東向流

$$a^3+\alpha a^2+(\hat{\beta}-K^2)a-\alpha K^2=0 \quad (\text{i}-1)$$

ここで，

$$p=(\hat{\beta}-K^2)-\frac{\alpha^2}{3}$$

$$q=\frac{1}{27}\left[2\alpha^3-9\alpha(\hat{\beta}+2K^2)\right]$$

とおく。

$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$が満足されるときのKの値を$\eta$とする。

$$\eta^2=\hat{\beta}+\frac{2}{3}\alpha^2+\left(\bar{D}+\bar{E}^{1/2}\right)^{1/3}+\left(\bar{D}-\bar{E}^{1/2}\right)^{1/3} \quad (\text{i}-2)$$

ここで，

$$\bar{D}=\frac{27}{8}\hat{\beta}^2\alpha^2+\frac{5}{2}\hat{\beta}\alpha^4-\frac{1}{27}\alpha^6$$

$$\bar{E}=\frac{729}{64}\hat{\beta}^4\alpha^4-\frac{81}{8}\hat{\beta}^3\alpha^6+3\hat{\beta}^2\alpha^8-\frac{8}{27}\hat{\beta}\alpha^{10}$$

$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$の場合（$K<\eta$）：1実根と2共役複素根をもつ

$$A_\pm=\left(-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)^{1/3}$$

とする。

$$\begin{cases} a_1=A_+ + A_- -\frac{\alpha}{3} \\ a_2=a_{2r}+i\,a_{2i} \\ a_3=a_{2r}-i\,a_{2i} \end{cases} \quad (\text{i}-3)$$

ここで，

$$\begin{cases} a_{2r}=-\frac{1}{2}(A_+ + A_-)-\frac{\alpha}{3} \\ a_{2i}=\frac{\sqrt{3}}{2}(A_+ - A_-) \end{cases}$$

$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$の場合（$K>\eta$）：3実根

$$\begin{cases} a_1=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\theta_1-\frac{\alpha}{3} \\ a_2=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\theta_1+\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{\alpha}{3} \\ a_3=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\theta_1+\frac{4\pi}{3}\right)-\frac{\alpha}{3} \end{cases} \quad (\text{i}-4)$$

ここで，$\theta_1=\frac{1}{3}\cos^{-1}(3\sqrt{3}\cdot q/2p\sqrt{-p})$

$(0<\theta_1<\frac{\pi}{6})$

$\alpha \ll 1$の場合

$K<\hat{\beta}$

$$\begin{cases} a_1=\dfrac{\alpha K^2}{\hat{\beta}-K^2} \\ a_2=-\dfrac{\alpha\hat{\beta}}{2(\hat{\beta}-K^2)}+i\sqrt{\hat{\beta}-K^2} \\ a_3=-\dfrac{\alpha\hat{\beta}}{2(\hat{\beta}-K^2)}-i\sqrt{\hat{\beta}-K^2} \end{cases} \qquad (\text{i}-5)$$

$K>\beta$

$$\begin{cases} a_1=\sqrt{K^2-\hat{\beta}}+\dfrac{\alpha\hat{\beta}}{2(K^2-\hat{\beta})} \\ a_2=-\sqrt{K^2-\hat{\beta}}+\dfrac{\alpha\hat{\beta}}{2(K^2-\hat{\beta})} \\ a_3=-\dfrac{\alpha K^2}{K^2-\hat{\beta}} \end{cases} \qquad (\text{i}-6)$$

ⅱ）西向流

$$a^3-\alpha a^2-(\hat{\beta}+K^2)a+\alpha K^2=0 \qquad (\text{ii}-1)$$

ここで，

$$\begin{cases} p=-(\hat{\beta}+K^2)-\dfrac{\alpha^2}{3} \\ q=-\dfrac{1}{27}\left[2\alpha^3+9\alpha(\hat{\beta}-2K^2)\right] \end{cases}$$

とおく。この場合，常に$\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}<0$で，3実根のみをもつ。

$$\begin{cases} a_1=2\sqrt{-\dfrac{p}{3}}\cos\left(\theta_2+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\dfrac{\alpha}{3} \\ a_2=2\sqrt{-\dfrac{p}{3}}\cos\theta_2+\dfrac{\alpha}{3} \\ a_3=2\sqrt{-\dfrac{p}{3}}\cos\left(\theta_2+\dfrac{4\pi}{3}\right)+\dfrac{\alpha}{3} \end{cases} \qquad (\text{ii}-2)$$

ここで，$\theta_2=\dfrac{1}{3}\cos^{-1}(3\sqrt{3}\cdot q/2p\sqrt{-p})$，$(0<\theta_2<\dfrac{\pi}{6})$

$\alpha\ll 1$の場合

$$\begin{cases} p=-(\hat{\beta}+K^2) \\ q=-\dfrac{\alpha}{3}(\hat{\beta}-2K^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1=-\sqrt{\hat{\beta}+K^2}+\dfrac{\alpha\hat{\beta}}{2(\hat{\beta}+k^2)} \\ a_2=\sqrt{\hat{\beta}+K^2}+\dfrac{\alpha\hat{\beta}}{2(\hat{\beta}+K^2)} \\ a_3=\dfrac{\alpha K^2}{\hat{\beta}+K^2} \end{cases} \qquad (\text{ii}-3)$$

参　考　文　献

(1) Janowitz, G. S., J. Fluid Mech, 33(1968), 417−432

(2) Janowitz, G. S., J. Fluid Mech, 66(1974), 455−464

(3) Long, R. R., J. Meteor, 9(1952), 187−199

(4) McCartney, M. S., Polymode news, 10 (1976), 2−5

(5) Miles, J. W., J. Fluid Mech, 33(1968), 803−814

(6) Stevenson, J. W. and Janowitz, G. S., Dyn. Atmos. Oceans, 1(1977), 225−239

(7) Yamagata, T., G. F. D. Woods Hole Oceanographic Institution, Ref. No.76−81(1976a), 199−212

(8) Yamagata, T., J. Oceanogr. Soc. Japan, 32(1976b), 116−127