単位区間上の微分。I

芳賀義則*

（昭和61年9月8日受理）

Derivations on the Unit Interval. I

Yoshinori HAGA*

Abstract — The theory of closed derivations on the unit interval I has been investigated by several authors and the structure of the closed derivations was made clear almost completely. In their theory, however, ranges of the derivations are required to be contained in C(I), the algebra of all continuous functions on I. In the present note we begin to deal with closed derivations defined in C(I) and having ranges in M(I), the Banach space of Radon measures on I.

1. C^*環A上の微分とは定義域$D(\delta)$がAの稠密な部分環であるような線形作用素δ：A→Aであってすべてのα，$\beta \in D(\delta)$に対して微分律

$$\delta(\alpha\beta)=\delta(\alpha)\beta+\alpha\,\delta(\beta)$$

を満たすものをいう。さらに$\alpha \in D(\delta)$ならば$\alpha^* \in D(\delta)$でかつ$\delta(\alpha^*)=\delta(\alpha)^*$が成り立つならば$\delta$を＊微分という。この＊微分の理論は物理系の時間的発展を記述するC^*力学系との関連により活発な研究が行われているが，これを特殊な可環C^*環である単位区間I＝〔0，1〕上の連続関数全体の環C(I)の場合について考えれば，微分は通常のいわゆる導関数を求める微分作用素$\dfrac{d}{dt}$の一般化とみなすことができる。$\dfrac{d}{dt}$は定義域を連続微分可能関数の全体$C^1(I)$とすればC(I)→C(I)の微分だからであり，この状況はLebesgue測度の一般化として測度論を展開できることと丁度対応しているものと考えられよう。$\dfrac{d}{dt}$は線形作用素として連続ではないが閉作用素ではある。そしてその一般化としてのC(I)→C(I)の閉微分の構造はほぼ完全に解明されている(〔1〕,〔2〕,〔4〕,〔5〕,〔6〕)。

しかしながら一方C(I)の関数は至るところ微分可能であってもその導関数が連続とは限らない。すなわち$\dfrac{d}{dt}$は定義域を$C^1(I)$に限らなければその値域はC(I)の中にはおさまらない。また連続関数は超関数の意味では常に微分可能であるがその導超関数も連続関数とは限らない。もちろん超関数の間には一般に乗法が定義されないから微分律は意味を持たず，従ってこの場合の$\dfrac{d}{dt}$は微分ではない。そこで，微分律が意味を持つ範囲で微分の値域をC(I)よりは広くとって微分の理論を考察して見よう。取りあえずは基礎的な部分を調べて見ることにして，まず微分の値域をどこに取ったら良いかを考える。

超関数の乗法については〔3〕や〔8〕の第5章等に述べられている。それによればαが無限回微分可能な関数ならば任意の超関数βに対して積$\alpha\beta$は意味を持ちしかも微分律が成り立つ。微分律が成り立つことを前提とすれば，大雑把にいってαが不正則ならば不正則なほどそれに応じてβの方が正則でなければ積$\alpha\beta$は定義できない。そして$\alpha \in C(I)$のときに積が定義できるのはβがI上の測度の場合である。そこでいまI上のRadon測度全体，すなわち一様収束ノルムをもつBanach空間C(I)上の連続線形

＊茨城大学工学部共通講座応用数学（日立市中成沢町）
Common Chairs (Applied Mathematics), Faculty of Engineering, Ibaraki University, Hitachi 316, Japan

汎関数の全体をM(I)とする。M(I)はノルム $\|\mu\|=\sup\{|\mu(\varphi)|:\|\varphi\|=1\}$ でBanach空間であり $\alpha\in C(I)$ と $\mu\in M(I)$ との積 $\alpha\mu\in M(I)$ を

$$(\alpha\mu)(\varphi)=\mu(\alpha\varphi)$$
$$=\int\alpha(t)\varphi(t)\mu(dt)\quad(\varphi\in C(I))$$

によって定義すれば，M(I)は環C(I)上の加群である。従って線形写像 $\delta:C(I)\to M(I)$ について微分律

$$\delta(\alpha\beta)=\beta\delta(\alpha)+\alpha\delta(\beta)\quad(\alpha\beta\in C(I))$$

はM(I)における等式として意味を持つ。一般には C^* 環AからA－加群への線形写像について微分律が考えられるわけである。以下このような δ を **I上の微分**あるいは **C(I)での微分**とよび，その値域は常にM(I)に含まれるものとする。また簡単のためにC(I)の元はすべて実数値関数，M(I)の元は実測度とするがこのことによって一般性が失われることはない。なお周知のようにM(I)は $(0,1]$ で右連続かつ $f(0)=0$ なる有界変動関数 f 全体の空間と同一視できる。また定数関数1は定義域 $D(\delta)$ に属するとしてよく，そのとき微分律により $\delta(1)=0$ である。もちろんIをコンパクト空間や局所コンパクト空間に変えても同様の議論は可能である。ただ従来の微分とは異なって2階微分 δ^2 は定義されない。

2. 上に述べたような微分の典型的な例を述べよう。

単位区間 $I=[0,1]$ 上の連続な有界変動関数の全体をCV(I)で表せばこれはC(I)の稠密な部分空間であって $C^1(I)$ を含む。$\alpha\in CV(I)$ に対しそのStieltjes測度 $d\alpha\in M(I)$ とは

$$d\alpha([a,b])=\alpha(b)-\alpha(a)\quad([a,b]\subset I)$$

によって生成される測度である。そのノルムは α の全変動 $V(\alpha)$ に等しい：$\|d\alpha\|=V(\alpha)$。

α にこの測度 $d\alpha$ を対応させる作用素 $d:C(I)\to M(I)$ は線形である。そして $\alpha,\beta\in CV(I)$ ならば $\alpha\beta\in CV(I)$ であって，任意の $\varphi\in C(I)$ に対して

$$\int\varphi(t)d(\alpha\beta)=\lim\Sigma\varphi(t_j)[\alpha\beta(t_j)-\alpha\beta(t_{j-1})]$$
$$=\lim\Sigma\varphi(t_j)[\{\alpha(t_j)-\alpha(t_{j-1})\}\beta(t_j)$$
$$+\alpha(t_{j-1})\{\beta(t_j)-\beta(t_{j-1})\}]$$
$$=\lim\Sigma\varphi(t_j)\beta(t_j)[\alpha(t_j)-\alpha(t_{j-1})]$$
$$+\lim\Sigma\varphi(t_j)\alpha(t_{j-1})[\beta(t_j)-\beta(t_{j-1})]$$
$$=\int\varphi(t)\beta(t)\,d\alpha+\int\varphi(t)\alpha(t)\,d\beta$$
$$=\int\varphi(t)(\beta d\alpha+\alpha d\beta)$$

であるから

$$d(\alpha\beta)=\beta d\alpha+\alpha d\beta$$

である。従って定義域を $D(d)=CV(I)$ として d はC(I)での微分である。なお超関数の導超関数が測度であるためにはその超関数が有限区間において有界変動であることが必要十分である（[8] §2.4 定理2）ことを注意しておこう。

つぎにこの d は閉微分であることを示そう。$\alpha_n\in CV(I)$，$\alpha_n\to\alpha$（一様），$d\alpha_n\to\mu\in M(I)$ とする。n を十分大きくとれば $\|d\alpha_n-\mu\|\leqq1$ だから

$$V(\alpha_n)=\|d\alpha_n\|\leqq\|\mu\|+1$$

よって極限関数 α についても

$$V(\alpha)=\lim V(\alpha_n)\leqq\|\mu\|+1$$

となるからまず $\alpha\in CV(I)$ が分かった。また任意の $\varphi\in C(I)$ は一様連続であるから与えられた $\varepsilon>0$ に対してIを $0=t_0<t_1<\cdots\cdots<t_n=1$ で分割し，各小区間 $[t_{j-1},t_j]$ の中の t，s に対しては $|\varphi(t)-\varphi(s)|<\varepsilon$ となるようにでき，このとき任意のStieltjes測度 $d\alpha$ について

$$\left|\int\varphi(t)\,d\alpha-\Sigma\varphi(t_j)[\alpha(t_j)-\alpha(t_{j-1})]\right|$$
$$\leqq\varepsilon V(\alpha)$$

となる（[7] 第2章§4.2）。α_n,α に対するこの不等式と，十分大きな n に対しては

$$|\Sigma\varphi(t_j)[\alpha(t_j)-\alpha(t_{j-1})]$$
$$-\Sigma\varphi(t_j)[\alpha_n(t_j)-\alpha_n(t_{j-1})]|<\varepsilon$$

となることから

$$\left|\int\varphi(t)\,d\alpha-\int\varphi(t)\,d\alpha_n\right|\leqq\varepsilon[V(\alpha)+V(\alpha_n)+1]$$
$$\leqq\varepsilon[2\|\mu\|+3]$$

となる。よって

$$\lim \int \varphi(\mathrm{t})\, d\alpha_{\mathrm{n}} = \int \varphi(\mathrm{t})\, d\alpha$$

すなわち$\mu = \lim d\alpha_{\mathrm{n}} = d\alpha$となるから$d$は閉微分である。

この閉微分dが我々の典型的な例であって，この場合$\alpha \in \mathrm{C(I)}$が連続だから$d\alpha$も連続測度である。$\alpha \in \mathrm{C^1(I)}$なら$d\alpha = \alpha'(t)\,dt$であり，$d$は$\mathrm{C^1(I)}$を定義域とする微分$\dfrac{d}{dt}$：C(I)→C(I)の閉拡張と見てよい。ただし値域はM(I)である。従って例えば（一般化された）Cantor 関数（〔2〕,〔6〕）$\gamma(\mathrm{t})$に対してはほとんど至るところ$\dfrac{d\gamma}{dt} = 0$であるから値域をC(I)と限れば閉拡張についても当然$\dfrac{d\gamma}{dt}$は恒等的に0とせざるを得ないが，M(I)を値域とする微分dに対しては$d\gamma$の全測度は$\| d\gamma \| = \gamma(1) - \gamma(0) = 1$であって$d\gamma$は（一般）Cantor 集合を台とする連続特異測度である

またほとんど至るところで微係数が0になる狭義単調な連続関数（〔9〕§24）については，$\dfrac{d}{dt}$の閉拡張においては一応同じ理由で微分の値を0とすることになるが，Stone−Weierstrass の定理によればその関数と1とでC(I)の稠密な部分環を生成するからそのときは$\dfrac{d}{dt}$が自明な微分0ということになってしまう。よって実際にはそのような関数は$\dfrac{d}{dt}$の閉拡張の定義域には入り得ない。一方閉微分d：C(I)→M(I)に対してはそのような関数の微分の値は台がI全体の連続特異測度ということになる。

3. 閉微分の性質について〔6〕に倣って考察を進めよう。

定理 1.　（〔6〕1.2.2）　δ：C(I)→M(I)を閉微分としfを実数直線R上の連続微分可能関数とすれば，$\alpha \in \mathrm{D}(\delta)$に対して合成関数$f(\alpha)$はまた$\mathrm{D}(\delta)$に属し$\delta(f(\alpha)) = f'(\alpha)\,\delta(\alpha)$である。

証明．fが多項式のときは微分律によって明らかである。一般の$f \in \mathrm{C^1(R)}$に対しては$\alpha(\mathrm{I})$が有限区間に含まれるが，その区間でf，f'をそれぞれp_n，p_n'で一様近似するような多項式の列$\{p_n\}$が存在するから，δが閉であることによってp_nの極限fについても定理は成り立つ。

δ：C(I)→M(I)が閉微分ならば定義域$\mathrm{D}(\delta)$はノルム$\|\alpha\|_\delta = \|\alpha\| + \mathrm{V}(\alpha)$に関してBanach 環になる。上の定理を用いると〔6〕と同様にして次の結果が得られる。

定理 2.　（〔6〕1.2.3，1.1.3）　δ：C(I)→M(I)を閉微分とすれば$\{\mathrm{D}(\delta), \|\alpha\|_\delta\}$はI上のSilov環である。すなわちIの閉集合Fと$t_0 \in \mathrm{F}^c$に対して$\alpha \mid \mathrm{F} = 0$，$\alpha(\mathrm{t}_0) = 1$となる$\alpha \in \mathrm{D}(\delta)$が存在する。従ってまたIの互いに素な2つの閉集合E，Fに対して$\alpha \mid \mathrm{E} = 1$かつ$\mathrm{supp}\,\alpha \subset \mathrm{U} = \mathrm{F}^c$，$0 \leqq \alpha \leqq 1$となる$\alpha \in \mathrm{D}(\delta)$が存在する。

定理 3.　（〔6〕1.2.4）　δ：C(I)→M(I)を閉微分とし$\alpha \in \mathrm{D}(\delta)$がIの開集合U上で定数値をとるならば$\delta(\alpha)$はU上の測度として0である。

証明．まずU上で常に$\alpha(t) = 0$であるとき任意の閉区間$\mathrm{F} \subset \mathrm{U}$に対し上の定理から$\beta \mid \mathrm{U}^c = 1$，$\beta \mid \mathrm{F} = 0$となる$\beta \in \mathrm{D}(\delta)$が存在する。このとき$\alpha = \alpha\beta$であるから，Fの特性関数を$\chi_{\mathrm{F}}$として

$$\begin{aligned}\delta(\alpha)(\mathrm{F}) &= \delta(\alpha\beta)(\mathrm{F}) \\ &= (\beta\,\delta\alpha)(\mathrm{F}) + (\alpha\,\delta\beta)(\mathrm{F}) \\ &= \int \chi_{\mathrm{F}}(t)\beta(t)\,\delta\alpha + \int \chi_{\mathrm{F}}(t)\alpha(t)\,\delta\beta = 0.\end{aligned}$$

U上で$\alpha = k$（定数）のときはU上で$\alpha - k1 = 0$であるから今示したことから

$$\begin{aligned}\delta(\alpha)(\mathrm{F}) &= \delta(\alpha)(\mathrm{F}) - k\delta(1)(\mathrm{F}) \\ &= \delta(\alpha - k1)(\mathrm{F}) = 0.\end{aligned}$$

dは2.で述べた閉微分とする。$\mathrm{D}(d) = \mathrm{CV(I)} \supset \mathrm{C^1(I)}$であり，$\alpha \in \mathrm{C^1(I)}$ならば$d\alpha$は$\int \varphi(t)\,d\alpha = \int \varphi(t)\,\alpha'(t)\,dt$によって連続関数$\dfrac{d\alpha}{dt} = \alpha'(t)$と同一視してよい。

定理 4. ((6) 2.1.1) δ : C(I)→M(I)を閉微分 D(δ) ⊃C^1(I)とすると δ はC^1(I)上の微分 $\mu\dfrac{d}{dt}$ の拡張である。

ただし$\mu\in$M(I).

証明. $\alpha\in C^1(I)$に対し多項式の列 $\{p_n\}$ で $p_n(t), p_n'(t)$ がそれぞれ$\alpha(t)$, $\alpha'(t)$に一様に収束するものがある。xを関数 $x(t)=t$ とすると定理1により $\delta(p_n)=p_n'\delta(x)\to\alpha'\delta(x)$となる。$\delta$が閉だから $\delta(\alpha)=\alpha'\delta(x)$. 従って, $\mu=\delta(x)$とすればよい。

この定理によって閉微分の例を構成できる。例えば$\delta(x)$が $a\in$ I におけるDirac測度 εa であれば $\delta(\alpha)=\alpha'\varepsilon a$ である。すなわち$\varphi\in$C(I)に対して

$$(\delta\alpha)(\varphi)=\varepsilon a(\varphi\alpha')=\varphi(a)\alpha'(a)$$

このように$\mu\in$M(I)の選び方によってC^1(I)を定義域とする閉微分の例は得られるがその閉拡張の具体的な構成は$\dfrac{d}{dt}$の拡張に依存することになり明らかではない。2で述べた閉微分 d は $\mu=dt$ の場合の1つの拡張である。

定理 5. ((6) 2.1.2) δ_0が閉微分で $f\in$ C(I)が I 上で0になることがなければ $\delta=f\delta_0$ は閉微分である。よって特に fd は閉微分である。

証明. $\alpha_n\in D(\delta)=D(\delta_0)$ で $\|\alpha_n-\alpha\|\to 0$, $\delta\alpha_n\to\mu\in$M(I)とする。$f(t)\neq 0$ だから $\delta_0\alpha_n=\dfrac{\delta\alpha_n}{f}\to\dfrac{1}{f}\mu$. ところが$\delta_0$は閉だから $\alpha\in D(\delta_0)=D(\delta)$であって$\delta_0\alpha=\dfrac{1}{f}\mu$, よって $\delta\alpha=f\delta_0\alpha=\mu$

以上のように〔6〕と類似の議論ができるところは多い。しかしまだ閉微分の構造を調べる段階にまでは到っていない。例えばIの閉部分区間Eに対して定理3により $\delta_E(\alpha|E)=(\delta\alpha)|E$によってC(E)上の微分が定義されその定義域は$D(\delta_E)=\{\alpha|E : \alpha\in D(\delta)\}$であるが, δが閉のとき δ_E は閉であろうか。また標準的な閉微分 d の閉拡張はどんなものだろうか。そもそも d の閉拡張は存在するであろうか。C(I)→C(I)の閉微分 δ については閉拡張の無限鎖が存在する((6) 3.2.5)がそれは一般Cantor 関数を δ の核に加えるものである。ところがC(I)→M(I)の閉微分 d においては一般Cantor 関数はすでにすべて D(d)=CV(I)に含まれてしまっていてそれを利用して拡張する方法は無効である。従って d の閉拡張の存在は自明ではない。あるいはまた定義域がC(I)全体である微分が0だけであるかどうかも目下のところ不明である。

参 考 文 献

(1) C.J.K. Batty : Derivations of compact spaces, Proc. London Math. Soc., 42 (1981), 299−330.

(2) F. M. Goodman : Closed derivations in commutative C^*−algebras, J. Funct. Anal., 39 (1980), 308−346.

(3) H. König : Multiplikationen von Distributionen, Math. Annalen, 128 (1955), 420−452.

(4) H. Kurose : Closed derivations in C(I), Tohoku Math. J., 35 (1983), 341−347.

(5) ……… : On a closed derivation in C(I), Mem Fac. Sci. Kyushu Univ., Series A, 36 (1982), 193−198.

(6) J. Tomiyama, The theory of closed derivations in the algebra of continuous functions on the unit interval, Lecture at National Tsing Hua Univ., Taiwan (1983)

(7) シーロフ・グーレヴィチ：積分・測度・導函数, 東京図書, (1968)

(8) シュワルツ：超函数の理論 (原書第3版), 岩波, (1971)

(9) リース・ナジー：関数解析学 上, 共立出版, (1973)