

# 簡便な非線形 $n$ 階常微分方程式の一数值計算法

東 貞 男\*, 滑 川 英 世\*\*

(1973年9月11日受理)

## A Simple Numerical Calculation Method for Solving Nonlinear Ordinary Differential Equations of Order $n$

Sadao AZUMA and Hideyo NAMEKAWA

**Abstract:** — In this paper, a simple numerical calculation method is discussed for solving nonlinear ordinary differential equations of order  $n$  for initial value problems.

The new method is compared with Euler's and Runge-Kutta's method which are currently used about their accuracy and computing time required. A computing time can be reduced without loss of accuracy by choosing a suitable step size in applying it.

The results clarified that the method is useful for solving transient analysis problems which may be described by nonlinear differential equations in engineering and the physical sciences.

### 1. はじめに

通常の物理系は、そのシステム・ダイナミックスが非線形の常微分方程式として記述される場合が多く、安定問題を除いた非線形系の動的挙動の明確な把握や解析の仕方に、困難を伴うのが普通である。

工学上の解析問題では、不可欠ではあるがあるきまりきった計算手順といった事柄は迅速かつ簡便に処理されるのが望ましく、実際上限定された誤差の範囲内での解法がしばしば行なわれている。事実、非線形微分方程式の解法としては近似図式的な解析によるか、逐次差分形式の数値解析にたよるほかはなく、デジタル・コンピュータによる数値計算においてもプログラミングにかなりの労力を必要とするのが現状である。

\* 茨城大学工業短期大学部電子工学科 (日立市中成沢町)

\*\*茨城大学工学部情報工学科 (日立市中成沢町)

ここでは、非線形  $n$  階常微分方程式の求解を位相面法の拡張から状態軌道、すなわち積分曲線の算出に帰着させている。このことは、積分回数を 1 回減らすことを意味し、計算を単純化している。本数値計算法によれば位相的性質と同時に状況点に時刻も与えられるので、ただちに方程式の数値解が得られる。

### 2. 位相面法の拡張による数値計算法

変数を  $x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}$  (ただし、 $\cdot$  は  $d/dt$  を表わし、以下本論文を通して同じ) の状態量ならびに時刻  $t$  であるとし、実空間  $\{t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}\}$  の領域で連続な実数値関数  $F$  を考える。ただし、 $F$  は変数  $t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}$  についての非線形関数とする。このとき、 $n$  次の非線形系を記述する方程式はつぎのように表現できる。

$$x^{(n)} + F[t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}] = 0 \dots\dots\dots (1)$$

通常、式 (1) の解は無数に存在する。したがって、ここでは解の一意性が与えられたものとしてその初期値問題をとりあげ、 $x(0+), \dot{x}(0+), \dots, x^{(n-1)}(0+)$  を満足する解を求めることにする。

ここで、式 (1) の表現を簡単な一階微分方程式の組として整理する目的で各状態量を  $x_1=x, x_2=\dot{x}, x_3=\ddot{x}, \dots$  のような状態変数に置き換えて normal form で表わせば

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_j &= x_{j+1} \quad (j = 1, 2, \dots, n-1) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= -F[t, x_1, x_2, \dots, x_n] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

と書ける。

与式が線形となるときは、一般にラプラス変換を経由してシステム全体の推移行列を求め、しかるのちに最終的な解を得ているが、本論文ではそれらの線形微分方程式をも含めて式 (2) の状態方程式から直接的に数値解を求める方法を示す。

#### 2.1 $\dot{x}_n = -F[t, x_1, x_2, \dots, x_n]$ の数値計算

$\dot{x}_{n-1} = x_n$  の関係を整理すれば、位相面  $\{x_{n-1}, x_n\}$  上のすべての状況点を満足する次式を得る。

$$\frac{dx_n}{dx_{n-1}} = \frac{\dot{x}_n}{x_n} \dots\dots\dots (3)$$

さらに、状態軌道上任意の状況点を  $P_k$  とすれば、この近傍における  $\delta_k = (\dot{x}_n)_k + (x_{n-1})_k$  の値は一定であると仮定できるので、上式を变形して積分すれば

$$(x_n)^2_k + \{(x_{n-1})_k - \delta_k\}^2 = R_k^2 \dots\dots\dots (4)$$

ただし、 $R_k$  は積分定数

を得る。式 (4) は位相面  $x_n$  軸上に中心をもつ半径  $R_k$  の円の方方程式を表わし、この原理にしたがえば状態軌道の増分を微小円弧で近似することが可能となる。そこで、初期の状況点  $P_k$  の値  $(x_{n-1})_k, (x_n)_k$ 、時間区分  $\Delta t$  が与えられたものとして対応する軌道増分の終点  $P_{k+1}$  の座標を導けば

$$\left. \begin{aligned} (x_n)_{k+1} &= \lambda_2(x_{n-1})_k + \lambda_1(\dot{x}_n)_k \\ (x_{n-1})_{k+1} &= \lambda_1(x_n)_k + (x_{n-1})_k + \lambda_3(\dot{x}_n)_k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここで,  $(\dot{x}_n)_k = -F[t, (x_1)_k, (x_2)_k, \dots, (x_n)_k]$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sin \Delta t \\ \lambda_2 &= \cos \Delta t \\ \lambda_3 &= 1 - \lambda_2 \\ &(k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

である。

### 2.2 $\dot{x}_j = x_{j+1}$ の数値計算

本節表題に示すような方程式の数値解を求める場合に限り、位相面  $\{x_j, x_{j+1}\}$  上の状態軌道増分に時間区分  $\Delta t$  を対応させるのに Canningham の手法を適用することにする。状態軌道上の任意の状況点  $P_k$  の座標が与えられ、時間区分  $\Delta t$  が経過した次の状況点  $P_{k+1}$  の座標が図 1 のようなとき、図から

$$\tau = \frac{(x_{j+1})_{k+1} + (x_{j+1})_k}{(x_j)_{k+1} - (x_j)_k} \dots\dots\dots (6)$$

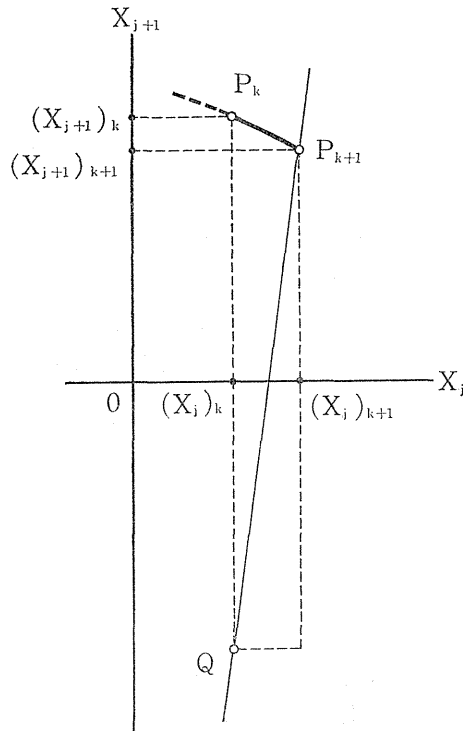


Fig. 1 The phase-plane trajectory and the isochronal line.

ただし、 $\tau=2/\Delta t$

の関係が導かれる。上式を変形すれば

$$(x_{j+1})_{k+1} = \tau(x_j)_{k+1} - \{\tau(x_j)_k + (x_{j+1})_k\} \dots\dots\dots (7)$$

となって与えられた初期の状況点  $P_k$  の  $x_j$  軸に関する対称点  $Q$  を通る傾斜  $\tau$  の直線を表わすことになる。この直線を等時間直線と呼ぶことにし、これによって切り取られた状態軌道の微少部分  $P_k P_{k+1}$  の経過時間は  $\Delta t$  となることがわかる。そこで、 $(x_{j+1})_{k+1}$  はすでに前の位相面上で求められていて、状況点  $P_k$  の値  $(x_j)_k$ 、 $(x_{j+1})_k$  も位相面  $\{x_j, x_{j+1}\}$  上に与えられていることになる。したがって、所望の状況点  $P_{k+1}$  の  $x_j$  軸上の値は

$$(x_j)_{k+1} = (x_j)_k + \frac{(x_{j+1})_k + (x_{j+1})_{k+1}}{\tau} \dots\dots\dots (8)$$

として導かれる。式(8)は数値積分におけるシンプソン法にほかならず、最も単純な形での計算法となる。

### 3. 非線形 $n$ 階常微分方程式の数値計算法

$n$  階微分方程式の求解にあたって、計算式の運用はまず式(5)、つぎに式(7)の  $n-1$  回使用による。そして、所望の状態軌道は上記の逐次計算の結果として得られることになる。

工学的なシステム解析問題の取り扱いにあたって、状態変数の決め方にはシステムの特性等を勘案して解析者の意図が入ってくると、異なる状態方程式のかたちが出てくると考えられる。ここで、任意の場合に適応した数値計算法を見出すために代表的な二・三の例について考察を加える。

3.1 上述したように、与えられた非線形  $n$  階常微分方程式に対する状態変数の選び方は一義的ではない。いま

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= -F_j[t, x_1, x_2, \dots, x_n] \dots\dots\dots (9) \\ &(j=1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

の  $n$  組の一階微分方程式として整理されるとき、数値計算は式(5)の繰り返し使用によって行われ、この場合はごく簡単な逐次計算の過程をとることになる。

3.2 さらに、状態方程式の中に  $\dot{x}_j = -G_j[t, x_j]$  なる非線形の常微分方程式が入ってくる

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \vdots & \\ \dot{x}_j &= -G_j[t, x_j] \\ \vdots & \\ \dot{x}_n &= -F[t, x_1, x_2, \dots, x_n] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

$x_{j+1}$  軸上  $(x_{j+1})_{k+1}$  の値はすでに前の位相面上で求められていて、以前の状況点  $(x_j)_k$ 、 $(x_{j+1})_k$  の値も位相面  $\{x_j, x_{j+1}\}$  上に規定されているものとすれば、求める  $x_j$  軸上の値は

$$(x_j)_{k+1} = (x_j)_k - \frac{G_j[t_k, (x_{j+1})_k] + G_j[t_{k+1}, (x_{j+1})_{k+1}]}{\tau} \dots\dots\dots (11)$$

ただし,  $t_{k+1} = t_k + \Delta t$

によって計算される。

### 3.3 非線形の常微分方程式が

$$x^{(n)} + F[t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}, y, \dot{y}, \dots, y^{(m)}] = 0$$

ただし,  $(m < n)$

のかたちをとる場合は, 各状態量を  $x_1 = \dot{x}, x_2 = x, x_3 = \ddot{x}, \dots, y_1 = y, y_2 = \dot{y}, y_3 = \ddot{y}, \dots$  の状態変数に置き換え normal form で表わせは

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_j &= x_{j+1} \quad (j=1, 2, \dots, n-1) \\ \vdots \\ \dot{x}_n &= -F[t, x_1, x_2, \dots, x_m, y_m] \\ \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_3 \\ \vdots \\ \dot{y}_i &= y_{i+1} \\ \vdots \\ \dot{y}_m &= H[t, y_1, y_2, \dots, y_m] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

となる。ここで,  $y$  は入力変数を表わし,  $y_1$  を与えて  $y_m$  までの状態変数を規定するには次の計算式による。

$$(y_{i+1})_{k+1} = -(y_{i+1})_k + \frac{(y_i)_k - (y_i)_{k+1}}{\tau} \dots \dots \dots (14)$$

ただし, 添字  $i$  は状態変数の number で  $i=1, 2, \dots, m$  をとり, 添字の  $k$  は時間区分  $\Delta t$  ごとの繰り返し回数を表わし,  $k=0, 1, 2, \dots$ , である。

この場合, 数値計算にあたっての式の運用は, 対応する  $\Delta t$  について式 (14) を  $m-1$  回使用し, さらに式 (13) の最終段の  $y_m$  を求めて, 式 (13) の第  $n$  式に相当する計算を式 (5) によって行い, そして式 (7) の  $n-1$  回使用であり, 所望の状態軌道は上記の逐次計算の結果として与えられる。

### 4. オイラー法, ルンゲ・クッタ法との比較検討

数値計算法を評価する際に, 問題となる点はいくつか考えられるが, ここでは厳密解との絶対誤差と, 実際にデジタル・コンピュータにて数値解を求める場合に要する時間を取りあげる。

1 ステップあたりの計算精度をあげるためには, ステップ幅である時間の刻み幅  $\Delta t$  を小さくすれば達成されるが, それによるステップ回数の増大は免れず, 計算時間は長くなってしまふ。

工学上の解析問題のようにそれ程高い精度は要求されず, むしろ計算時間の短縮が要求される場合, 適切なステップ幅にて支障のない程度の計算精度が確保でき, また迅速に数値解の得られる本数値計算法は最適であろう。本計算法がこのような目的に対して非常に

有益であることを示すためにいくつかの例についてオイラー法とルンゲ・クッタ法との比較を行ってみた。

まず、計算時間であるがファン・デル・ポールの方程式  $\ddot{z} + 4(x^2 - 1)\dot{z} + x = 0$  ( $x = 0.75$ ,  $\dot{z} = 0$  at  $t = 0$ ) について、それぞれの計算法によるプログラム例とそのプログラムのコンパイル時間、計算時間を表1に示す。これによるとコンパイル時間はほぼ同じで、計算時間に関しては本計算法とオイラー法とは同程度であるが、計算精度はオイラー法よりすぐれている。ルンゲ・クッタ法は1ステップあたりの計算回数が多いので、かなり時間を要していることがわかる。

Table 1. Comparison of compiling and computing time of Van der Pol's equation by three methods.

```

C      VAN DER POL'S EQUATION (EULER'S METHOD)
0001  DIMENSION TSEC(501),X(501),XD(501)
0002  F(Z,ZD)=-4.*(Z*Z-1.)*ZD-Z
0003  DELT=0.05
0004  TSEC(1)=0.
0005  X(1)=0.75
0006  XD(1)=0.
0007  N=1
0008  10 XD(N+1)=XD(N)+DELT*F(X(N),XD(N))
0009     X(N+1)=X(N)+DELT*(XD(N+1)+XD(N))/2.
0010     TSEC(N+1)=TSEC(N)+DELT
0011     N=N+1
0012     IF(N.LE.500)Gθ Tθ 10
0013     STOP
0014     END
0015  $
END OF COMPILER TIME 000M 06S
$RUN NAME

END OF RUN TIME 000M 10S
$

C      VAN DER POL'S EQUATION (PHASE-PLANE METHOD)
0001  DIMENSION TSEC(501),X(501),XD(501)
0002  F(Z,ZD)=-4.*(Z*Z-1.)*ZD-Z
0003  DELT=0.05
0004  TSEC(1)=0.
0005  X(1)=0.75
0006  XD(1)=0.
0007  AK1=SIN(DELT)
0008  AK2=COS(DELT)
0009  N=1
0010  10 X(N+1)=X(N)+XD(N)*AK1+F(X(N),XD(N))*(1.-AK2)
0011     XD(N+1)=XD(N)*AK2+F(X(N),XD(N))*AK1
0012     TSEC(N+1)=TSEC(N)+DELT
0013     N=N+1
0014     IF(N.LE.500)Gθ Tθ 10
0015     STOP
0016     END
0017  $
END OF COMPILER TIME 000M 06S
$RUN NAME

END OF RUN TIME 000M 13S
$

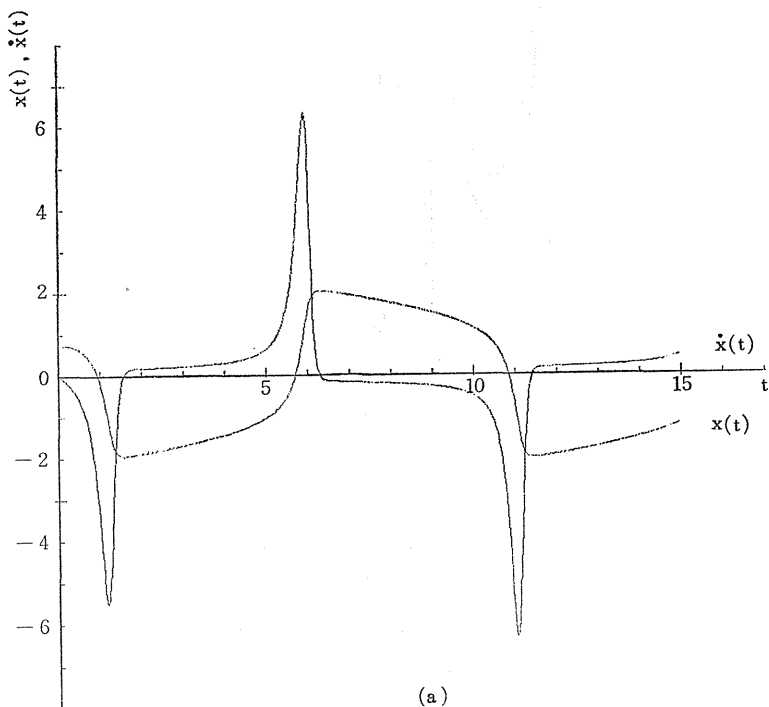
```

```

C      VAN DER POL'S EQUATION (RUNGE-KUTTA METHOD)
0001  DIMENSION TSEC(501),X(501),XD(501)
0002  F(Z,ZD)=-4.*(Z*Z-1.)*ZD-Z
0003  DELT=0.05
0004  TSEC(1)=0.
0005  X(1)=0.75
0006  XD(1)=0.
0007  N=1
0008  10 AK1=DELT*F(X(N),XD(N))
0009     AK2=DELT*F(X(N)+DELT/2.*XD(N),XD(N)+AK1/2.)
0010     AK3=DELT*F(X(N)+DELT/2.*(XD(N)+AK1/2.),XD(N)+AK2/2.)
0011     AK4=DELT*F(X(N)+DELT*(XD(N)+AK2/2.),XD(N)+AK3)
0012     X(N+1)=X(N)+DELT*(XD(N)+(AK1+AK2+AK3)/6.)
0013     XD(N+1)=XD(N)+(AK1+2.*AK2+2.*AK3+AK4)/6.
0014     TSEC(N+1)=TSEC(N)+DELT
0015     N=N+1
0016     IF(N.LE.500)GO TO 10
0017     STOP
0018     END
0019  $
END OF COMPILER TIME 000M 07S
$RUN NAME

END OF RUN TIME 000M 31S
$

```



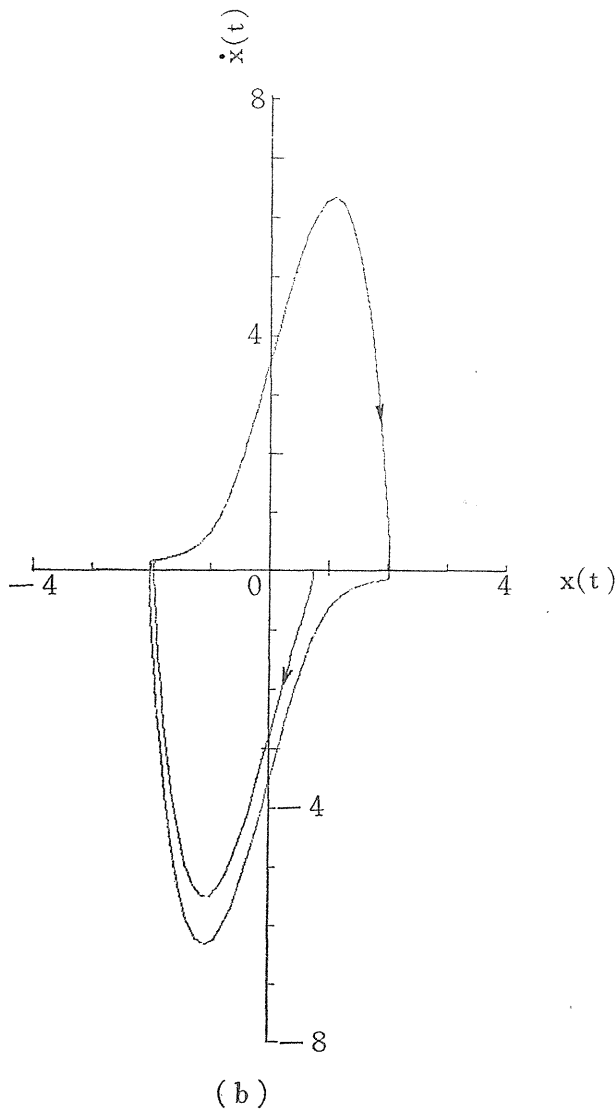


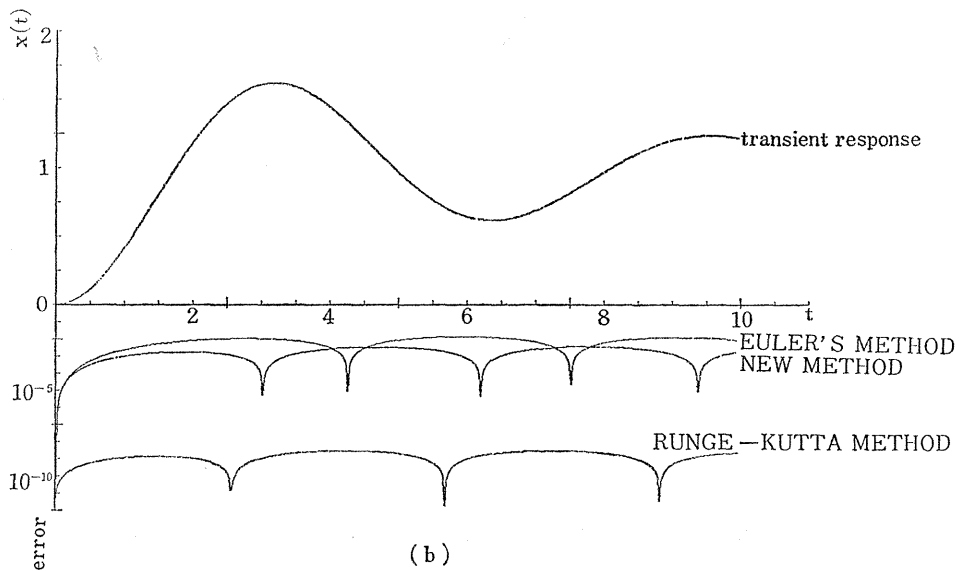
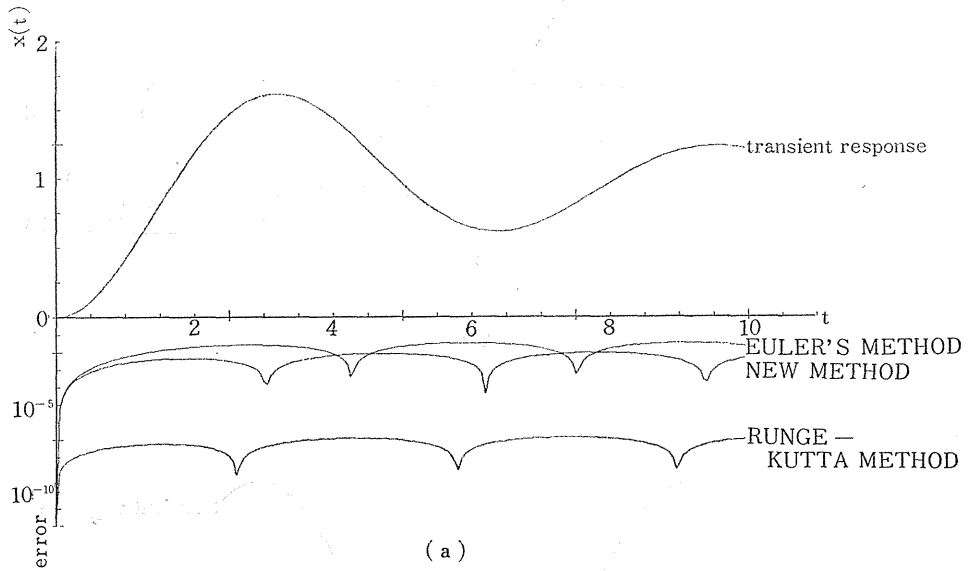
Fig.2 Solution of Van der Pol's equation

- (a) time-response curve.  
 (b) phase-plane trajectory.

つぎに、二次おくれ系  $1/(s^2 + 2\zeta s + 1)$  のステップ応答についてステップ幅をかえて厳密解との絶対誤差の比較を行ってみた。グラフはステップ応答の厳密解とそれぞれの計算法による数値解との絶対誤差を符号を考慮せずに対数をとって表わしたものである。ディップしている所は厳密解に最も近い点であり、そのディップ点を中心にして前後で絶対誤差の符号が反転している。厳密解と正確に一致する点では対数計算が無意味となるから、これを除くために絶対誤差の式の中にはじめから  $10^{-15}$  の項を加えてある。したがって、厳密解と一致する点での誤差の評価は  $10^{-15}$  を示すことになる。ステップ幅が比較的大きい場合は、数値解がステップ幅  $\Delta t$  による離散的な値の集まりであるという性質のた



め厳密解と一致する点をスキップすることがある。図 3 (a), (b), (c), (d) により二次おくれ系の減衰係数  $\zeta$  の効果が大きい場合はルンゲ・クッタ法に比較して精度がおちているが、減衰係数が小さい場合にはルンゲ・クッタ法とほぼ同程度の計算精度が得られていることがわかる。これは、このとき位相面上での軌跡がほぼ円形となり、式 (4) にお



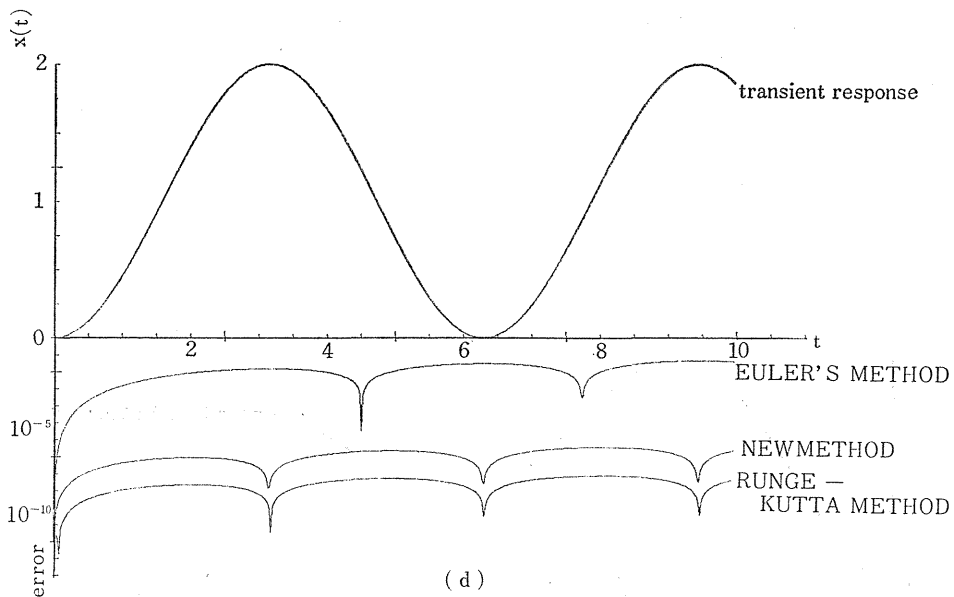
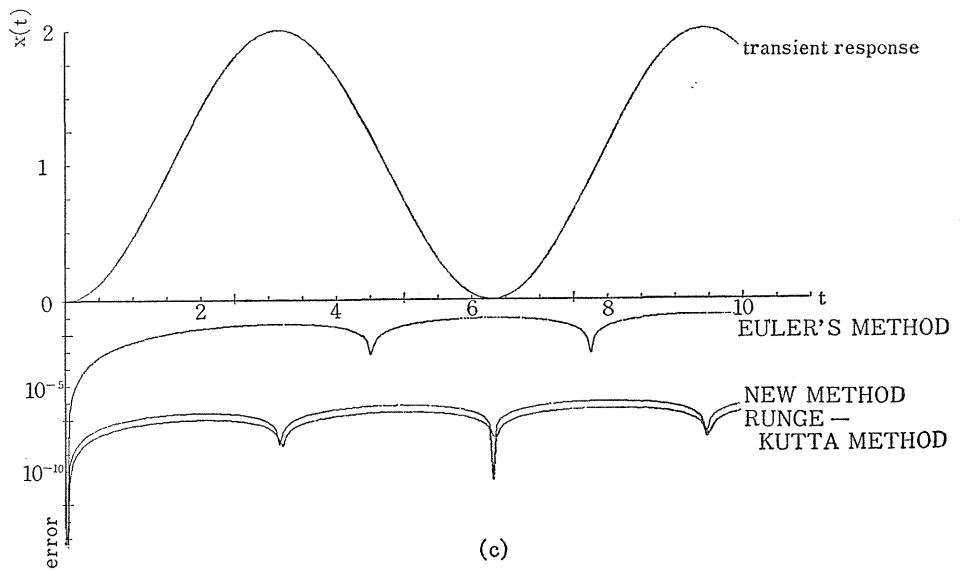


Fig.3 The transient response and absolute error characteristics by three methods for system of the second order lag.

- (a)  $\zeta=0.15, \Delta t=0.05$     (b)  $\zeta=0.15, \Delta t=0.02$   
 (c)  $\zeta=0, \Delta t=0.05$         (d)  $\zeta=0, \Delta t=0.02$

ける仮定が充分満たされるからである。

また、オイラー法は厳密解の変曲点付近で、本計算法とルンゲ・クッタ法では厳密解の傾きが0となる点で精度が高くなっているのがわかる。

## 5. むだ時間を含む非線形 $n$ 階常微分方程式の数値計算法

与えられるシステムが、固有の非線形性を有するほかその中にむだ時間を介在するような場合、系の過渡応答の解析はさらに難かしいものとなる。本節では、以上の説明による本数値計算法に対するこの問題への適用の仕方を記述する。すでに、むだ時間を含む非線形常微分方程式の近似解法としては、Cunningham 氏による一次おくれ系、そして桑原・平井の両氏による二次おくれ系の図式的な求解が試みられてはいるが、それらはいずれも手作業による作図試行の繰り返しであり、このとき時間区分  $\Delta t$  の選定に幾分かの工夫を要することになる。すなわち、 $\Delta t$  を極度に大きくとれば解の値ははなはだしく rough になり、逆に  $\Delta t$  が小さすぎれば各段階における解は正確さを増すが、数多くの作業段階による誤差の累積により全体として精度が低下してしまう。作図者の個人差にもよるが誤差の割合も不確定で消費される時間も極めて長くなるために、数多くの初期値に対して過度応答を求める場合には不向きである。

本数値計算法の手順はデジタル・コンピュータが作図を行うのと等価であり、与えられた制御系に対してかなり綿密に検討された上で、そのシステム・ダイナミックが設定されているならば、解析問題における過渡解もある限られた誤差の範囲内で求めることが可能であり、所要の目的は十分に満たしてくれるものと思われる。

### 5.1 $x^{(n)} + F[t, x(t), x(t-L), \dot{x}(t), \dot{x}(t-L), \dots, x^{(n-1)}(t), x^{(n-1)}(t-L)] = 0$ の数値計算法

表題に示された非線形微分方程式の各状態量を、 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = \ddot{x}, \dots, x_n = x^{(n-1)}$  の状態変数に置き換えて normal form で表わせば

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_j &= x^{j+1} (j=1, 2, \dots, n-1) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= -F[t, x(t), x(t-L), \dot{x}(t), \dot{x}(t-L), \dots, x^{(n-1)}(t), x^{(n-1)}(t-L)] \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

となる。

逐次計算を実行するとき、任意の時点  $t = j\Delta t$  における数値計算は、状態方程式の最終に記述される非線形一階微分方程式から順次上の式に向って進める点は第2節に説明した方法と全く同じである。ただ、第2節の場合と異なるところは、最終に記述された非線形一階分方程式が時刻  $L$  だけ、以前のもを含めた状態変数とのかかわり合いをもってくるため、各状態空間ではそれらの値がすべて store されている必要のあることである。したがって、むだ時間  $L$  を含む系の過渡解を求めるために、ここでは状態方程式の最終の式を用いて、 $x_n$  の算出に必要な位相空間のみに着目すれば、そこでの手順は次のようになる。

まず、time interval  $\Delta t$  の値を決定する必要がある。ここで数値計算上、不都合を生じない程度の  $\Delta t$  の大きさは、むだ時間  $L$  の整数分の 1 にとられ、かつ  $0 < \Delta t \leq 0.034$  であることが望ましい。 $\Delta t$  を適当な値に選定したのち、第1の段階として  $0 \leq t \leq L$  における  $(x_{n-1})_j$  の値（または、初期関数）が与えられているものとして、 $t=0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, (L-\Delta t), L$  における位相面  $x_{n-1}$  軸上の値を  $l=L/\Delta t$  個、それぞれ  $(x_{n-1})_1, (x_{n-1})_2, \dots, (x_{n-1})_l$  として規定しておく。このとき、他の位相面上にも相当する時点の初期値が規定

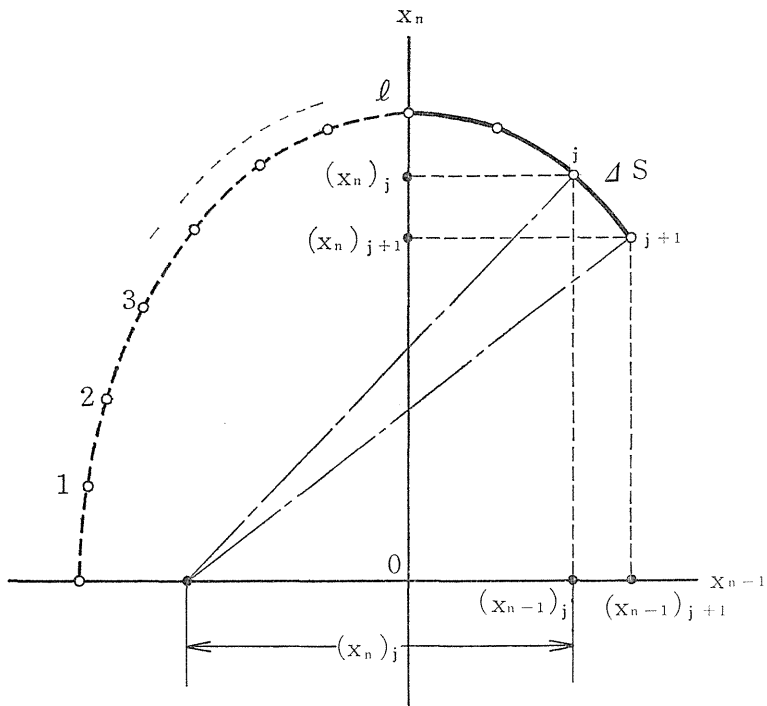
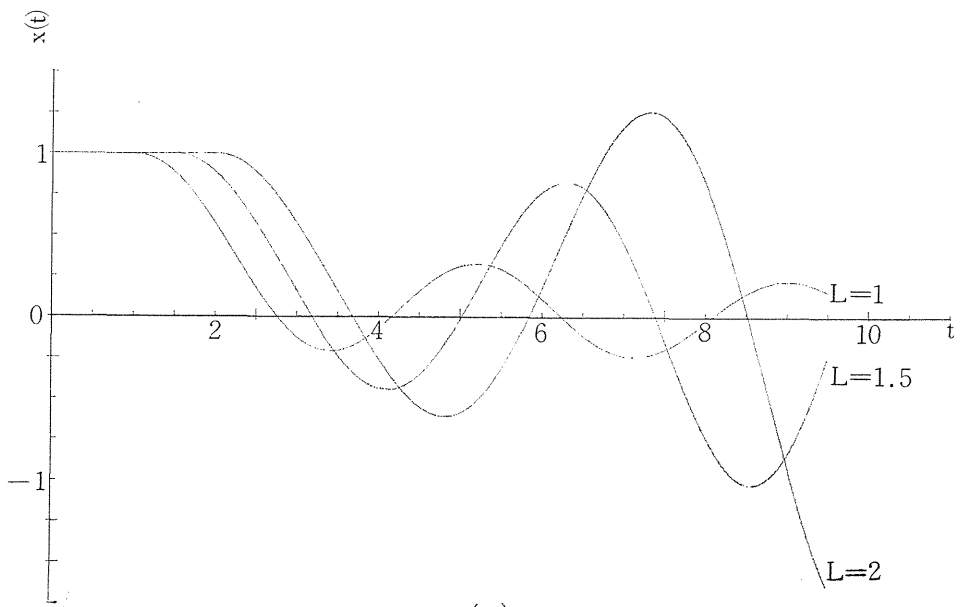


Fig. 4 The phase-plane diagram for nonlinear differential equation with a dead time.



(a)

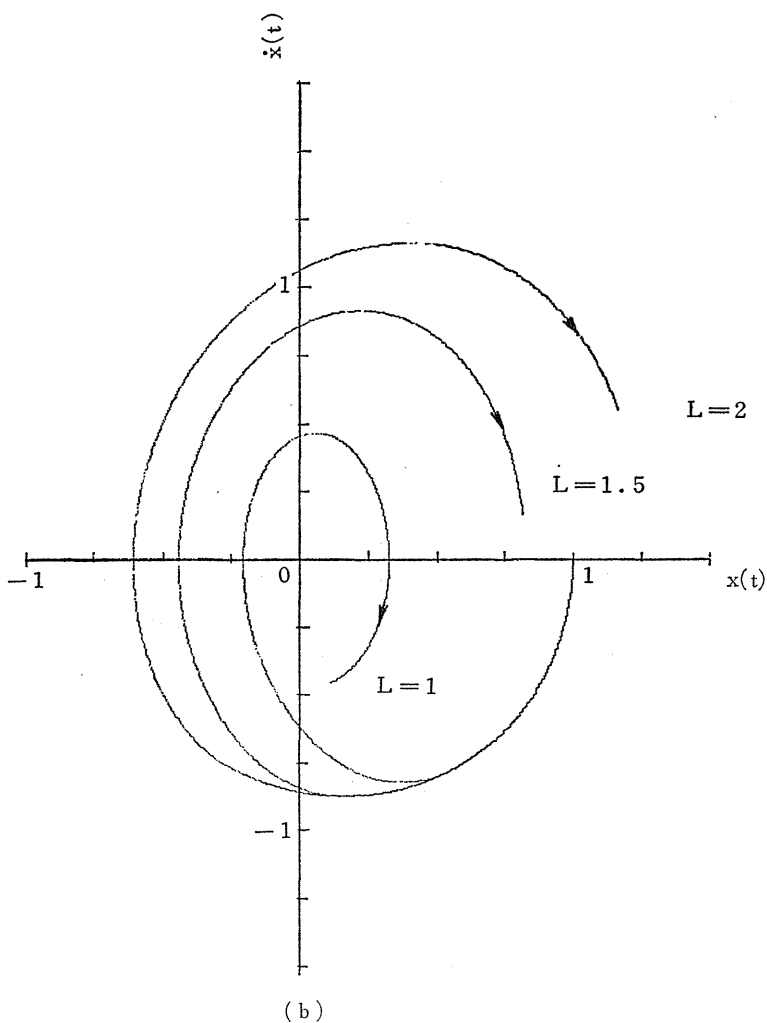


Fig. 5 Solution of nonlinear second order differential equation with a dead time.  
 (a) time-response curve. (b) phase-plane trajectory.

されている必要がある。第2の段階として、任意の時刻  $t=j \cdot \Delta t$  ( $j=l, l+1, l+2, \dots$ ) においては

$$\dot{x}_n = -F[t, \{x_1(t)\}_j, \{x_1(t-L)\}_j, \{x_2(t)\}_j, \{x_2(t-L)\}_j, \dots, \{x_n(t)\}_j, \{x_n(t-L)\}_j] \dots \dots \dots (16)$$

となるから、第2節に示す数値計算に適用して、 $x_n$  の値を求め、逐次、計算を進めれば、与式の解が得られることになる。計算例として、むだ時間  $L$  を含む2階の常微分方程式  $\ddot{x}(t) + 0.2\dot{x}(t) + \dot{x}(t-L) - 0.1\dot{x}(t-L)^3 + x(t) = 0$  ( $x=1, \dot{x}=0$  at  $0 \leq t \leq L$ ) を図5に示す。

## 6. む す び

通常非線形系における過渡解析に必要な新値計算法を、位相面拡張法の原理から開発し、その効果について検討を加えた。

本数値計算法は非線形の $n$ 階常微分方程式のみならず、線形の微分方程式の解法にも利用可能であるから、実際の計算時間や精度の面での検討にあたっては、簡単な線形の2階常微分方程式を用いた。その結果、比較的良好な精度を保ちながら計算時間をかなり短縮できることがわかった。たゞ、この計算過程でみるかぎり、その減衰係数が大きくなるに従い、過度解の精度がおちてくる等、固定した計算精度は得られていない。これは、数値計算の基本となる二つの代数方程式に適切な補正項を加える等の修正を行うことによって、近々解決されてくると思われる。

一般に、システムの定量的あるいは定性的な数式表現を行おうとするとき、そのシステム・モデルの正確さを厳密に保とうとすればするほど、非線形性の存在を無視することはできなくなる。これら、非線形システムの解析問題において、本数値計算法の適用は、プログラミングそして演算速度の上昇をはかる意味で有益と思われる。

本論文では、非線形 $n$ 階常微分方程式の求解例は記載しなかったが、この事例においても、ある限られた誤差の範囲内で満足しうる解が求められることが認められている。

本研究にあたって、ご指導をいただいた本学精密工学科教授・山田正治先生、そして電子計算機の使用にご協力をいただいた谷川邦夫技官に深甚の謝意を表します。

## 参 考 文 献

- (1) W. J. CUNNINGHAM; Graphical Solution of Certain Nonlinear Differential-Difference Equations, J. of Frank. Inst., 261, 1956.
- (2) R. N. BULAND; Analysis of Nonlinear Servos by Phase-Plane-Delta method, J. of Frank. Inst., 257, pp 37~48, 1954.
- (3) L. S. JACOBSEN; On a General Method of Solving Second Order Differential Equations by Phase Plane Displacement, J. Appl. Mech., 19, pp 543~553, 1952.
- (4) B. E. D. BISHOP; On the Graphical Solution of Transient Vibration Problems, Proc. Inst. Mech. Eng., 168, pp 299~322, 1954.
- (5) K. V. DISPROSE; Automatic and Manual Control, Butterworth, (London)
- (6) 東, 山田; 非線形微分差分方程式の図式解法, 第9回計測自動制御学会講演会, 127, (1970)
- (7) 東, 滑川; 非線形 $n$ 階常微分方程式の求解に対する差分法の適用, 電気学会昭和47年全国大会, 1007, (1972)