

デジタル・シミュレーションのための 安定化数値解法

東 貞男*, 打越 聡*, 長本良夫*

(昭和53年9月8日受理)

On Study of Stabilized Numerical Solution Method for the Digital Simulation

SADAO AZUMA, SATOSHI UCHIKOSHI and YOSHIO OSAMOTO

Abstract: — In the previous paper, the stable and tough integral method was developed by one of Authors for digital simulation when the system dynamics are subject to an abrupt change with time or the system is complex, oscillatory one. As this result, it was understood that the numerical formula becomes one of the implicit methods which is A-stable with small discretization error.

In this paper, a new numerical calculation method is mainly described of solving the linear system state space equation as an initial problem in digital simulation, and error analysis.

1. まえがき

連立 n 階常微分方程式の有力な数値解法の一つとして差分を基礎とする一群の解法の中へ、筆者の一人は「対角化モード特性」の概念を導入し、与えられた制御系の *dynamics* の調査に有用かつ *tough* な運用がはかれる数値計算公式を、A-安定、そして離散化誤差の小さい陰解法の公式として実施することができる⁽¹⁾⁽²⁾を示した。

前報では、主として非線形系解析のための数値計算法を、*digital simulation* 向きに開発することに努めたが本報においては、さらに与えられる制御系が線形な状態方程式として記述される場合の数値解法について論議をすすめることにする。

2. 状態方程式の差分化と安定化近似計算法

2-1. 制御系の基本方程式

実空間 $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ の領域 D で実数値非線形関数 f を考える。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \mathbf{f} \in C^n(D), t \geq 0 \quad (1)$$

ここに右辺は、 $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$, $i=1, 2, \dots, n$ を列にもつベクトル関数であり、 \mathbf{x} は n ベクトル (状態ベクトル)、 \mathbf{u} は m ベクトル (制御ベクトル) であるものとする。現時点 t_N における $(n+m+1)$ 次元空間の状況点を通る超曲面 $f_i(\mathbf{x}_N, \mathbf{u}_N, t_N)$ の静的関係を

$$a_{ij} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{\substack{x=x_N \\ u=u_N \\ t=t_N}}, b_{ir} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_r} \right]_{\substack{x=x_N \\ u=u_N \\ t=t_N}} \quad (2)$$

$i=1, 2, \dots, n, r=1, 2, \dots, m$ とすれば、(1)式は次のような状態ベクトル $\mathbf{x}(t)$ に関する線形一次状態方程式

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (3)$$

$$\mathbf{x}(t) = n \text{ vector}$$

$$\mathbf{u}(t) = m \text{ vector}$$

$$\mathbf{A} = n \times n \text{ constant matrix}$$

$$\mathbf{B} = n \times m \text{ constant matrix}$$

として表現することができる。いま、 $(t_N, \mathbf{x}_N, \mathbf{u}_N) \in D, (t_{N+1}, \mathbf{x}_{N+1}, \mathbf{u}_{N+1}) \in D, N \geq 0$ とし、 $t_{N+1} - t_N = \Delta t$ の微小積分区間で $\mathbf{u}_N = \mathbf{u}_{N+1}$ であると仮定するならば、(3)式の一般解は

$$\mathbf{x}_{N+1} = \exp(\mathbf{A}\Delta t)\mathbf{x}_N + \{\exp(\mathbf{A}\Delta t) - \mathbf{I}\} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_N \quad (4)$$

* 茨城大学工業短期大学部電子工学科 (日立市中成沢町)

として与えられる。ところで、digital computer 利用により制御系の動的挙動の逐次計算を試みる場合には、微少時間区分 Δt ごとに算定可能な離散化状態方程式とすることが望ましい。

微少時間区分、すなわち、サンプリング周期を T とするならば、系は与えられた線形集中定数連続系の状態ベクトル $\mathbf{x}(t)$ と等価な状態量として算出可能な離散時間系とすることができる。ここでサンプリング番号を $k, k+1$ とし、その時点における状態ベクトルをそれぞれ $\mathbf{x}(kT) \triangleq \mathbf{x}(t_k), \mathbf{x}((k+1)T) \triangleq \mathbf{x}(t_{k+1}), \mathbf{u}(kT) \triangleq \mathbf{u}(t_k)$ のように書き表わすことにし、かつ、 $n \times n$ マトリクス $\mathbf{G}(T), \mathbf{H}(T)$ を

$$\mathbf{G}(T) \triangleq \exp(AT)$$

$$\mathbf{H}(T) \triangleq \{\mathbf{G}(T) - \mathbf{I}\} \cdot \mathbf{A}^{-1} \quad (5)$$

のように定義すれば、最終的に(4)式を次のように書き表わすことができる。

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}(T) \cdot \mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}(T) \cdot \mathbf{U}(kT) \quad (6)$$

$$\mathbf{U}(kT) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t_k)$$

$$k = 1, 2, \dots, N$$

(6)式の係数マトリクス $\mathbf{G}(T), \mathbf{H}(T)$ を、以下においてはそれぞれ離散化解マトリクス(discretized solution matrix) 離散化積分マトリクス(discretized integration matrix) と呼ぶことにする。

2-2. $\mathbf{G}(T), \mathbf{H}(T)$ の近似計算式

離散化解マトリクス $\mathbf{G}(T)$ や離散化積分マトリクス $\mathbf{H}(T)$ が、解析的に容易に求め得る単純な場合は別として、通常、この二つのマトリクスの値を digital computer によって決定しようとする場合は、最も基本的な近似計算法としては、

$$\mathbf{G}(T) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(AT)^{\nu}}{\nu!}$$

$$\mathbf{H}(T) = \mathbf{G}(T) \cdot \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{(AT)^{\nu}}{(\nu+1)!} \right\} T \quad (7)$$

で与えられる無限級数を、項数 $(\nu+1)$ までの打ち切り計算によって求める方法を採用しているが、その数値計算には極めて膨大な計算量を必要とするなどの欠点が介在してくる。ここでは上記の欠点を極限した近似計算式が、結果的には逐次計算の始めから終わりまでの全域を通じて安定な解の算定が可能となるよう考慮して、次のような手法を導入する。

いま、(5)式の第二式を形式的に次のように変形してみる。

$$\mathbf{H}(T) = \frac{\Delta t}{2} \{\mathbf{I} + \mathbf{G}(T)\} \cdot \mathbf{\Xi} \quad (8)$$

ここで

$$\mathbf{\Xi} = 2 \cdot \Lambda^{-1} \cdot \tanh\left(\frac{\Lambda}{2}\right) \quad (9)$$

$$\Lambda = AT$$

である。微少時間区分 Δt が十分に小さい値であると仮定すれば $\mathbf{\Xi}$ を単位マトリクス \mathbf{I} と等価にみなすことができこのときの値 $\mathbf{H}(T)$ を用いた計算式

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}(T) \cdot \mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}(T) \cdot \mathbf{U}(kT)$$

$$= \mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}(T) \cdot \dot{\mathbf{x}}(kT) \quad (10)$$

は台形公式のそれと合致する。そのような意味から、 $\mathbf{\Xi}$ を補正係数マトリクスとする離散化積分マトリクス $\mathbf{H}(T)$ は、 $\mathbf{\Xi}$ が適切に与えられる限り数値計算の全域において \mathbf{A} —安定かつ離散化誤差が最も小さな藤解法の公式であり得ることができる。また、 $K = 2 \cdot \mathbf{\Xi}^{-1}$ とおけば $\mathbf{H}(T)$ を $\mathbf{H}(T) = 2 \cdot \Delta t \cdot (K - \Lambda)^{-1}$ (11)

と表現することができ、同様に $\mathbf{G}(T)$ を

$$\mathbf{G}(T) = (K + \Lambda) \cdot (K - \Lambda)^{-1} \quad (12)$$

のように表現することができる。このとき K の厳密な値は $K = \Lambda \coth(\Lambda/2)$ であるが、前述の利点を設えた近似公式として算定可能な K_{ν} とするならば

$$K_{\nu} = \frac{\mathbf{I} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \Psi_{\ell}}{\sum_{\ell=1}^{\nu} \Psi_{\ell}^{\prime}} \quad (13)$$

$$\mu_{\nu, \ell} = \frac{\nu!}{2\nu!} \cdot \frac{(2\nu - \ell)!}{(\nu - \ell)! \ell!}$$

$$\Psi_{\ell} = \frac{1 + (-1)^{\ell}}{2} \mu_{\nu, \ell} \cdot \Lambda^{\ell}$$

$$\Psi_{\ell}^{\prime} = \frac{1 + (-1)^{\ell+1}}{2} \mu_{\nu, \ell} \cdot \Lambda^{\ell-1}$$

$$\nu = 1, 2, \dots$$

となる。ただし、 ν は近似の度合いを表わし、 ν が 1 の場合を 1 次近似公式、2 の場合を 2 次近似公式のように呼ぶことにする。

3. 安定性と計算誤差

3-1. 真の解への収束性

状態方程式の真の解を $\mathbf{x}_{\infty}(T)$ 近似解を $\mathbf{x}(T)$ サンプリング周期を T とするとき、

$$\lim_{T \rightarrow 0} \mathbf{x}(T) = \left[\lim_{T \rightarrow 0} \mathbf{G}(T) \right] \mathbf{x}(0_+) + \left[\lim_{T \rightarrow 0} \mathbf{H}(T) \right] \mathbf{U}(0_+) \quad (14)$$

の関係で, (11), (12)式のいかなる近似公式であっても

$$\left. \begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} G(T) &= 1 \\ \lim_{T \rightarrow 0} G'(T) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

を満足し, 真の値と一致することになるから, 本近似解法は収束的であるといえる。さらに計算にともなう安定性の保障については, 線形の蔭公式であるためA-安定(絶対安定)である。証明は3-3節を参照。

3-2. 数値計算における離散化誤差と累積誤差

前項の説明から, 近似的に求められた離散化解マトリクスG(T)ならびに離散化積分マトリクスH(T)の適用による数値計算の公式(6)は, 絶対安定となることが解っているが, 計算精度に関する検討を加える意味で, ここでは(6)式使用による過渡解算定にともなう離散化誤差と累積誤差について調べる。

(1) 離散化誤差 離散化解マトリクスG(T), ならびに離散化積分マトリクスH(T)の計算式がℓ次の近似公式であるとき, 離散化誤差のorderは, T^{2ℓ+1}であり, 逐次計算によって求められる状態量の打ち切り誤差の項は, おおよそO((AT)^{2ℓ+1})である。

(2) 累積誤差 いま, 離散化過マトリクスの厳密解をG_x(T), 近似解をG(T)とし, さらに離散化積分マトリクスの厳密解をH_x(T), 近似解をH(T)とおくことにすれば, 誤差行列を次式のように定義することができる。

$$\begin{aligned} E_g &= \{G_x(T) - G(T)\} \cdot G_x(T)^{-1} \\ E_h &= \{H_x(T) - H(T)\} \cdot H_x(T)^{-1} \end{aligned} \quad (16)$$

ここで, 系の入力を単位関数状の入力Uとし, 状態変数の初期をx(0₊)とした場合, 厳密解x_x(kT), ならびに近似解x(kT)の値はそれぞれk-step目において

$$\begin{aligned} x_x(kT) &= G_x(T) \cdot x(0_+) + \sum_{i=0}^{k-1} G_x(T)^{(k-1)-i} \\ &\quad \cdot H_x(T) \cdot U \\ x(kT) &= G(T) \cdot x(0_+) + \sum_{i=0}^{k-1} G(T)^{(k-1)-i} \\ &\quad \cdot H(T) \cdot U \end{aligned} \quad (17)$$

に到達する。検討を容易にする目的で状態ベクトルの初期値をx(0₊) = [0]とすると, その誤差率を

$$\epsilon(kT) = \{x_x(kT) - x(kT)\} \cdot x_x(kT)^{-1} \quad (18)$$

のようにとれば, その値は

$$\begin{aligned} \epsilon(kT) &= G_x(kT) \cdot \{G_x(kT) - I\}^{-1} \cdot \{I - (I - E_g)^k\} U \\ &= \{I - (I - E_h)^k\} \cdot U \\ &= \{\zeta_x(kT) - \zeta(T)^k\} \cdot \{\zeta_x(kT) - I\}^{-1} \end{aligned} \quad (19)$$

ここで ζ(T) = G(T) · U である。

のようにして求められる。

3-3. 数値解析の実施例ならびに誤差解析

(1) 安定性の保障 n階の線形状態方程式

$$\dot{x}(t) = -x(t) \quad (20)$$

において, その厳密解は,

$$\begin{aligned} x(t) &= \Gamma \cdot x(0_+) \\ \Gamma &= \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \\ \lambda_i &= \exp(-t), \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

として求められるが, そのうち任意の状態量の初期値がx_i(0₊) = 2.0である場合の例を, サンプルング周期T = 3として, 本法ならびにEuler method, Runge-Kutta-Gill method による逐次計算で示せば第1図のようになる。

図の結果が示すように, 本法によればサンプルング周期のいかんにかかわらず絶対安定であり, 安定性の保障が約束される。

(2) 離散化解マトリクスと離散化積分マトリクス いま, 振動性システムにおける状態方程式の係数マトリクスAが, 次のような対称マトリクス

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

として与えられているものとすれば, これに相当する離散化解マトリクスと離散化積分マトリクスとの値は, それぞれ以下のようにうるができる。

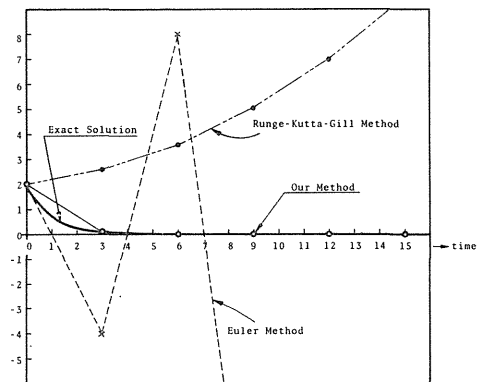


Fig. 1 Transient responses; compared our method with Runge-Kutta-Gill method and the exact solution. Curve is plotted for T=3.

a) 近似解析解 (2次近似公式による場合)

$$G(T) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$H(T) = \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} \beta & (1-\alpha) \\ -(1-\alpha) & \beta \end{bmatrix} \quad (24)$$

ただし

$$\alpha = \frac{144 - 60(\omega T)^2 + (\omega T)^4}{144 + 12(\omega T)^2 + (\omega T)^4}$$

$$\beta = \frac{12(\omega T)\{12 - (\omega T)^2\}}{144 + 12(\omega T)^2 + (\omega T)^4}$$

b) 厳密解析解

$$G_{\times}(T) = \begin{bmatrix} \cos \omega T & \sin \omega T \\ -\sin \omega T & \cos \omega T \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$H_{\times}(T) = \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} \sin \omega T & (1 - \cos \omega T) \\ -(1 - \cos \omega T) & \sin \omega T \end{bmatrix} \quad (26)$$

求められた $G(T)$, $G_{\times}(T)$, $H(T)$, $H_{\times}(T)$ の各要素のうち基本的な α に対する $\cos \omega T$ ならびに β に対する $\sin \omega T$ との比較を右の表に示す。

(3) 誤差解析の実施例 いま、振動性の系の動的挙動を算定する離散化状態方程式が、次式

$$\begin{bmatrix} x_1((k+1)T) \\ x_2((k+1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} 1-\alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (27)$$

ただし、 α , β は前項で与えられた実係数値

$$\begin{bmatrix} x_{1 \times}((k+1)T) \\ x_{2 \times}((k+1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega T & \sin \omega T \\ -\sin \omega T & \cos \omega T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1 \times}(kT) \\ x_{2 \times}(kT) \end{bmatrix} + \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} 1 - \cos \omega T \\ \sin \omega T \end{bmatrix} \quad (28)$$

のように与えられているとき、

$$\omega = 1$$

initial condition ;

$$\begin{bmatrix} x_{1 \times}(0_+) \\ x_{2 \times}(0_+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0_+) \\ x_2(0_+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

として逐次計算を実施する場合、厳密解に対する近似解が任意のサンプリング周期 T に対応し、one step あたりの誤差が介在してくる様子を実測してみた。

(28)式の厳密解は、通常、位相平面上で動径1をもった円周軌道上に存在することになる。いま、時刻 $t_k = kT$ における状況点が $P\{x_1(kT), x_2(kT)\}$ であるものと

Table 1

ωT	α	$\cos \omega T$
0.01	0.999950000	0.999950000
0.02	0.999800007	0.999800007
0.03	0.999550034	0.999550034
0.04	0.999200107	0.999200107
0.05	0.998750260	0.998750260
0.06	0.998200540	0.998200540
0.07	0.997551000	0.997551000
0.08	0.996801707	0.996801706
0.09	0.995952734	0.995952733
0.10	0.995004167	0.995004165
0.20	0.980066660	0.980066578
0.30	0.955337481	0.955336489
0.40	0.921066480	0.921060994
0.50	0.877603060	0.877582562
0.60	0.825395286	0.825335615
0.70	0.764988166	0.764842187
0.80	0.697020704	0.696706709
0.90	0.622221315	0.621609968
1.00	0.541401274	0.540302306

Table 2

ωT	β	$\sin \omega T$
0.01	0.009999833	0.009999833
0.02	0.019998667	0.019998667
0.03	0.029995500	0.029995500
0.04	0.039989334	0.039989334
0.05	0.049979169	0.049979169
0.06	0.059964005	0.059964006
0.07	0.069942845	0.069942847
0.08	0.079914689	0.079914694
0.09	0.089878541	0.089878549
0.10	0.099833403	0.099833417
0.20	0.198668896	0.198669331
0.30	0.295517000	0.295520207
0.40	0.389405368	0.389418342
0.50	0.479388015	0.479425539
0.60	0.564555243	0.564642473
0.70	0.644044335	0.644217687
0.80	0.717051002	0.717356091
0.90	0.782841385	0.783326910
1.00	0.840764331	0.841470985

し、サンプリング周期 T を経過した時点で、厳密解ならびに近似的に求められた状況点が $Q\{x_{1 \times}((k+1)T), x_{2 \times}((k+1)T)\}$, $Q'\{x_1((k+1)T), x_2((k+1)T)\}$ に移行したものととして、時刻 T を経過後の誤差を

$$\epsilon_1((k+1)T) = x_{1 \times}((k+1)T) - x_1((k+1)T)$$

$$\epsilon_2((k+1)T) = x_{2 \times}((k+1)T) - x_2((k+1)T) \quad (30)$$

のように求めることにした。また、動径 \overline{OP} に関しては、時刻 T を経過後の大きさ \overline{OQ} が一定値の1をとるから近似計算によって求められる動径 \overline{OQ}' の伸縮を

$$\epsilon_3((k+1)T) = \sqrt{\{x_1((k+1)T)\}^2 + \{x_2((k+1)T)\}^2}$$

- 1

(31)

のように求めてみた。その結果、累積誤差は第3図のようになり、対象とする系が振動系であるため実際に求められる状態量の厳密値と近似値との差、すなわち誤差には周期的な正負の領域が現われてくることになる。

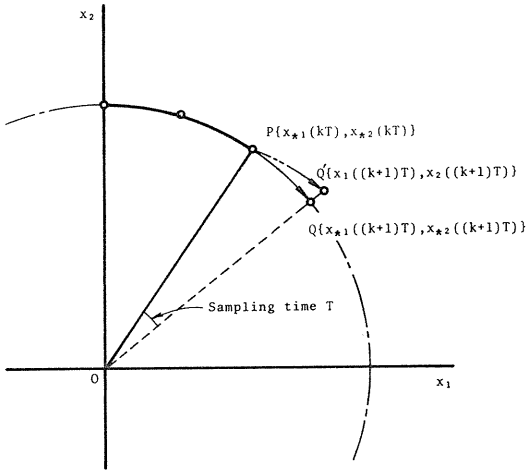


Fig. 2 Phase-plane trajectory.

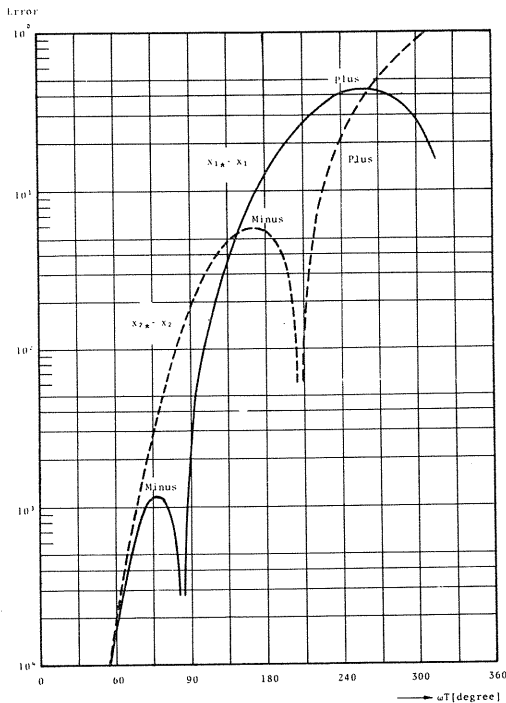


Fig. 3 Accumulation error versus ωT .

離散化誤差については、 ωT の大きさを $0.2618[\text{rad}] = 15(\text{deg})$ に限定して、サンプリング周期 T を種々に変化させてその実体を調査することにし、本法の誤差に併せて *Runge-Kutta method* の誤差についても実状を確かめてみた。

第4図に示されているように、本法においてはサンプリング周期 T の値を減少させるに従い、離散化誤差の有り方は T の5乗に比例して、また *Runge-Kutta method* においては T の2乗に比例して減少していることがわかる。また本法によれば、動径の伸縮誤差 ϵ_3 は 10^{-16} 程度となり、ほとんど *computer* による打切誤差のみと考えることができる。

サンプリング周期 T をパラメータとし、同一時間内での逐次計算結果を比較するならば、 T を小さくした場合には細分しただけ反復計算が増大することになるが、累積差については、本法によるとき T の4乗、*Runge-Kutta method* においては T の1乗に比例して改善されることが予想される。

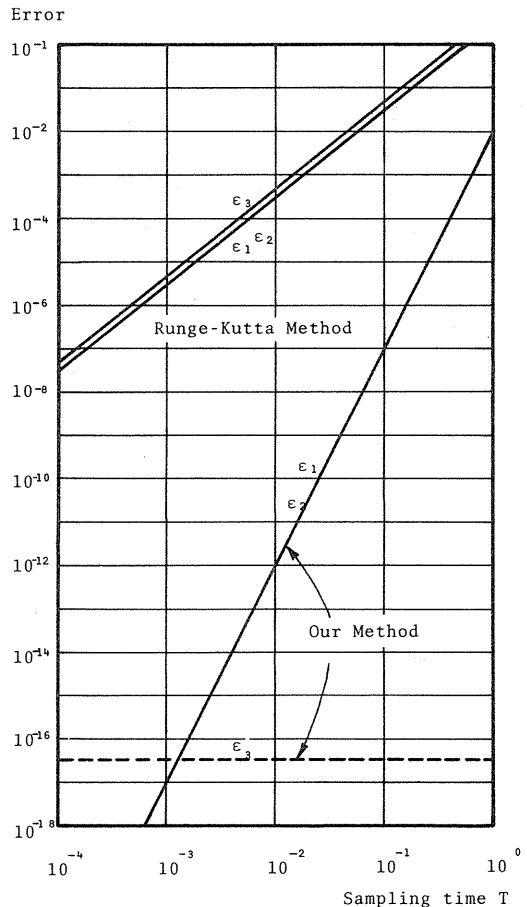


Fig. 4 Discretization error versus sampling time; compared our method with *Runge-Kutta method*.

4. あとがき

制御系の過渡解析に有効な *digital simulation* は、低次であっても安定かつ *taugh* な積分公式によることが望ましく、とくに複雑な系、関数変化の極めて激しい場合であっても、終始安定な数値計算が実施できることが必要である。本報においては、与えられる系の *dynamics* が線形状態方程式として記述される場合、微小時間区分すなわちサンプリング周期 T の値の選定にともなう誤差の解析を主として行った結果、*digital simulation* 用として従来からあった積分公式に比較して、より望ましい公式として使用しうるものであることを確かめることができた。

参 考 文 献

- (1) B. F. Womack and S. Azuma : A Numerical Calculation Method for Simultaneous Ordinary Differential Equation of Higher Order by the Momentary Diagonalized Modal Property, Proceedings of the Second International Symposium on the Operator Theory of Networks and Systems. 1977. 8.
- (2) 東 : システム状態方程式の一数值解法, 茨城大学工学部研究集報. 第24巻 1976.
- (3) R. S. Varga : Matrix Iterative Analysis, Prentice-Hall, Inc., N. J., U. S. A., 1963
- (4) K. Ogata : State Space Analysis of Control Systems, Prentice, Inc., Englewood Cliffs, N. J., U. S. A., 1967
- (5) 戸川 : マトリクスの数値計算, オーム社, 1970.
- (6) 戸川 : 微分方程式の数値計算, オーム社, 1973