ディジタル・ダイナミック・シミュレーションのための積分方式について

東　貞男*，長本良夫*，打越　聡*

（昭和54年9月8日受理）

The Integral Modes for Digital Dynamic Simulation.

SADAO AZUMA, YOSHIO OSAMOTO and SATOSHI UCHIKOSHI

Abstract: – If only the program to simulate the dynamic process of the fundamental control elements is incorporated, the digital computer has the advantage of the fact that a solution for a desired analysis can be easily obtained by inputing the information constituting the control system. The digital simulation in paticular is useful for analysis of complex control systems, it is highly effective in optimal design of the systems.

In this paper, the numerical calculation methods used for digital simulation of control systems are first discussed, mainly in integrating mode. It will then lead to the development of a numerical calculation method, which is tough and with high accuracy. And evaluation of the algorithm is made.

1. はじめに

Digital dynamic simulatorは1969年頃に制御系における動的挙動の解析を目的として作成されたものであり，その試みはhybrid computer 等で盛んに活用され，現在ではapplication programとして用意されるに至っている。しかしながら，制御系設計のための新しい概念が，状態空間法のかたちで導入され，系の表示も従来の伝達関数法から系の基本的概念としての状態として取り扱われるようになって，simulation や数値解析の仕方も状態変数による記述に対処するような方向にゆく傾向が支配的となり，DDSそのものの存在価値が軽減しているかのようである。実際問題として，制御系特性の把握の段階等では伝達関数による取扱いのほうがやりやすく，また，プロセス制御等においてもPID調節器による制御が数多くの個所でなされていることなどから，計算精度の高いDDSが望まれる。

本報では，既成の「積分方式」の内蔵に加えて，状態空間法の中で見い出された数値計算の利点を追加してDDS programの利用効果を高めることに努めている。

2. 位相面解析法の導入による積分方式の検討

2.1 常微分方程式の数値解法

常微分方程式の数値積分にあたっては，最も簡単なかたちで与えられるEuler積分から修正Euler法，Adams BarshforthのPredictor−Corrector方式，そしてRunge−Kutta法にいたるまで，幾つかあげることができる。

ここで，修正Euler法は二次の補間を行うので，通常のEuler法より精度のよい近似解をうることはできるが，実際に計算の運用にあたっては現時点とひとつ前の時点での関数値を用いる必要がある。この点，4次のRunge−Kutta法は修正Euler法とは異って過去の値を必要としない利点を有することなどから最も好んで用いられる一般的な数値計算法ということができよう。しかしながら，計算途中で誤差の評価ができないこと，さらにはFour Point Predictorのものと比較しても約2倍の計算時間を要する等，計算速度は最も遅くなる。

* 茨城大学工業短期大学部電子工学科（日立市中成沢町）

そしてまた，動的挙動を求めうる一般解を差分方程式に置きかえて逐次計算公式として利用するかたちは，digital computerによってかなり高い精度の解析解をうることができるので，よく用いられるようになったが，われわれはすでにこれを絶対安定で離散化誤差の小さい陰解法の公式とに形成することを試みており[1]，計算公式もsimpleでしかもEuler法に較べて数段も精度の高いものであることを見出しているので，本報におけるdigital simulationの構成も基本的にはこの原理を適用してゆくことにする。

2.2　一次おくれ要素の時間応答計算

a）入力信号が微少時間区分内で一定値をとると仮定できる場合

いま，制御要素が*Fig*.1 のような伝達関数で与えられているものとすればそのsystem dynamics は次式のような記述となる。

$$\dot{y}(t)=-ay(t)+bx(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

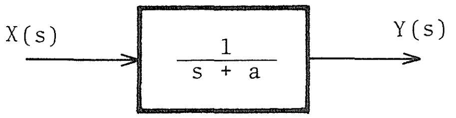


Fig. 1　Transfer function of first order lag system

ここで，位相平面を$\dot{y}$，yで定義するならば，平面上(1)式は*Fig*.2 に示すような状態軌道をとる。

位相平面｛y，$\dot{y}$｝上の軌道増分に時間区分のΔtを対応させるためにCunningham[2]の手法を適用することにする。

いま，状態軌道上，任意の状況点P_kが与えられるとき，時刻Δtを経過した後の状況点をP_{k+1}であるとすれば，*Fig*.2から

$$\frac{\dot{y}_k-\dot{y}_{k+1}}{y_{k+1}-y_k}=a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

を得る。また，$\tau=2/\Delta t$とおいたとき，(2)式との関係から

$$\frac{\dot{y}_{k+1}}{\dot{y}}=\frac{\tau-a}{\tau+a} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

を導くことができる。さらには，(2)と(3)式の関係から

$$y_{k+1}=y_k+\left(\frac{2}{\tau+a}\right)\dot{y}_k \quad (4)$$

をうることができる。ここで，(3)式の係数（$\tau-a$）／

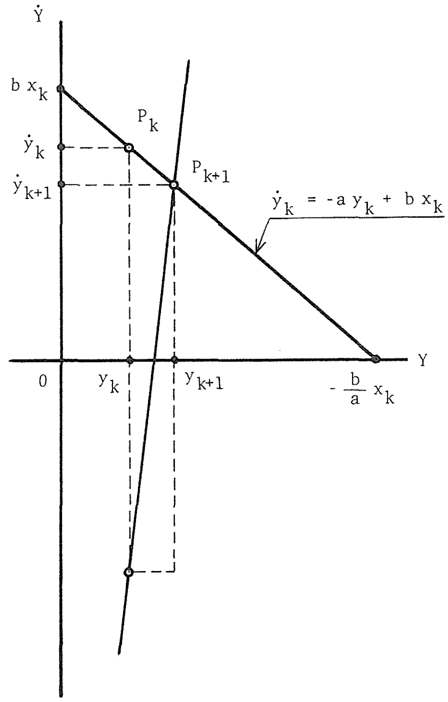


Fig. 2　Phase-plan trajectory for first order lag system.

（$\tau+a$）は$\exp(-a\tau)$の第2次近似値[1),(3)]といい，(4)式の係数$2/(\tau+a)$は$\{1-\exp(-a\tau/2)\}/a$ の第2次近似値であることは証明ずみで，結果的には位相面法による逐次計算公式の導入は，次式

$$\left.\begin{aligned}\dot{y}_{k+1}&=\exp(-a\cdot\Delta t)\cdot\dot{y}_k\\ y_{k+1}&=y_k+\left\{\frac{1-\exp(-a\cdot\Delta t)}{a}\right\}\dot{y}_k\end{aligned}\right\}\cdots (5)$$

の近似値であり，A安定でかつ離散化誤差の少ない陰公式ということができる。

b）入力信号が微少時間区分内で変化すると仮定した場合

入力信号が時間区分Δtの範囲内で変化するかたちを直線近似とするならば

$$x(t)=\begin{cases}\alpha t+\beta & \cdots\cdots\ 0\leqq t\leqq\Delta t\\ 0 & \cdots\cdots\ \Delta t<t\end{cases} \quad \cdots\cdots (6)$$

ただし，初期の時点をt_kとし，その初期値をx_k，$\Delta t=t_{k+1}-t_k$後の値をx_{k+1}とするとき

$$\alpha=\frac{x_{k+1}-x_k}{\Delta t}$$

$$\beta=x_k$$

である。

与式(1)のラプラス変換形は

$$sY(s)-y_0=-aY(s)+bX(s)$$

これを整理して

$$Y(s)=(s+a)^{-1}\cdot y_0+(s+a)^{-1}\cdot b\cdot X(s) \quad \cdots\cdots \quad (7)$$

のようになり，また，時間区分 Δt の範囲内で(6)式のラプラス変換形は

$$X(s)=\alpha\left\{\frac{1-\exp(-s\cdot\Delta t)}{s^2}-\frac{\Delta t\cdot\exp(-s\cdot\Delta t)}{s}\right\}$$

$$+\beta\left\{\frac{1-\exp(-s\Delta t)}{s}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8)$$

となるから，(7)式に代入し，それをラプラス逆変換して次式のような逐次計算式をうる。

$$y_{k+1}=\exp(-a\cdot\Delta t)\cdot y_k+\frac{b}{a}(\xi_1 x_k-\xi_2 x_{k+1})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (9)$$

$$\left.\begin{array}{l}\xi_1=\dfrac{1-\exp(-a\cdot\Delta t)}{a\cdot\Delta t}-\exp(-a\cdot\Delta t)\\ \xi_2=\dfrac{1-\exp(-a\cdot\Delta t)}{a\cdot\Delta t}-1\end{array}\right\}$$

次に，(9)式における $a\cdot\Delta t$ のとる値を，実際上は極めて小さな値とすることが可能なときには，近似的に

$$\frac{a\cdot\Delta t}{2}\cong\frac{1-\exp(-a\cdot\Delta t)}{1+\exp(-a\cdot\Delta t)}\left(=\tanh\frac{a\cdot\Delta t}{2}\right) \quad \cdots (10)$$

のようにみなすことができるので，これを変形整理して

$$1-\frac{1-\exp(-a\cdot\Delta t)}{a\cdot\Delta t}=\frac{1-\exp(a\cdot\Delta t)}{a\cdot\Delta t}$$

$$-\exp(-a\cdot\Delta t) \quad \cdots (11)$$

の関係式をうる。前述のような制約の中で ξ_1，ξ_2 両者の間には $\xi_1=-\xi_2$ のように考慮できることが解る。さらには，(10)式の関係から

$$\xi_1=-\xi_2=\frac{1-\exp(-a\cdot\Delta t)}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (12)$$

のように決定できるので，このとき(9)式の逐次計算式は

$$y_{k+1}=\exp(-a\cdot\Delta t)\cdot y_k+\left\{\frac{1-\exp(-a\cdot\Delta t)}{a}\right\}$$

$$\cdot b\cdot\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (13)$$

のように与えられる。(13)式は(5)式を変形した次式

$$y_{k+1}=\exp(-a\cdot\Delta t)\cdot y_k+\frac{1-\exp(-a\cdot\Delta t)}{a}$$

$$\cdot b\cdot x_k \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (14)$$

の第２項で，入力信号の現実点における値 x_k と次の時点での値 x_{k+1} とを考慮したかたちとなり，台形公式に類似した形態をとることがわかる。

2.3　積分要素の時間応答計算

制御要素がFig.3のような伝達関数で与えられるとき，そのsystem dynamicsは次式

$$y(t)=\int x(t)\,dt \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (15)$$

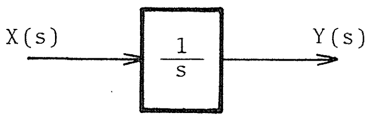


Fig. 3　Transfer function of the integration element.

のような記述となる。Fig.3の伝達関数はFig.1の一次おくれ要素において $a\to 0$，$b\to 1$ とおいたかたちと等価であり，逐次計算公式も(5)式あるいは(14)式，または(13)式によることが考えられるが，この場合は，いずれの式においても第２項の係数 $\{1-\exp(-a\Delta t)\}/a$ が不定となって計算不能に陥るため，ここに第２次近似公式の(3)，(4)式を適用して

$$\left.\begin{array}{l}\dot{y}_{k+1}=\dot{y}_k\\ y_{k+1}=y_k+\Delta t\cdot\dot{y}_k\end{array}\right\}$$

すなわち

$$\left.\begin{array}{l}\dot{y}_{k+1}=x_k\\ y_{k+1}=y_k+\Delta t\cdot x_k\end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (16)$$

とする。

また，入力信号の現時点における x_k と次の時点における x_{k+1} の値を考慮するとき得られる逐次計算式は，台形公式のそれと一致する。

$$y_{k+1}=y_k+\Delta t\cdot\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (17)$$

2.4　位相進め要素の時間応答計算

制御要素がFig.4の伝達関数で与えられるとき，system dynamics は次式のように記述される。

$$y(t)=\dot{x}(t)+a\cdot x(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (18)$$

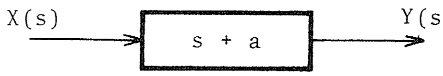


Fig. 4　Transfer function of first order lead system.

ここでも，一次おくれ要素と同様，位相平面上で論議をすすめるべく，位相平面を $\dot{x}$，x で定義することにする。このとき，(18)式は Fig.5 に示すような状態軌道をとる。*Fig*.5 の｛x，$\dot{x}$｝位相平面上で，すべての状況点を満足する式を

$$\tau = \frac{\dot{x}_{k+1} + \dot{x}_k}{x_{k+1} - x_k} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (19)$$

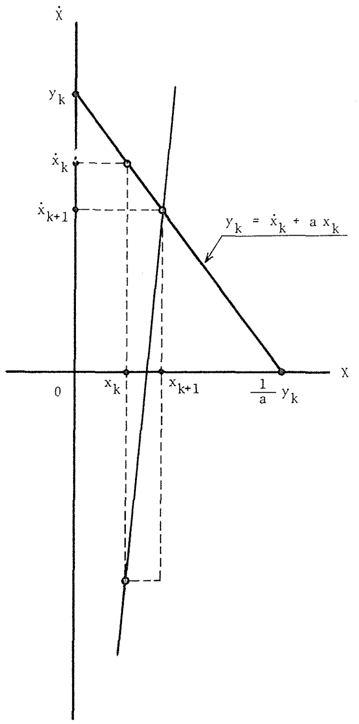


Fig. 5　Phase-plan trajectory for first order lead system.

のようにうることができる。また，初期の状況点における $\dot{x}$ を $\dot{x}_k$ とし，時刻 Δt 後の値を $\dot{x}_{k+1}$ とするとき，両者の関係を

$$\dot{x}_{k+1} = \frac{\tau - a}{\tau + a}\dot{x}_k \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (20)$$

のように与えられるから(19)，(20)式から $\dot{x}_k$ に関する式に整理して，

$$\dot{x}_k = \frac{\tau + a}{2}(x_{k+1} - x_k) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (21)$$

の関係をうる。さらに(18)式との関係からその逐次計算公式を次のように求めることができる。

$$y_{k+1} = \left(\frac{2}{\tau + a}\right)^{-1} \cdot \left\{ x_{k+1} - \left(\frac{\tau - a}{\tau + a}\right) \cdot x_k \right\} \quad \cdots\cdots \quad (22)$$

ここで，$(\tau - a)/(\tau + a)$ は $\exp(-a \cdot \Delta t)$ の第2次近似値であり，かつ，$2/(\tau + a)$ が $\{1 - \exp(-a \cdot \Delta t)\}/a$ の第2次近似値であることは，2.2節で説明したものと同一であるから，最終的には位相進め要素の厳密な逐次計算式として，次式

$$y_{k+1} = \frac{a}{1 - \exp(-a \cdot \Delta t)}\left\{ x_{k+1} - \exp(-a \cdot \Delta t) \cdot x_k \right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (23)$$

のように決定することができる。

2.5　微分要素の時間応答計算

制御要素が *Fig*.6 のような伝達関数で与えられるとき，その system dynamics は次式

$$y(t) = \dot{x}(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (24)$$

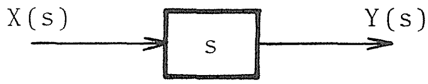


Fig. 6　Transfer function of the differentiation element.

のような記述となる。*Fig*.6 の伝達関数は *Fig*.4 の位相進め要素において，$a \to 0$ とおいたものと等価であるが，この場合も(23)式の逐次計算公式によれば，係数 $a/\{1 - \exp(-a \cdot \Delta t)\}$ が不定となって計算不能であるため，(22)式の第2次近似式において $a \to 0$ とするとき，$(\tau + a)/2 \to \Delta t$ となることを利用して，その計算式を

$$y_{k+1} = \frac{1}{\Delta t} \cdot (x_{k+1} - x_k) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (25)$$

のように決定できる。

2.6　むだ時間を含む一次おくれ系の時間応答計算

a）オープンループ系

制御要素が *Fig*.7 のように「一次おくれ」と「むだ時間」の複合要素で構成されるとき，system dynamics は

$$\dot{y}(t) = -ay(t) + bx(t - \mathrm{L}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (26)$$

のように記述される。上式は(1)式の入力信号 $x(t)$ がむだ時間 L だけ遅れて入力してくることになるから，L の時間区分だけ(5)式ないしは(13)式による逐次計算結果を保持してやればよい。ここでは，L 時間区分内の計算に要するきざみ回数を $N = L/\Delta t$，（N は正の整数）のよう

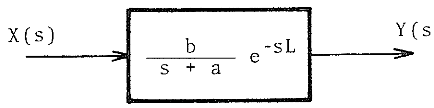


Fig. 7　Transfer function of first order lag system with dead time.

に決定し，N個の記憶容量を準備してstore　し逐次shiftしながら結果を出力してやるようにする。

b）フィードバック系

むだ時間を含む基本的な制御系を*Fig*.8　で表わすとき，　$t \geqq 0$で次式を満足するものとする。

$$\dot{y}(t)=-a\cdot y(t)-c\cdot y(t-L)+b\cdot x(t-L)\quad\cdots\ (27)$$

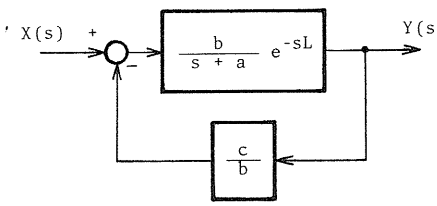


Fig. 8　Transfer function of Eq. (27).

ここで，(27)式は前節オープン系における場合と同様，入力信号$x(t)$がむだ時間Lだけ遅れて入力されることを考慮する必要があり，この手続きをふまえることを条件に，むだ時間を含む基本的な一般形として(28)式のような記述とするならば，系の構成を*Fig*.9のような伝達関数表示とすることができる。

$$\dot{y}(t)=-a\cdot y(t)-c\cdot y(t-L)+b\cdot x(t)\quad\cdots\ (28)$$

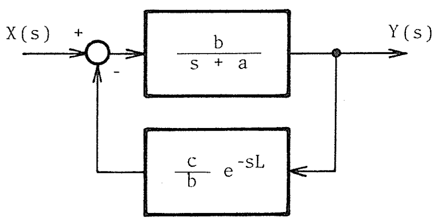


Fig. 9　Transfer function of Eq. (28).

Fig.9をさらに等価変換するならば*Fig*.10をうる。図中破線で囲んだ部分は松原[(4)]によって遅延帰還系と名づけられ，その特異な性質が明らかにされているところのものであり，系の構成は遅延帰還系と一次おくれ系とのcascade接続となる。

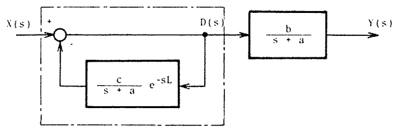


Fig. 10　Delayed feedback system.

遅延帰還系の伝達関数を$G_L(s)$とすれば

$$G_L(s)=\frac{1}{1+\left(\frac{c}{s+a}\right)\cdot\exp(-sL)}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-c)^i}{(s+a)^i}\exp(-s_iL)\qquad\cdots\cdots\ (29)$$

のようになるので，ここで，遅延帰還系の出力応答を$D^*(s)$とするならば，入力信号$X(s)$に対して$D^*(s)$は次式

$$D^*(s)=X(s)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-c)^i}{(s+a)^i}X(s)\cdot\exp(-s_iL)\ \cdots\ (30)$$

のような入力信号$X(s)$と時刻iL（$i=1,2,3,\cdots$）ごとにループを巡って生ずる帰還信号との和のかたちとして表わされる。

したがって，遅延帰還系の時間領域で定まる応答のかたちは

$$g(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(s+a)^i}\right]=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^{i-1}}{(i-1)!}\exp(-at)$$

なる時間関数を考えるとき

$$d^*(t)=x(t)+\int_0^t g(t-\tau)\cdot(-c)^i\cdot x(\tau-iL)\,d\tau\ \cdots\ (31)$$

として与えられる。上式第$i+1$項，（$i=1,2,\cdots\cdots$）は遅延帰還によって生ずる過渡項であり

$$g_i(t)=\begin{cases}\dfrac{t^{i-1}}{(i-1)!}\cdot\exp(-at) & \cdots\cdots\ t>iL\\ 0 & \cdots\cdots\ t>iL\end{cases}$$

を満足する必要がある。

次に，入力信号の$x(t)$は微少時間区分Δtごとに一定値をとるものと仮定し，また$x(t-iL)$を

$$x(t-iL)=\begin{cases}x^{*iL}(t) & \cdots\cdots\cdots\ t>iL\\ 0 & \cdots\cdots\cdots\ t<iL\end{cases}$$

のように表現することにすれば，$k\cdot\Delta t<t-iL\leq(k+1)\Delta t$，（$i=0,1,2,\cdots\cdots$）に対して(31)式のたたみ込み積分を

$$h_i(\varDelta t)=\sum_{r=1}^{i}\left(-\frac{c}{a}\right)^{r}\left\{1-\exp(-a\varDelta t)\sum_{j=1}^{i-1}\frac{(a\varDelta t)^{i-j-1}}{(i-j-1)!}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (32)$$

のような定係数として算定することができるから，遅延帰還系における逐次計算に必要な方程式を

$$d_k^{*}=x_k+h_i(\varDelta t)\cdot x_k^{*iL} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (33)$$

として決定することができる。ただし，kは逐次計算のstep回数を表わすものとする。したがって，最終的な(28)式の解は(13)あるいは(14)式の逐次計算式においてx_kならびにx_{k+1}をd_k^*, d_{k+1}^*に置き換えて計算を継続することによって得ることができる。

3. 数値計算の実施例ならびに誤差解析

以上，DDSに組み込まれる基本的な制御要素の数値計算について導入の過程を述べてきたが，一次おくれ要素のようにそのdynamicsが1階の常微分方程式となる場合の計算実施例は前に報告してある通りであり[1]，とくに複雑な制御系で伝達関数の定数aのとる値が極めて小さな値，そして大きな値が混在してくるようなときに，第2次近似公式の適用が安定な数値解を与えてくれることになり，Runge−Kutta法等に優る良い効果を発揮してくれる。

3.1 一次おくれ要素の数値計算例

DDSは各要素の計算を順次結合して制御系全体の構成となし，各ブロックごとに算出された結果を次段の要素へと伝達して最終的な出力とするので現時点の出力y_kに対して$\varDelta t$時刻経過後のy_{k+1}を決定し，次段の要素の入力x_k, x_{k+1}としてその動的過程の推測ができるよう，逐次計算公式(9)式の導入を試みたが，ここでは，一次おくれの入力関数が線形の時間関数(unit ramp)である場合を，(9)式を用いて算定し，その結果を厳密解と比較してほとんど遜色のない満足しうるものであることを確かめることができた。

伝達関数定数を$a=1$, $b=2$, 入力関数$x(t)=t$, 時間区分$\varDelta t=0.01$として得られた結果を*Fig*.11に示す。誤差曲線は相対誤差のかたちを示したものである。

3.2 位相すすめ要素の数値計算例

第2節の4項で導入した位相進め要素の時間応答のかたちを把握する目的で，ここでは入力関数としてsin波形をinputし，その解を*Fig*.12のように算定した。

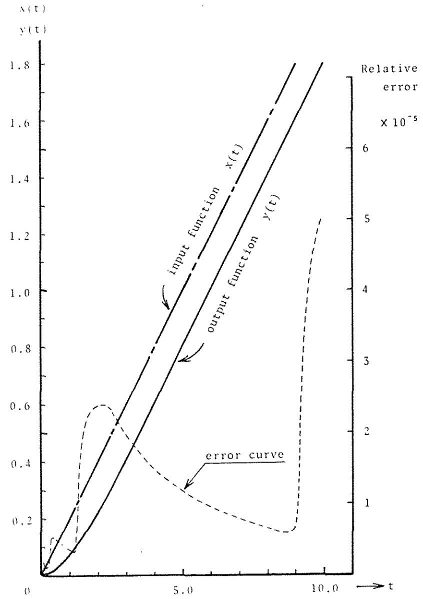


Fig. 11 Transient response of first order lag system to a ramp input, and relative error curve.

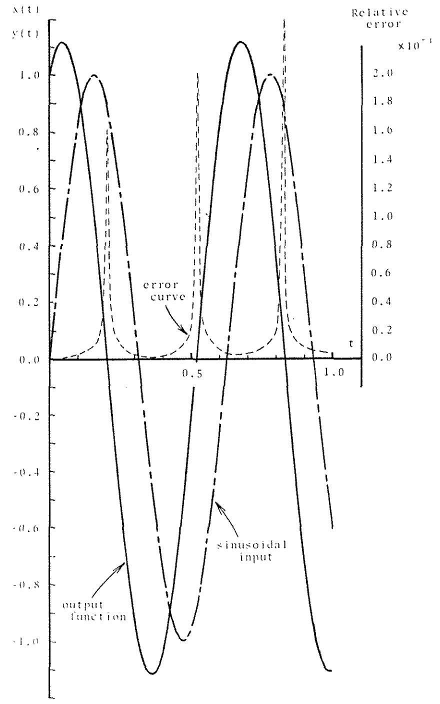


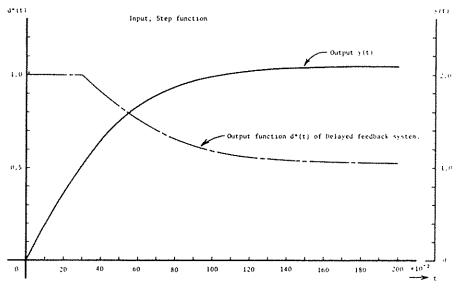
Fig. 12 Sinusoidal response curve of first-order system, and relative error curve.

伝達関数定数を $a=1$，入力関数 $x(t)=\sin(k\cdot\Delta t)$，($k=0,1,2,\cdots\cdots$)，時間区分 $\Delta t=0.01$ とする。

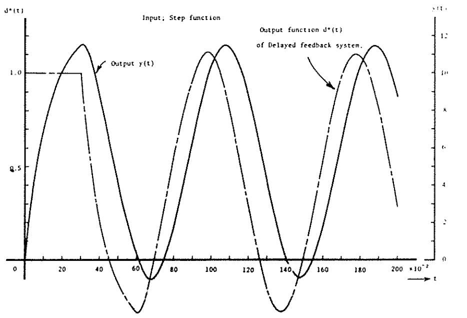
この例のように振動解となる場合は，解が零に近いところで誤差は大きく現われるが，算定の全域を通じて全搬的に誤差の割合を小さくとどめる傾向を示しており，図表の上では厳密解と数値解は全く一致して描かれる。制御系を構成する1部の伝達要素に微分動作を伴うような場合，本例のような周期関数，あるいは急激な変動のある時は入力信号の x_k ならびに x_{k+1} を定める時間区分 Δt の大きさの決定に注意をはらう必要がでてくる。

3.3　むだ時間を含む一次おくれ系の数値計算例

むだ時間を含む制御系の厳密解を逐次計算によって求めることは，かなりの労力を必要とするのが常である。ここでは，(28)式のように与えられるシステム・ダイナミクスの中で，むだ時間を $L=0.3$ のように仮定して，この系が臨界振動ならびにハンチング振動となるための条件を解析的に求めて，実際の逐次計算による解との対比をはかることにした。その結果，*Fig*.13に示すような極めて効果あるよい解として算出しうることを確かめることができた。



(a)　Transient response; In case of critical vibration



(b)　Transient response; In case of hunting.

Fig. 13　Transient response curve of first-order system with dead time to a step input.

臨界振動をとるための条件は，a，b，L の値を固定するとき，$c=\exp\{-(1+aL)\}/L$ を満足することであり，ここでは $a=b=1$，$L=0.3$，$c=0.908439$として計算した。その結果を(a)図に示す。

ハンチング振動となるための条件として，$a=2.5\pi$（振動数 ω に等しい値），$b=1$，$L=0.3$ の値を固定して $c=11.10721$ を得，このときハンチング周期は $T_h==2\pi/\omega=0.8$ となる必要があり，その計算結果は(b)図のように与えられた。

本報では未だ(32)式にかわる安定で精度の良い近似式の導入にまでは至っておらず，これが今後の課題として残されている。

4.　あとがき

制御系の解析や最適設計に有用な手段として用意されたdigital dynamic simulationはすでに幾種類かの積分方式を内蔵しており，それらはuserの適宜，選択使用にまかされている。一般論として簡単な積分方式では，one stepあたりの所要時間は短いが，時間区分を小さくとる必要があり，逆に高度なものはone stepあたりの時間は長く，時間区分は大きくとれる方式となっており，誤差を同じ程度におさえるとの条件で総体的な計算時間をみるならば，ほぼ同程度になるといわれている。

前述の用途や制御系の動的挙動を算定するといった目的で利用されるdigital dynamic simulation は，むしろ低次の積分方式を採用し，なお安全，toughな公式とすることが望ましく，ひいては総体的な計算時間の軽減につなぐことにある。

本報の中で検討された逐次計算公式は，計算の頭初に各伝達関数の諸定数を入力すれば，係数の算定後に，それらの係数を用いて単純な繰り返し計算が実施できるという意味で，その目的にかなうものといえる。

なお，計算にあたってはHITAC－8250(64KB)を使用した。

参　考　文　献

(1)　東，打越，長本：ディジタル・シミュレーションのための安定化数値解法，茨城大学工学部研究集報，第26巻，1978.

(2)　W.J.CUNNINGHAM：Graphical Solution

of Certain Nonlinear Defferential-difference Equations., J.of Frank., 216, 1956.
(3) 東：システム状態方程式の一数値解法，茨城大学工学部研究集報，第24巻，1976.
(4) 松原：遅延帰還の線形理論，電学誌，Vol.79, 1959.