クロスキャパシタのキャパシタンスの基本式の簡単な導き方

荒又光夫，寺門龍一

A Simpler Method of deriving the Fundamental Equation of a Capacitance of a Cross Capacitor

Mitsuo ARAMATA and Ryûiti TERAKADO

Abstract: — The fundamental equation of a capacitance of a cross capacitor, or a rather new face of standard capacitors, was derived by Lampard and van der Pauw. The former treated it as Dirichlet problem, and the latter reached the same result on the way when he discussed a method of determining surface resistivity. The method described in this paper is simpler and more direct one to derive the equation by applying only the conformal representation.

---

1. はじめに

Lampard 氏の提案したクロスキャパシタは標準キャパシタとして重要視されてきている。そのキヤパシタンス（直接キャパシタンス）の基本式は，Lampard 氏が断面円を四等分割したものと，正方形の四辺を用いるものについて Dirichlet の問題として解いて，いずれも $(\log_e 2)/\pi$ 〔Farad/m〕になることを示している。[(1)(2)] 断面が一軸対称である導体を，その対称軸と，それに垂直な一直線によって四つに分割し，相対する二対の導体組が同等になるようにしたものは，前述の場合と同一になることは等角写像の原理から明らかである。[(3)] 実際に用いるのはその内部電界であるが，無限に広い自由空間に置かれると，円と正方形の場合には，外部の直接キャパシタンスも全く同一になる。[(4)] また，van der Pauw 氏は任意の形の薄膜の面抵抗率を求めるのに，領域の周辺に四つの点電極を付ける方法を考究するにあたり，その特別な場合として前記の基本式が得られることに言及している。[(5)]

著者らが述べるものは，静電界に等角写像の方法だけを適用するものであって，多少 van der Pauw 氏の方法に似ているが，もっと直観的であって，簡単な方法であると思う。

2. 理論と方法

まず，図1のように断面円の周を任意に四つに分割した場合のキャパシタンスを求め

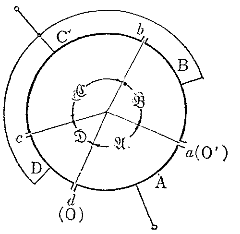
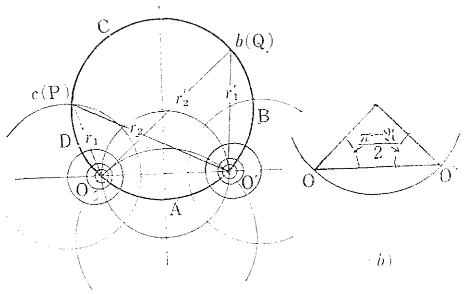


図 1
任意四分割のクロスキャパシタ



(a)

図 2 クロスキャパシタの基本式を導くための説明図

る。図の A, C 導体を電極とし，B, D をガードとし， C と等電位とするときのキャパシタンス（いい換えれば，この導体系で，A, C 間の静電誘導係数）を求める。なお円の場合，反転の理によって，この円の内外で等しい。実際に必要なのは円内である。いま，O, O′ に紙面に垂直に無限に長い平行導線があり， その単位長あたり $\pm 2\pi$ クーロンの電荷を置き，$\varepsilon=1$ として基準化すると図2のような等電位線，電気力線を描くことができるが，太線で示したような円が図1の導体系に d，a が O，O′ に相似に対応するように必ず選ぶことができる。すなわち，図2（b）のように $\overline{OO'}$ を底辺とし，底角を $(\pi-\mathfrak{A})/2$ とする二等辺三角形を作り，その頂点を中心として O, O′ を通る円を描き，その円周上に与えられた導体配置と相似に導体を置くとよい。この円内だけを図3に示す。O, O′ に出入する電気力線は π である。いま，等電位線と電気力線とを交換して考える。すなわち $\widehat{OAO'}$ と $\widehat{OCO'}$ とを正負電極とすることになる。（または， O, O′ に $\pm 2\pi$ アンペアを流すときの等磁位線の一部と磁力線を考え，これを等電位線，電気力線と読みかえるとしてもよかろう。）円弧長方形 PQQ′P′ の $\widehat{PQ}$，$\widehat{Q'P'}$ 間の，この図の電気力線，等電位線により示されるコンダクタンスを求めることになる。$\widehat{PQ}$，$\widehat{P'Q'}$ 間の電位差は π である。それに対して $\widehat{PQ}$，$\widehat{P'Q'}$ に出入する電気力線数を求める。これは，はじめの O, O′ に $\pm 2\pi$ を置くときの， この部分に出入する等電位線数である。したがって P, Q 間の電位差 V_{PQ} がそれであることは明らかである。いま， 図2（a）で $\overline{OP}=r_1$, $\overline{O'P}=r_2$, $\overline{OQ}=r'_2$, $\overline{O'Q}=r_1'$ とすれば

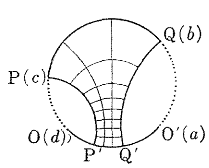


図 3 断面円のクロスキャパシタに関与する電気力線と等電位線

$$V_{PQ}=\log_e \frac{r_2 r_2'}{r_1 r_1'} \quad \cdots\cdots (1)$$

となる，よって，$\varepsilon=1$ と基準化された求めるキャパシタンス C は

$$C=\frac{1}{\pi}\log_e \frac{r_2 r_2'}{r_1 r_1'} \quad \cdots\cdots (2)$$

となる。また，図1で B, D を電極とし A, C をガードとしたときのキャパシタンス C' は，図2（a）で $\overline{OO'}=r_3$, $\overline{PQ}=r'_3$ とすれば

$$C'=\frac{1}{\pi}\log_e\frac{r_2r_2'}{r_3r_3'} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (3)$$

である。初等幾何の定理により

$$r_1r_1'+r_3r_3'=r_2r_2'$$

であるから次の関係が求まる。

$$e^{-\pi C}+e^{-\pi C'}=1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (4)$$

断面任意の形の閉曲線を任意に分割するものは，それを円に写像さえすれば，上に述べた方法が適用できる。円の代りに円の半径が無限に大になったものと考えられる半平面に写像しても，原理的には同様にいくこともちろんである。

もし図4のように二軸対称の場合なら $\mathfrak{A}=\mathfrak{C}, \mathfrak{B}=\mathfrak{D}$ であって $\mathfrak{A}=\alpha$ とおいて

$$r_1=r_1'=r_2\sin\frac{\alpha}{2}=r_2'\sin\frac{\alpha}{2}$$

となり，これを (2) に代入すれば

$$C=\frac{2}{\pi}\log_e\ \mathrm{cosec}\frac{\alpha}{2} \quad\cdots\cdots\cdots\quad (5)$$

となる。

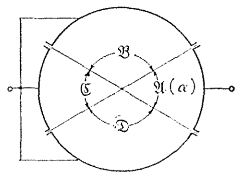


図 4 二軸対称クロスキャパシタ

長方形の相対する二辺を電極とし，他の二辺をガードとするときは，この長方形を円に各辺が対向等長になるように写像することによって，ただいまの方法が活用できる。

Lampard 氏の扱っている実用的なクロスキャパシタの場合，すなわち，四つの導体が等しいときは，図5 (a) のように

$$r_2=r_2'=\sqrt{2}\,r_1=\sqrt{2}\,r_1'$$

であるから，求めるキャパシタンスの基準化されたものは

$$C=\frac{1}{\pi}\log_e 2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (6)$$

となる。図5 (b) はこれと全く等価であって，実用には，この配置が静電しゃへいのためにつごうよく，誤差も小であることが知られている。

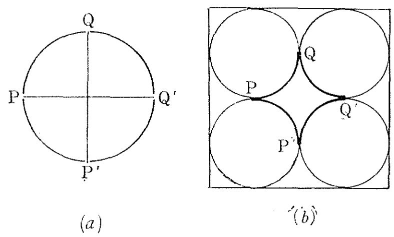


図 5 (b) の糸巻形の部分と (a) は同等

長さ 1 (m) あたりのキャパシタンスは誘電体の誘電率を ε とすれば

$$C=\frac{\varepsilon}{\pi}\log_e 2\ (\mathrm{Farad/m}) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (7)$$

となる

3. 六分割クロスキャパシタ[(6)]

図6のように，A, D は二電極で，(B, F)，(C, E) はガードであって，(B, F) は A と (C, E) は D と同電位であるとする。前述と同じように，b, e に $\pm 2\pi$ クーロンの電荷を置き，$\varepsilon=1$ として基準化すれば，a, c, d, f 点の電位 V_a, V_c, V_d, V_f は

$$V_a=\log_e\frac{r_1'}{r_1},\qquad V_c=\log_e\frac{r_2'}{r_2}$$

$$V_d=\log_e\frac{r_3'}{r_3},\qquad V_f=\log_e\frac{r_4'}{r_4}$$

である。V_a, V_c のうちの小さいものと，V_d, V_f のうちの大なるものをとり，その前者から後者を引いたものが A, D 間の電位差となる。これは求めている A, D 電極間を直接に結ぶ電気力線である。それを π で割って，求めるキャパシタンスが得られる。

A, D が大きさ等しく，その中心角が α で，B, C, E, F が等しく，その中心角が $\beta/2$ であれば，求める基準化キャパシタンスは，図6 (b), (c) を参照して

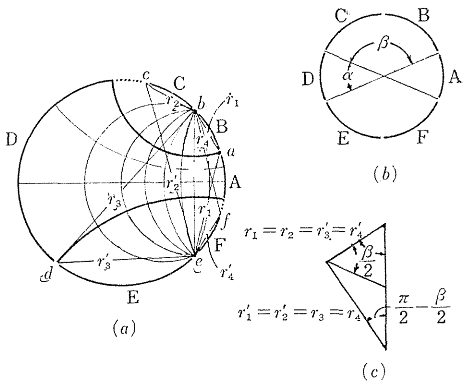


図 6　六分割クロスキャパシタの基本式を導くための図

$$C=\frac{1}{\pi}\log_e\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{2}{\pi}\log_e\cot\frac{\beta}{4}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(8)$$

となる。また，B と C および E と F をおのおの一体として中心角 β の電極とし，A, D はそれぞれ二等分して中心角 $\alpha/2$ として，B と C および E と F 電極のガードとしたときのキャパシタンスは

$$C'=\frac{1}{\pi}\log_e\frac{1+\sin\frac{\beta}{2}}{1-\sin\frac{\beta}{2}}=\frac{2}{\pi}\log_e\cot\frac{\alpha}{4}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(9)$$

となる。よって (8), (9) 式から

$$\tanh^2\left(\frac{\pi}{2}C\right)+\tanh^2\left(\frac{\pi}{2}C'\right)=1\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(10)$$

の関係が得られる。

図7に示すように等しい円柱導体を正六角形に配列して，前述のように用いる場合は $\alpha=\pi/3$, $\beta=2\pi/3$ を (8) 式に代入して

$$C=\frac{1}{\pi}\log_e 3\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(11)$$

となる。この場合は，クロスキャパシタとして寄与する電気力線，等電位線の部分が比較的一様であるのが一つの特徴である。

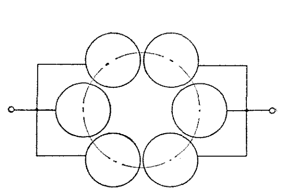


図 7　六円柱形クロスキャパシタ

4. むすび

静電界の基礎理論と等角写像だけを用いて，クロスキャパシタのキャパシタンスをわかりやすく，直観的な方法で計算してみた。さらに同じようにして，六つの円柱導体で，そ

の相対する二つを電極，他の四つをガードとして，各ガードを，それに隣る電極と電位を等しくするときの，両電極間のキャパシタンスの基本式を求めた。これも簡潔な形になることを知った。

これらの方法は，数年にわたり著者らの行なってきた，池田芳郎先生の流れをくむ一連の研究に一貫した考え方によっている。ここに，同先生に深く感謝いたします。

参　考　文　献

(1) A. M. Thompson & D. G. Lampard; Nature, 177 (1956) p. 888

(2) D. G. Lampard: Proc. Instn Elect. Engrs, 104, Pt. C, (1957) p. 271

(3) 荒又，寺門； 茨城大学工学部研究集報，第11巻（昭39）p. 31

(4) 荒又，寺門； 茨城大学工学部研究集報，第14巻（昭42）p. 11

(5) L. J. van der Pauw: Philips Res. Rep., 13 (1958) p. 1

(6) 寺門； クロスキャパシタについての二三の関係，電気学会東京支部大会（昭43）