線形ひずみ速度硬化材の液圧バルジ試験の力学解析

本橋嘉信*，柴田孝夫*

（昭和61年9月8日受理）

A Theoretical Analysis of Hydraulic Bulge Test on a Linear Strain-Rate-Hardening Material

Yoshinobu MOTOHASHI* and Takao SHIBATA*

Abstract — Plastic deformation processes of a material which hardens with strain-rate in a circular-die hydraulic bulge test under the condition of a constant flow rate have been studied theoretically. Analytical solutions derived as series to the second-order approximation are obtained by iteration method using an incremental strain theory with a linear strain-rate-hardening relation as yield criterion. And, numerical calculations of the derived solutions are carried out and the distributions of stress and strain, and the features of various bulge parameters are investigated. When M-value, which is a dimensionless constant and a measure of strain-rate-hardening, is large, the following can be deduced: (i) The bulge profile approaches nearer and nearer to the spherical shape, and in particular the bulge spreads out than the spherical shape in an early stage of deformation. (ii) The thickness strain diffuses from the polar region of the bulge toward the region adjacent to the die, which results in a uniform change of the sheet thickness. (iii) Maximum hydrostatic pressure point, which would be a measure of the onset of plastic instability, shifts toward a larger strain side, implying that forming limit, especially bulging limit would be improved. The accuracy of the derived series solutions is believed to be within enough exactness up to $h/a \simeq 0.6$ at the polar region and up to $h/a \simeq 0.2$ in the regions near to the die where h is the bulge height and a is the radius of the die.

1. 緒　　言

液圧バルジ試験は純粋な張出性が得られるため板材の成形能を評価する試験法としてよく用いられ[(1)~(3)]，その塑性変形過程の理論解析[(4)~(10)]並びに実験的検討など[(11)~(20)]も十分行われてきた。しかしひずみ速度硬化する材料に対して，降伏条件にひずみ硬化を考慮した従来の解析[(4)~(10)]は適用できない。ひずみ速度硬化材料に関する液圧バルジ変形の力学解析および実験は，その理論的興味および実用性の観点から現在までにいくつか行われてきている[(21)~(30)]。しかし初期の解析法[(21)~(24)]は変形中の板厚変化が全板面に一様，バルジ面形状が常に球などの仮定を基礎とした初等的なものであった。極く最近，これらの仮定を用いない解析結果が報告されたが[(25)]，液圧一定または頂点のひずみ速度一定の条件下のものであり，さらに数値解析であるため結果の表示が断片的であり実際の応用上不便と思われた。また，液圧バルジ成形では液流量一定の条件で成形加工されることが多い。

本研究では，ひずみ速度硬化（粘性硬化）材料の液圧バルジ試験に関する理論解析の一つの試みとして液流量一定の条件下での円形ダイス液圧バルジ試験時における変形過程を線形ひずみ速度硬化式を用いて解析した。その際，解析結果が見通しのよい簡単な代数式として表示できることに重点をおき，ひずみ増分理論を用いて反復

＊茨城大学工学部機械工学第二学科（日立市中成沢町）
Department of Mechanical Engineering II, Faculty of Engineering, Ibaraki University, Hitachi 316, Japan

代入法により解析し，第2近似までの級数解として求めた。解析に際し用いた仮定は，材料の等方性，非圧縮性，非ひずみ硬化性，および軸対称変形であること，膜理論が適用できること，である。

2. 記号と基礎方程式

ダイス穴半径 a の円バルジを考える。液圧 P のときのバルジ頂点高さを h，初期および変形後の板厚を t_o および t とする。ここで，$t/a \ll 1$ であって，曲げおよびせん断応力成分は無視できるとする。円柱座標（r，z）をFig.1に示すようにとる。板の要素の変形前後の半径座標をそれぞれ s および r，また円柱角座標を θ，子午面内の曲率半径を ρ_φ，板面要素の法線を含む円周方向面内の主曲率半径を ρ_θ，要素の法線と対称軸(z)軸との交角を φ とする。また σ_φ および σ_θ をそれぞれ子午線および接線方向の応力；ε_φ，ε_θ，ε_t，並びに $\dot{\varepsilon}_\varphi$，

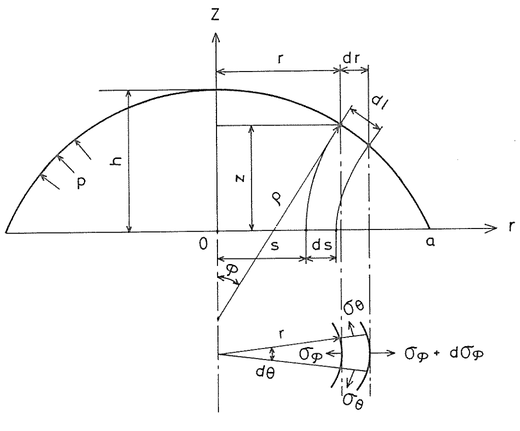


Fig. 1　Profile of a deformed membrane showing notations and co-ordinate system.

$\dot{\varepsilon}_\theta$，$\dot{\varepsilon}_t$ をそれぞれ子午線，円周および板厚方向の対数ひずみ並びにひずみ速度；$\bar{\sigma}$，$\bar{\varepsilon}$ および $\dot{\bar{\varepsilon}}$ をそれぞれ相当応力，相当ひずみおよび相当ひずみ速度とする。板の微小要素の応力の釣合方程式は，板厚方向について：

$$\frac{P}{t}=\frac{\sigma_\theta\ \sin\varphi}{r}+\frac{\sigma_\varphi}{\rho_\varphi} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

子午線方向について：

$$\partial(r\,t\,\sigma_\varphi)/\partial r=t\,\sigma_\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

幾何学的な関係より

$$\rho_\theta=r\ \mathrm{cosec}\,\varphi,\ \rho_\varphi=\sec\varphi\,(\mathrm{d}r/\mathrm{d}\varphi),$$

$$\therefore\ \frac{r}{\rho_\theta}\,\frac{\mathrm{d}\rho_\theta}{\mathrm{d}r}=1-\frac{\rho_\theta}{\rho_\varphi} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

式(1)，(2)および(3)より

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\theta&=\frac{P}{2t}\left(2-\frac{\rho_\theta}{\rho_\varphi}\right)\rho_\theta\ ,\\ \sigma_\varphi&=\frac{P}{2t}\ \rho_\theta\end{aligned}\right\}\cdots (4)$$

円周，板厚および子午線の各方向の対数ひずみ：

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_\theta&=\ln\left(\frac{r}{s}\right),\quad \varepsilon_t=\ln\left(\frac{t}{t_o}\right),\\ \varepsilon_\varphi&=\ln\left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}s}\right)=\ln\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\ \frac{1}{\cos\varphi}\right)\end{aligned}\right\}\cdots (5)$$

故に，ひずみの適合条件式は次式で与えられる。

$$\frac{\mathrm{d}\,\varepsilon_\theta}{\mathrm{d}\ r}=\left(1-\frac{e^{\varepsilon_\theta-\varepsilon_\varphi}}{\cos\varphi}\right)\frac{1}{r} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

応力－ひずみ方程式は，弾性ひずみを無視し，Lévy－Mises の式を用いると，軸対称の平面応力場では

$$\frac{\dot{\varepsilon}_\theta}{2\sigma_\theta-\sigma_\varphi}=\frac{\dot{\varepsilon}_\varphi}{2\sigma_\varphi-\sigma_\theta}=\frac{\dot{\varepsilon}_t}{-(\sigma_\theta+\sigma_\varphi)}\cdots (7)$$

式(7)は非圧縮性の条件，$\dot{\varepsilon}_\theta+\dot{\varepsilon}_\varphi+\dot{\varepsilon}_t=0$，を含む。要素の半径方向変位を $u=r-s$ とすれば，変形の各段階における要素の移動速度は

$$v=(\mathrm{d}r/dh)=\dot{r} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

ここで h は時間の尺度であるが本論ではバルジ頂点の高さを用いている。故に

$$\dot{\varepsilon}_\theta=\frac{v}{r},\quad \dot{\varepsilon}_\varphi=\frac{\partial v}{\partial r}+\dot{\varphi}\tan\varphi \quad \cdots\cdots\cdots (9)$$

降伏条件および境界条件は次章で述べる。

3. 力学解析

一般に，粘性硬化材料の変形応力の強いひずみ速度依

存性は，変形の律速過程が拡散，例えば拡散クリープ，と強く関連すること[31][32]が主因と信じられている。したがって取扱う時間は実時間でなければならず，時間増分を現象の進展とともに単調に増加する他の量の増分で置き換えられないことに注意する必要がある。実時間の要素を数学的記述の中に編入するのは一般に容易ではないが，後述のように送液流量一定の条件下では，実時間の要素を第一近似として取除くことができる。なお，応力分布が求まればそれより応力－ひずみ関係式を用いてひずみ分布を求める際のひずみ速度の時間増分は，実時間である必要はないと考え本論ではhを用いている。

さて，線形ひずみ速度硬化の構成式として，次に示す形式を仮定する：

$$\frac{\bar{\sigma}}{Y} = 1 + M \frac{\dot{\varepsilon}_{(T)}}{\dot{\varepsilon}_N} \qquad \cdots\cdots (10)$$

ここで，Yは初期降伏応力，Mは無次元の定数，$\dot{\varepsilon}_N$はMを無次元化することなどの役割をもつ基準ひずみ速度で，後述のように定数である。また添字（T）は実時間での微分を示す。式(10)は剛塑性体が塑性域でNewton液体的変形を示す場合と解釈できる。

解析の方針は，反復代入法により第2近似まで，(h／a)の級数解として求める訳だが，解の精度の点から級数解の項の次数は高いほどよい。しかし高次項となるほど計算の労苦が飛躍的に増大するので，本論では最大でh／a（$\equiv H$）の6次の項（Pの場合）*1まで求める。Hill[5]がひずみ硬化材について解析した方法と同様に考え，円バルジ変形では近似的に平衡2軸引張応力状態にあること。すなわち$\bar{\sigma}/Y \simeq (\sigma_\varphi + \sigma_\theta)/2Y$，および相当ひずみは第一近似で$\ln(t_0/t)$に等しいと考える。

弾性ひずみを無視すると，バルジ変形は板面の全要素が初期降伏応力値Yに達するまで開始しない。したがって変形初期には全要素で，$\sigma_\theta + \sigma_\varphi = 2Y$　これは変形初期（$h/a \ll 1$）には$\dot{\varepsilon}_{(T)} \ll 1$であるから，$\bar{\sigma} \simeq Y$であることとも符号する。この条件および式(2)を満足する応力成分は，初期には$t = t_0$としてよいから$\sigma_\theta = \sigma_\varphi = Y$。これは応力成分の第1近似解である。さて，式(1)～(9)および境界条件；u，v，$z = 0$（$r = a$），並びに幾何学的関係；$dz/dr = -\tan\varphi$，を用いて解析を実行すると第一近似解として以下の各式が得られる。

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{4\,h\,t_0\,Y}{a^2}, \quad \frac{z}{h} = \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \\ \varphi &= \frac{2\,hr}{a^2}, \quad v = \frac{2\,hr}{a^2}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \\ |\,\varepsilon_t\,| &= \ln\frac{t_0}{t} = \frac{2\,h^2}{a^2}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (11)$$

上式を基に第2近似解を求める。バルジ変形によるひずみ速度は，板厚ひずみが相当ひずみに等しいと仮定しているので，式(11)のε_tを実時間Tで微分し，またvを考慮すると：

$$\frac{d\varepsilon_t}{dT} = \left(\frac{4\,h}{a^2} - \frac{8\,r^2 h^3}{a^6}\right)\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)\frac{dh}{dT} \cdots\cdots (12)$$

である。ここで，単位時間当りの送液量をF（$= dV/dT =$一定，V：バルジ内容積）とする。バルジ形状は第一近似で回転放物面であるから，$dV/dh = \pi a^2/2$。故に，$dh/dT = 2F/\pi a^2$である。したがって

$$\dot{\varepsilon}_{(T)} = \frac{d\varepsilon_t}{dT} = \frac{8\,F}{\pi a^3}\left(\frac{h}{a} - \frac{2\,r^2 h^3}{a^5}\right)\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \cdots\cdots (13)$$

となる。式(13)は相当ひずみ速度を与える。なお，右辺は実時間の要素を含まないことに注意されたい。降伏条件式(10)は

$$\frac{\bar{\sigma}}{Y} = \frac{\sigma_\theta + \sigma_\varphi}{2Y} = 1 + M\left(\frac{h}{a} - \frac{2\,r^2 h^3}{a^5}\right)\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \cdots\cdots (14)$$

となる。ここで基準ひずみ速度を

$$\dot{\varepsilon}_N \equiv 8\,F/\pi a^3 \qquad \cdots\cdots (15)$$

とおいた。すなわち$\dot{\varepsilon}_N$は送液流量とダイス穴半径という実験条件のみで定まる定数である。さて，式(14)を降伏条件，境界条件を，u，v，$z = 0$（$r = a$）とし，式(1)～式(9)を用い解析を実行すると，第2近似解として以

*1　解を，$Q(1 + \alpha H + \beta H^2 + \gamma H^3 + \cdots\cdots)$の形に級数展開した場合の$H$の次数を示し，初項$Q$中の$H$を含んでいない。$Q$中の$H$の次数も含めて考えると$P$の場合，$H$の7次の項までになる。以降用いる$H$の次数表現は全て$Q$中の次数を含んでいない。

下の諸式が求まる*2。なお，数値計算過程中の諸量の有効数字は常に5桁以上を求めている。また，$h/a\equiv H$, $r/a\equiv R$とおいた。

$$\frac{\sigma_\varphi}{Y}=1+M\left(1-\frac{1}{2}R^2\right)H-R^2H^2+M(R^4-2R^2)H^3+\frac{2}{3}R^4H^4+M\left(\frac{4}{3}R^4-\frac{1}{2}R^6\right)H^5-\frac{1}{3}R^6H^6 \quad\cdots\cdots(16)$$

$$\frac{\sigma_\theta}{Y}=1+M\left(1-\frac{3}{2}R^2\right)H+R^2H^2+M(3R^4-2R^2)H^3-\frac{2}{3}R^4H^4-M\left(\frac{4}{3}R^4-\frac{1}{2}R^6\right)H^5+\frac{1}{3}R^6H^6 \quad\cdots\cdots(17)$$

$$\frac{P}{Y}=\frac{4t_0h}{a^2}\left\{1+\frac{3}{4}MH+\left(-\frac{5}{2}-\frac{1}{48}M^2\right)H^2+\left(-\frac{29}{12}M+\frac{1}{64}M^3\right)H^3+\left(\frac{149}{36}-\frac{5}{96}M^2\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{83}M^4\right)H^4+\frac{215}{48}MH^5-\frac{365}{72}H^6\right\} \quad\cdots\cdots(18)$$

$$\frac{z}{h}=(1-R^2)\left[1+R^2\left\{\frac{1}{4}MH+\left(\frac{1}{2}-\frac{11}{48}M^2\right)H^2+\left(\frac{5}{12}M+\frac{10}{47}M^3\right)H^3+\left(-\frac{41}{36}-\frac{9}{28}M^2\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{5}M^4\right)H^4\right\}+R^4\left\{\frac{1}{12}M^2H^2+\left(\frac{2}{3}M-\frac{5}{32}M^3\right)H^3+\left(\frac{1}{9}-\frac{23}{48}M^2+\frac{11}{50}M^4\right)H^4\right\}$$
$$\left.+R^6\left\{\frac{1}{32}M^3H^3+\left(\frac{27}{48}M^2-\frac{5}{56}M^4\right)H^4\right\}+R^8\left(\frac{1}{80}M^4\right)H^4\right] \quad\cdots\cdots(19)$$

$$V=\pi a^3\left[\frac{1}{2}H+\frac{1}{24}MH^2+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{32}M^2\right)H^3+\left(\frac{1}{8}M+\frac{1}{42}M^3\right)H^4-\left(\frac{13}{72}+\frac{17}{260}M^2+\frac{2}{105}M^4\right)H^5\right] \quad\cdots\cdots(20)$$

$$V_S=\pi a^3(H/2+H^3/6) \quad\cdots\cdots(20\cdot a) \qquad V_P=\pi a^3(H/2) \quad\cdots\cdots(20\cdot b)$$

$$\varphi=2RH\left[1+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}R^2\right)MH+\left\{\left(-\frac{1}{2}+\frac{11}{48}M^2\right)+\left(-\frac{1}{3}-\frac{15}{24}M^2\right)R^2+\frac{1}{4}M^2R^4\right\}H^2\right.$$
$$+\left\{\left(-\frac{5}{12}M-\frac{10}{47}M^3\right)+\left(\frac{1}{2}M+\frac{20}{27}M^3\right)R^2+\left(-\frac{9}{16}M^3\right)R^4+\frac{1}{8}M^3R^6\right\}H^3+\left\{\left(\frac{41}{36}\right.\right.$$
$$\left.+\frac{9}{28}M^2+\frac{1}{5}M^4\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{17}{20}M^2-\frac{5}{6}M^4\right)R^2+\left(-\frac{7}{15}+\frac{3}{8}M^2+\frac{15}{16}M^4\right)R^4+\left(\frac{1}{4}M^2\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{20}{49}M^4\right)R^6+\frac{1}{16}M^4R^8\right\}H^4\right] \quad\cdots\cdots(21)$$

$$v=2RH(1-R^2)\left[1+\left(-\frac{3}{4}+\frac{3}{2}R^2\right)MH+\left\{\frac{1}{2}-\frac{5}{2}R^2+\left(\frac{17}{48}-\frac{53}{16}R^2+\frac{5}{2}R^4\right)M^2\right\}H^2\right.$$
$$+\left\{\left(\frac{1}{6}+\frac{81}{8}R^2-\frac{37}{4}R^4\right)M+\left(-\frac{9}{32}+\frac{135}{32}R^2-\frac{277}{32}R^4+5R^6\right)M^3\right\}H^3+\left\{-\frac{1}{12}\right.$$

*2 Hill[(5)] が求めたひずみ硬化材に対する級数解〔文献(5)の式(25)〜(27)〕の係数値には一部誤りがある。

$$-\frac{49}{6}R^2+\frac{41}{6}R^4+\left(\frac{3}{100}-\frac{223}{20}R^2+\frac{335}{8}R^4-\frac{119}{4}R^6\right)M^2+\left(\frac{5}{8}-\frac{65}{14}R^2+\frac{471}{28}R^4\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{447}{20}R^6+\frac{19}{2}R^8\right)M^4\right\}H^4\right] \quad \cdots\cdots (22)$$

$$\varepsilon_\varphi=H^2(1-R^2)\left[1+\left(-\frac{1}{2}+3R^2\right)MH+\left\{\frac{1}{4}-\frac{13}{4}R^2+\left(\frac{17}{96}-\frac{137}{32}R^2+\frac{29}{4}R^4\right)M^2\right\}H^2\right.$$
$$+\left\{\left(\frac{1}{15}+\frac{109}{20}R^2-\frac{163}{10}R^4\right)M+\left(-\frac{9}{80}+\frac{101}{24}R^2-\frac{35}{2}R^4+17R^6\right)M^3\right\}H^3+\left\{-\frac{1}{36}\right.$$
$$-\frac{19}{18}R^2+\frac{155}{18}R^4+\left(\frac{1}{100}-\frac{155}{47}R^2+\frac{327}{8}R^4-\frac{243}{4}R^6\right)M^2+\left(\frac{5}{24}-\frac{71}{18}R^2+\frac{107}{4}R^4\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{347}{6}R^6+\frac{171}{5}R^8\right)M^4\right\}H^4\right] \quad \cdots\cdots (23)$$

$$\varepsilon_t=2H^2(1-R^2)\left[1+\left(-\frac{1}{2}+2R^2\right)MH+\left\{\frac{1}{4}-\frac{7}{4}R^2+\left(\frac{17}{96}-\frac{95}{32}R^2+\frac{17}{4}R^4\right)M^2\right\}H^2\right.$$
$$+\left\{\left(\frac{1}{15}+\frac{77}{20}R^2-\frac{43}{5}R^4\right)M+\left(-\frac{9}{80}+\frac{283}{96}R^2-\frac{21}{2}R^4+\frac{19}{2}R^6\right)M^3\right\}H^3+$$
$$\left\{-\frac{1}{36}-\frac{14}{9}R^2+\frac{40}{9}R^4+\left(\frac{1}{100}-\frac{113}{47}R^2+\frac{185}{8}R^4-\frac{129}{4}R^6\right)M^2+\left(\frac{5}{24}\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{206}{75}R^2+\frac{453}{28}R^4-\frac{1175}{36}R^6+\frac{1121}{60}R^8\right)M^4\right\}H^4\right] \quad \cdots\cdots (24)$$

$$\varepsilon_\theta=|\varepsilon_t|-\varepsilon_\varphi \quad \cdots\cdots (25)$$

$$\varepsilon_{(P)}=2H^2\left[1-\frac{1}{2}MH+\left(\frac{1}{4}+\frac{17}{96}M^2\right)H^2+\left(\frac{1}{15}M-\frac{9}{80}M^3\right)H^3+\left(-\frac{1}{36}+\frac{1}{100}M^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{5}{24}M^4\right)H^4\right] \quad \cdots\cdots (26)$$

$$\varepsilon_{(P)S}=2\ln(1+h^2/a^2) \quad \cdots\cdots (26\cdot a) \qquad \varepsilon_{(P)P}=2h^2/a^2 \quad \cdots\cdots (26\cdot b)$$

$$\frac{a}{\rho_{(P)}}=2H\left[1-\frac{1}{4}MH+\left(-\frac{1}{2}+\frac{11}{48}M^2\right)H^2+\left(-\frac{5}{12}M-\frac{10}{47}M^3\right)H^3+\left(\frac{41}{36}+\frac{9}{28}M^2\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{5}M^4\right)H^4\right] \quad \cdots\cdots (27)$$

$$\rho_{(P)S}=(a^2+h^2)/2h \quad \cdots\cdots (27\cdot a) \qquad \rho_{(P)P}=a^2/2h \quad \cdots\cdots (27\cdot b)$$

ここに添字Sはバルジ面形状が球面の場合を，添字Pは回転放物面の場合を示す。また添字(P)はバルジ頂点部についての値であることを示す。

ところで，バルジ試験ではダイス部での破断防止のため一般にダイス肩に丸みがつけられている[*3]。そのため子午線方向への変形は可能で，境界条件としては$\varepsilon_\theta=\varepsilon_\varphi$（$r=0$），$\varepsilon_\theta=0$（$r=a$），を用いるのが実際的である。すなわち混合境界値問題となる。この場合，ひずみ増分理論では頂点の正しいひずみ値は試策法で求めることになる[(6)(7)]。しかし，級数解の型で頂点のひずみを試策法により求めるのは，z/h，Pなどの表式にも影響をおよぼし実際上困難であるので，$M=0$，すなわち非ひずみ速度硬化の場合の解は第1近似解$(=2h^2/a^2)$に等しいと仮定して境界値問題を処理する。この手順はGleyzal[(4)]，Woo[(7)]らの試策法の第1段階に相当している。このようにして得られた級数解の諸量を以下に示す。

$$v^{(N)}=v+(-R+R^3)H^3+(R/6+17R^3/6-3R^5)H^5 \qquad (22\cdot1)$$

$$\varepsilon_\varphi^{(N)}=\varepsilon_\varphi+(-1/4+3R^2/4)H^4+(1/36+7R^2/12-5R^4/3)H^6 \qquad (23\cdot1)$$

$$|\varepsilon_t^{(N)}|=\varepsilon_\theta^{(N)}+\varepsilon_\varphi^{(N)} \qquad (24\cdot1)$$

$$\varepsilon_\theta^{(N)}=\varepsilon_\theta+(-1/4+R^2/4)H^4+(1/36-R^2/36)H^6 \qquad (25\cdot1)$$

$$\varepsilon_{(P)}^{(N)}=2H^2\left[1-\frac{1}{2}MH+\frac{17}{96}M^2H^2+\left(\frac{1}{15}M-\frac{9}{80}M^3\right)H^3+\left(\frac{1}{100}M^2+\frac{5}{24}M^4\right)H^4\right] \qquad (26\cdot1)$$

なお上述の境界条件処理は$M=0$のときのみのものであることを注意する。$M>0$の場合も考慮した解は今後の課題としたい。

4. 数値計算例および考察

式(16)〜(27)を基に計算した各バルジ変形因子の分布例をFig. 2〜Fig. 7に示す。Fig. 2は子午線方向応力σ_φおよび円周方向応力σ_θの分布例である。$M=0$の場合，σ_θはσ_φより常に大きく，その差は変形量の増加とともに広がる（Fig. 2(a)）。$M=0.5$の場合（Fig. 2(b)），変形初期には頂点以外の各要素で，σ_φはσ_θより大きい。しかし変形量が増すと逆にσ_θがσ_φに勝るようになる。このような応力分布の変形量およびM値による変化がバルジ面の形状，ひずみ分布などを左右している訳である。なお，級数解の精度を比較するため，H^2，H^4，およびH^6の項まで計算した結果を図中に示した。H^4とH^6項までの結果の差は比較的小さく，$h/a=0.2$では両者はほぼ一致する。より高次項までの解はH^4とH^6項までの計算結果の間に収斂すると思われるので，H^4項まででかなり精度の良い解が得られているものと考えられる。$M=1$の場合（Fig. 2(c)）は$h/a=0.4$程度までσ_φはσ_θを上まわり，Mが大きいほど，より大きい変形量までバルジが球面に近い形状に保たれることを示唆している。

Fig. 3に$\bar{\sigma}/Y=(\sigma_\theta+\sigma_\varphi)/2Y$の分布例を示す。$M=0$，すなわち非ひずみ速度硬化の場合，全ての変形段階で$\bar{\sigma}/Y=1$つまり$\bar{\sigma}=Y$であるが，これは当然予期される結果である。一般にMが大きいほど各要素での$\bar{\sigma}/Y$値は大きい。また頂点（$r=0$）で$\bar{\sigma}/Y$は最大となり，ダイス部（$r=a$）では常に$\bar{\sigma}=Y$である。したがってM値が大きいほど板面各要素の変形抵抗が大きく，特に頂点部のそれが大きいため，頂点部での板厚減少が小さく，均一変形に近くなることが推定される。

つぎに液圧Pの変形量依存性であるが，Fig. 4に示すように，一般にM値が大きいほど変形に必要な液圧，したがって材料の変形抵抗が大きいといえる。これは前述の結果とも符号する。さらに，塑性不安定開始の目安となる最大液圧点も大きいひずみ側へ変移する。超塑性材等の実験によれば，最大液圧点は，一般にほぼ$h/a=0.45\sim0.6$の範囲にある。図中にはH^2およびH^4項までの計算結果を参考に示したが，実験が示す最大液

---

*3　ダイス肩丸み部では試片の曲げおよび曲げ伸ばし変形が生じる。またなじみ角αで接触していればその摩擦抵抗も考慮する必要がある。本報では膜理論の仮定によりこれらの影響を無視している。

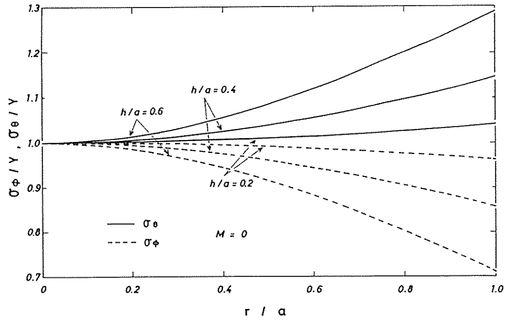


Fig. 2(a)

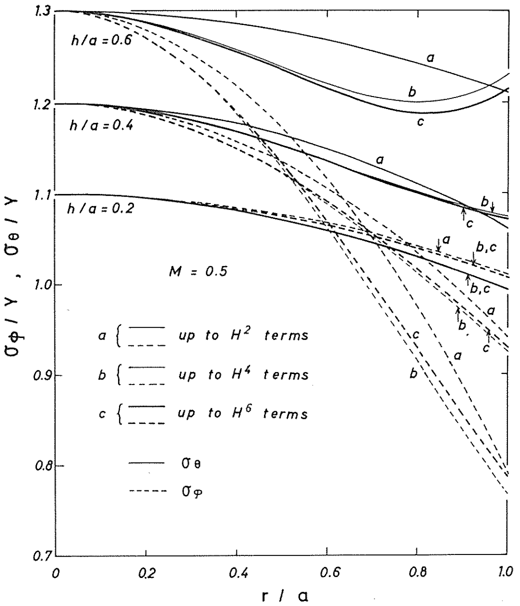


Fig. 2(b)

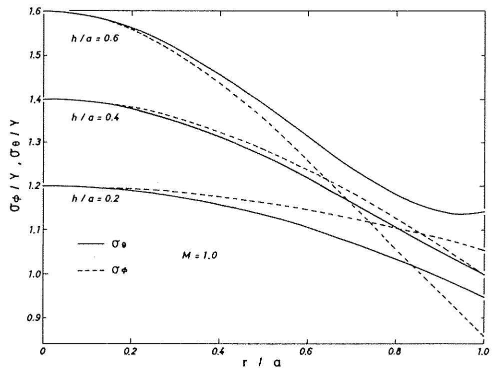


Fig. 2(c)

Fig. 2 Variation of the distributions of the meridian and circumferential stresses as a function of h/a.
(a) $M=0$, (b) $M=0.5$, (c) $M=1$,
ϕ : meridian direction,
θ : circumferential direction

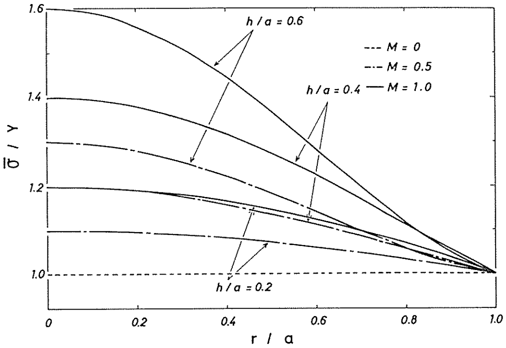


Fig. 3 Variation of the distribution of the equivalent stress.

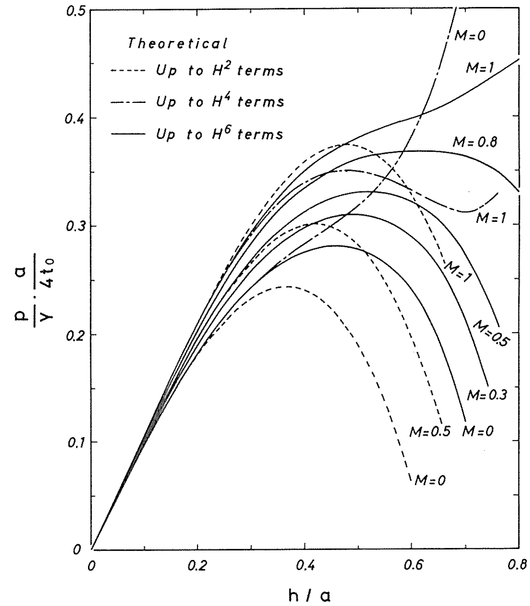


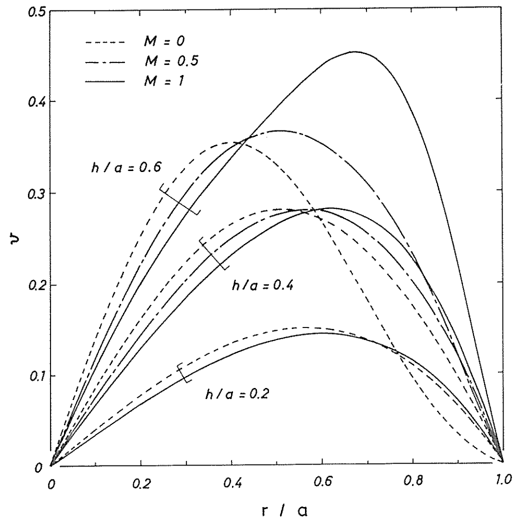
Fig. 4 Variation of the applied hydrostatic pressure with deformation.

圧点との対応性はよくなく，Pに関してはH^4項までの解では不十分のようである。

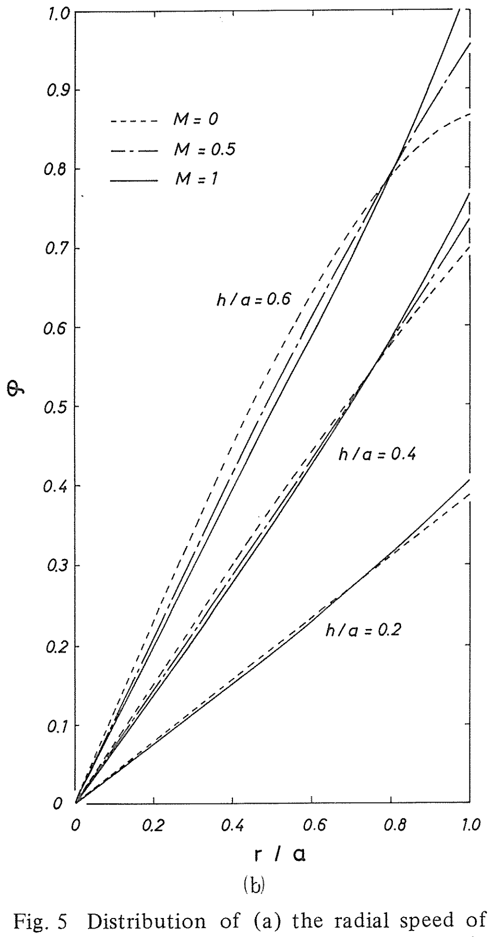
つぎに要素の半径方向変位速度$\boldsymbol{v}$および子午線方向角φの変化であるが〔Fig. 5(a)および(b)〕，M値が大ほど$\boldsymbol{v}$の極大値はダイス周辺側に変移し，ひずみが周辺部へ向かって拡散することが分かる。一方，φ値も周辺部ではMが大ほど大きく，バルジ面がより外側へ脹むことを示している。しかし，Mが小さいと変形の進行とともに$\boldsymbol{v}$の極大値点は頂点側に変移し，頂点周辺部に変形が集中してくる傾向がみられる。

さて，子午線方向ひずみ ε_φ，および円周方向ひずみ ε_θ の分布を示したのがFig. 6である。 φ方向とθ方向のひずみ分布の特徴であるが，Mが大の場合，頂点以外の各要素では$\varepsilon_\varphi > \varepsilon_\theta$ の傾向がある。しかしM値の減少とともにこの関係は変化し，$M=0$ ではどの変形段階においても常に $\varepsilon_\varphi < \varepsilon_\theta$ である。ひずみ分布のM値および変形量依存性は応力分布のそれらと良く相関しており，一般に $\sigma_\varphi > \sigma_\theta$ のとき $\varepsilon_\varphi > \varepsilon_\theta$ である。バルジ面形状について考えると，各要素で子午線方向応力したがってひずみが円周方向のそれらより大きいとき，バルジ面は球あるいはそれより外側へ脹む傾向にあるといえる。なお，$M=1$ で $h/a=0.6$ の場合，ダイス周辺部（$r/a \geqq 0.9$）でε_φ が負となるが，これは解の精度の低下，すなわち導出した級数解の限界を示すもので，周辺部での精度を高めるためにはHのより高次の項を求める必要がある。

つぎに板厚ひずみの分布であるが，Fig.7 に示すように頂点近傍（$r/a<0.4$ 程度）でのひずみ量はMが



(a)



(b)

Fig. 5　Distribution of (a) the radial speed of an element v, and (b) the meridian angle ϕ, as a function of M at different points of h/a.

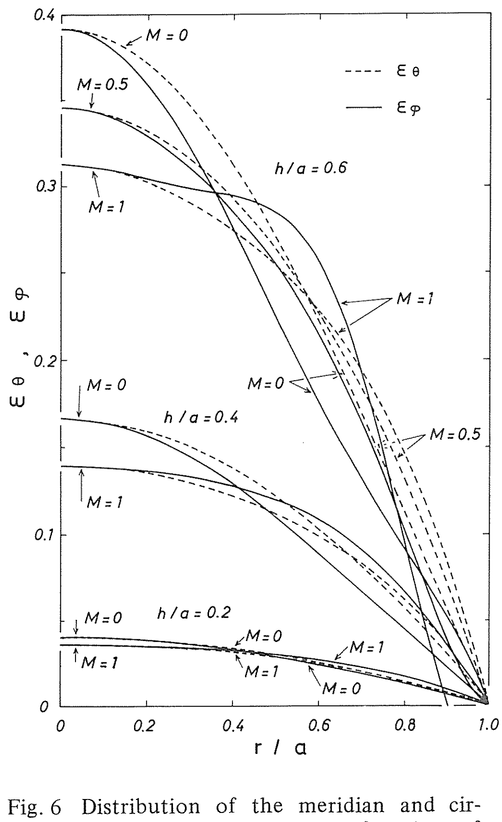


Fig. 6　Distribution of the meridian and circumferential strains as a function of M-value at different points of 　$/a$.

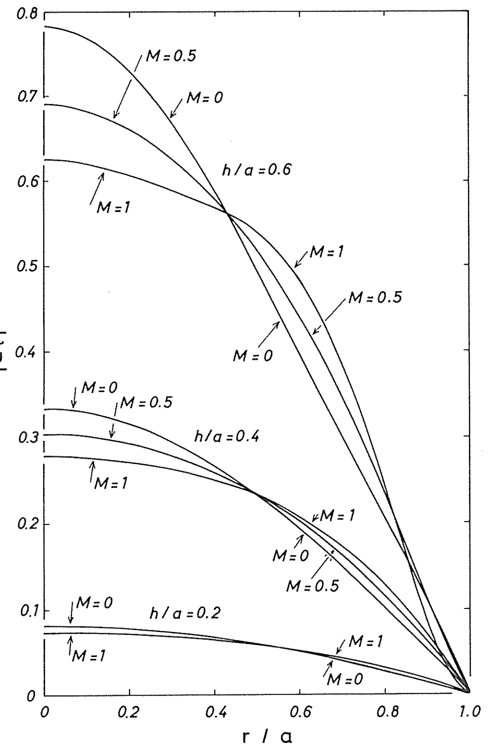


Fig. 7 Distribution of the thickness strain.

大ほど小さいが，周辺部（$r/a>0.5$ 程度）では逆に大きくなり，Mが大ほどひずみが周辺部へ拡散し板厚分布の一様化が促進されることが分かる。

本報では，バルジ断面形状〔式(19)〕，バルジ内容積〔式(20)〕，頂点の板厚ひずみおよび曲率半径〔式(26)および(27)〕，$\varepsilon_\theta^{(N)}$，$\varepsilon_\varphi^{(N)}$，および $\varepsilon_t^{(N)}$，〔式（25・1），（23・1）および（24・1）〕，などの数値計算例は示さなかったが，これらは別報[33]にて，超塑性材の実験結果と合わせて示す予定である。

以上の結果を基に簡単な考察を加える。まずM値が大きいほどバルジ面はより球に近い形状に変形し，また頂点部の板厚減少も小さくひずみは周辺部に向かって拡散し，板厚変化は一様に近くなり，さらに塑性不安定開始の目安となる最大液圧点も大きいひずみ側へ変移し，成形能が増加するといえる。一方，成形に必要な液圧も大きくなるが，高々数十パーセントの増加にとどまり，M値が大きいほど張出し成形性が良好なことが推定できる。

本研究では単位時間当りの送液量Fが一定の場合を取扱ったが，このF値の大きさを変えたときどうなるかを考える。降伏条件式(14)は直接にFを含まない。これは基準ひずみ速度が $\dot{\bar{\varepsilon}}_N=8F/\pi a^3$ であるためで，Fの変化はこの $\dot{\bar{\varepsilon}}_N$ の変化として表われるが，Fが一定の実験条件では $\dot{\bar{\varepsilon}}_N$ は常に一定である。したがって，Fの大きさを変えても降伏条件式に変化はなく，バルジ変形過程は送液量の大きさに影響されないことになる。ただし，M値がFに依存する場合は当然影響をうけることになる。

さて，級数解の適用範囲であるが，その精度は一般に h/a，r/a，およびMの値が大きいほど低下する。すなわち要素の位置等により精度の程度は異なる。上述の数値計算例から，3章で導出した級数解は，バルジ頂点近傍では最大液圧点（$h/a\sim0.6$）程度まで，周辺部では $h/a\sim0.2$ 程度までが良好な精度内にあるようである。最大液圧点では既に塑性不安定状態にあると思われるので[34]，それ以後の変形領域での解の精度の要求は弱く，本報で得た級数解は境界条件処理に関しては今後の課題を後すものの，頂点近傍領域に対する解の精度は実用上十分と思われる。

ところで，Hill[5] は線形ひずみ硬化の場合について，級数解を H^2 項までであるが求めているので，それと本論の結果とを比較してみよう。降伏条件式(14)をHill が用いた式 $\{(\sigma_\theta+\sigma_\varphi)/2Y=1+H'(2h^2/a^2)(1-r^2/a^2)\}$，ここに$H'$はひずみ硬化の程度を表わす無次元量，と比較すると，H^2 項まで，すなわちH^3以上を微小項として無視すれば，式(14)，右辺の（$2r^2h^3/a^5$）項は高次の微小項となる。したがって，$M=2hH'/a$とおけば両式は一致する。つまり，本研究で導出した各式のH^2項までについて，Mを $2hH'/a$に置き換えれば，Hillが求めた式に一致することになる。なお，Hillの級数解には一部誤り，例えば文献(5)の式(25)の右辺の係数 $7H'$ は正しくは，$3H'$，があることを指摘しておく。本研究で得たひずみ速度硬化の場合の解とHillのひずみ硬化の解を結合すれば，ひずみ速度硬化とひずみ硬化の両方が生じるような材料のバルジ変形の解析が可能であると思われる。

5. 結　　言

ひずみ速度硬化（粘性硬化）する材料のバルジ試験に関する理論的基礎資料を得るため，送液流量一定の条件下での円形ダイス液圧バルジ試験時における変形過程を，線形ひずみ速度硬化式を降伏条件として，ひずみ増分理論を用いて，反復代入法により解析し第2近似までの級数解として求めた。そして，導出した級数解の数値計算

を行い，各バルジ変形因子の分布を調べたところ，以下の結論が得られた。

(1) Mが0でないとき，変形初期には頂点以外の各要素で，子午線方向応力 σ_φ は円周方向応力 σ_θ に勝り，M値が大きいほど，その差は大きく，かつ，より大きい変形量まで $\sigma_\varphi > \sigma_\theta$ の関係が続く。$\sigma_\varphi > \sigma_\theta$ のとき $\varepsilon_\varphi > \varepsilon_\theta$ であり，その場合，要素の半径方向変位速度 v の極大値はダイス周辺側に変移し，また子午線方向角 φ も周辺部で大きく，バルジ面は球状またはそれより外側に張む傾向がある。

(2) 変形量が大きくなるとバルジ形状は回転放物面状に近づいてくる。この傾向はM値が小さいほどより低ひずみ領域から始まる。しかし，$M=0$（この場合，常に $\sigma_\varphi < \sigma_\theta$ である。）でも，バルジ形状は少くとも回転放物面よりは外側に脹む傾向がある。

(3) M値が大きいほど，板面各要素での変形抵抗は全体的に大きく，また，頂点に向かうほど変形抵抗は大きくなるため，頂点部での板厚減少が相対的に小さくなり，ひずみは周辺部に向かって拡散し，板厚変化は一様に近くなる。さらに，塑性不安定開始の目安となる最大液圧点も大きいひずみ側へ変移し，M値が大ほど，成形限界，特に張出し成形性が向上することが分かる。

(4) 導出した級数解の精度は，バルジ頂点部近傍領域では最大液圧点（$h/a \simeq 0.6$）程度まで，ダイス周辺部では $h/a \simeq 0.2$ 程度までが十分な精度内にあると考えられる。

(5) バルジ面形状，ひずみ分布などは，M値が大きな影響をうけないような液流量したがって変形速度の変化範囲内では，液流量にほとんど依存しないことが予想される。

参　考　文　献

(1) 中島，他2名，塑性と加工，9－89（昭43），363.

(2) 菊間，中島，機論，45－398，A（昭54），1267.

(3) Ragab，A.R. and Baudelet，B.，J. Mech. working Tech. 6（1982），267.

(4) Gleyzal，A.，J. Appl. Mech.，15（1948），288.

(5) Hill，R.，Philos. Mag.，41－322（1950），1133.

(6) 山田，東大生研報告，11－5（昭36），240.

(7) Woo，D. M.，Int. J. Mech. Sci.，6（1964），303.

(8) Storakers，B.，Int. J. Mech. Sci.，8（1966），619.

(9) Wang，M.M. and Shammamy，M.R.，J. Mech，Phys. Solids，17（1969），43.

(10) Hill，R. and Storakers，B.，J. Mech. Phys. Solids，28（1980），27.

(11) Mellor，P. B.，J. Mech. Phys. Solids，5（1956），41.

(12) Weil，N.A.，Trans ASME，J. Appl. Mech.，（1952－12），621.

(13) Johnson，W. and Duncan，J. L.，Sheet Met. Industr.（1965－4），271.

(14) 宮川，西村，塑性と加工，8－76（昭42），238.

(15) Willson，H. 外2名，J. Mech. Eng. Sci.，13－6（1971），397.

(16) 西村，宮川，機論第1部，38－309（昭47），968.

(17) Shang，H. M. and Hsu，T. C.，Trans. ASME，J. Eng. Industry，101－8（1979），341.

(18) Ilahi，M.F.，外2名，Int. J. Mech. Sci.，23－4（1981），221.

(19) Shang，H.M. and Shim，V. P.W.，Trans ASME，J. Eng. Industry，104－8（1982），279.

(20) Nakamachi，E. 外2名，Trans. ASME，J. Appl. Mech. 49－9（1982），501.

(21) Jovane．F.，Int. J. Mech. Sci.，10（1968）403.

(22) Cornfield，G. C. and Johnson，R.H.，Int. J. Mech. Sci.，12（1970），479.

(23) Holt，D. L.，Int. J. Mech. Sci.，12（1970），491.

(24) Belk，J. A.，Int. J. Mech. Sci.，17（1975），505.

(25) Brandon，J. F.，外2名，Int. J. Mech. Sci.，21－7（1979），379.

(26) Thomsen，T. H.，外2名，Metals Engi. Quarterly（May）10，2（1975－5），1.

(27) Hestbech，J.，外2名，J. Inst. Met.，99（1971），306.

(28) 西村，宮川，機誌，75－639（昭47），128.
(29) 町田，中川，塑性と加工，16－177（昭50），988.
(30) Hsu, T. C., and Bidhendi, I. M., Trans. ASME, J. Engi, Mater. Tech., 104－1 (1982), 41.
(31) 本橋，柴田，軽金属，31－7（昭56），469.
(32) 本橋，柴田，宮川，軽金属，33－5（昭58），270.
(33) 本橋，柴田，茨城大学工学部研究集報，34(1986)，155.
(34) 山田，青木，塑性と加工，7－67（昭41），393.