フォン・ノイマン環のクロス積の部分環について

芳　賀　義　則*

(1971年9月10日受理)

On Subalgebras of a Cross Product von Neumann Algebra

by Yoshinori HAGA

Abstract : — In [5] we investigated the Dye correspondence as the dual of the Galois correspondence to make clear the structure of Fundamental Theorem of Galoi Theory for von Neumann algebras. Making use of that correspondence, we attempt in the present paper to give the explicit form of intermediate subalgebras of a cross product von Neumann algebra. It becomes possible by introducing Dye's notion of determining functions.

Let $\mathscr{A}$ be a finite von Neumann algebra and G be a countable discrete group of automorphisms acting freely on $\mathscr{A}$. A determining function on G is a mapping $g \to E_g$ of G into the set of all central projections of $\mathscr{A}$ satisfying $E_g E_{gh} = E_g g(E_h)$ for all g, h in G and $E_1 = I$. Then our main results are as follows. The lattice of all intermediate subalgebra of $G \otimes \mathscr{A}$ and that of all determining functions on G are isomorphic. If a determining function E_g is associated to an intermediate subalgebra $\mathscr{B}$ by this isomorphism, then $\mathscr{B}$ has the following explicit form, $\mathscr{B} = \{\sum_{g\in G} g \otimes E_{g^{-1}} A_g \in G \otimes \mathscr{A}\}$.

ま え が き

芳賀一武田[5]はフォン・ノイマン環におけるガロア理論のいわゆる基本定理についてその構造を明らかにした。それはクロス積を用いていえば，既に Dye [4] によって可換な場合には示されていた対応を非可換な場合に拡張したものとガロア対応とが，本質的に同じ性格のものであることを示すことによって解明された。即ち，ガロア対応は Dye の対応と双対の関係にあることが示された。ところで， その Dye の対応において示された中間部分環と充満部分群との対応は，ガロア理論の立場からだけではなく，フォン・ノイマン環の研究の一般的な立場から，特に型の問題の研究に対して有力な役割を果たすこと

* 茨城大学工業短期大学部数学科

が期待される。ここではクロス積の部分環を，Dyeの対応を利用することによって明確な形に表わすことを試みる。それは Dye [4] による決定関数の概念を導入することによって部分環への期待写像 (expectation) を明確に表示することができることから明快に解決される。

以下，中間部分環，充満部分群，決定関数の間の関連を調べることが主題になる。第1節では[5]の結果をふり返ることによって，次節以降の準備をすると共に，中間部分環と充満部分群との対応を述べる。第2節では決定関数を導入して，Dye [4] の結果が非可換な場合へ拡張されることを示し，充満部分群と決定関数との対応を与える。第3節では決定関数を用いて，中間部分環とその上への期待写像とを明確に表示する。最後の第4節では充満部分群が正規である場合について考察する。

以後，$\mathscr{A}$ はフォン・ノイマン環とし，恒等元は I で表わす。特に2節以降では $\mathscr{A}$ は有限型に限る。$\mathscr{A}$ 上の＊一自己同型を単に自己同型ということにする。G は $\mathscr{A}$ 上の自己同型の群とし，単位元は1で表わす。特に断らない限り G は可算群であるとし，また2節以降では $\mathscr{A}$ 上に自由に作用するものとする。$\mathscr{A}$ の中心は $\mathscr{Z}$ で表わし，$\mathscr{A}_p$, $\mathscr{A}_u$ はそれぞれ $\mathscr{A}$ の射影全体，ユニタリ全体の集合とする。$\mathscr{Z}_p$, $\mathscr{Z}_u$ 等も同様である。またヒルベルト空間の作用素の集合 S に対して $\mathscr{A}$[S] は S で生成されるフォン・ノイマン環を表わすものとする。なお，ヒルベルト空間はすべて可分であるとする。

1. [5] から必要な部分を抜き出してまとめる。

定義 1.1. (Kallman [6]) $\mathscr{A}$ の自己同型 α が $\mathscr{A}$ 上で自由に作用するとは，$\mathscr{A}$ の元 A が任意の $B\in\mathscr{A}$ に対して

$$AB=\alpha(B)A \tag{1.1}$$

を満たすならば，$A=0$ であることをいう。群 G が $\mathscr{A}$ 上で自由に作用するとは，単位元1以外の G の元がすべて $\mathscr{A}$ 上で自由に作用することとする。

定義 1.2. ([5; Def. 2]) P を $\mathscr{A}$ の中心射影とするとき，$\mathscr{A}$ 上の自己同型 α が P 上で局所内部であるとは，$\mathscr{A}$ の適当な部分ユニタリ $V_{\alpha,P}$: $V_{\alpha,P}V^*_{\alpha,P}=V^*_{\alpha,P}V_{\alpha,P}=P$ によって

$$\alpha(PB)=V_{\alpha,P}BV^*_{\alpha,P} \qquad (B\in\mathscr{A})$$

と表わされることをいう。

補題 1.3. ([5; Lemma 2]) $\mathscr{A}$ 上の自己同型 α が，$\mathscr{A}$ の元 A に対して (1.1) を満たすならば，α は A の中心台 (central support) 上で局所内部な自己同型である。

容易に分かるように，その上で α が局所内部であるような唯一つの極大中心射影 F_α が存在する。そして

系 1.4. ([5; Cor. to Lemma 2], [3; p. 125]) α が $\mathscr{A}$ 上で自由に作用するための必要十分条件は $F_\alpha=0$ なることである。

次に $F(\alpha, \beta)=F_{\alpha^{-1}\beta}$ とおいて

定義 1.5. ([5; Def. 3], [3; Def. 3. 1]) G を $\mathscr{A}$ 上の自己同型の(可算とは限らない)群とするとき，

$$\sup_{g\in G} F(\alpha, g)=I$$

であるような $\mathscr{A}$ 上の自己同型全体を $[G]$ で表わし G で定まる充満群という。また，$G=[G]$ なる群は充満群であるという。

$\mathscr{A}$ 上の2つの自己同型 α と β が，$\mathscr{A}$ の或るユニタリ元 V によって $\alpha(A)=\beta(VAV^*)$ の関係にあるとき，$\alpha\sim\beta$ と書くことにする。即ち，α と β が内部自己同型を無視すれば一致することを示す記号である。

補題 1.6. ([5; Lemma 3], [3; Lemma 3. 1]) G を $\mathscr{A}$ 上の自己同型の群とすれば

(i) $[G]$ も $\mathscr{A}$ 上の自己同型の群である。

(ii) $[[G]]=[G]$.

(iii) $[G]$ は次のように表わされる $\mathscr{A}$ 上の自己準同型 α の全体と一致する。即ち，

$$\alpha\sim\textstyle\sum_n P_n g_n. \tag{1. 2}$$

ただし，g_n は G の元，$\{P_n\}$ と $\{g_n^{-1}(P_n)\}$ はそれぞれ互いに直交する中心射影の族で，和は共に I であるとする。

(iv) $\mathscr{A}$ が有限型で，G の元は $\mathscr{A}$ の跡 (trace) を不変にするとすれば，$[G]$ の元も同様である。

G が可算のとき (1.2) は $\alpha\sim\sum_g P_g g$ と書いてよいが，このとき $\alpha^{-1}\sim\sum_g g^{-1}(P_g)g^{-1}$ である。ただし，ユニタリは α に対するものを V とするとき，$U=\sum_g g(V^*)P_g$ をとる。実際，U がユニタリであることは簡単に分かるし，$\alpha\alpha^{-1}$ に対応するものを計算すると

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_g P_g g(V\{\sum_h h^{-1}(P_h)h^{-1}(UAU^*)\}V^*)&=\textstyle\sum_g g(V\{\sum_h g^{-1}(P_g)h^{-1}(P_h)h^{-1}(UAU^*)\}V^*)\\&=\textstyle\sum_g g(Vg^{-1}(P_g UAU^*)V^*)=\sum_g g(Vg^{-1}\{P_g(\sum_h h(V^*)P_h)A(\sum_k k(V^*)P_h)\}V^*)\\&=\textstyle\sum_g g(Vg^{-1}\{P_g g(V^*)Ag(V)\}V^*)=\sum_g P_g g(VV^*)Ag(VV^*)=A.\end{aligned}$$

$\alpha^{-1}\alpha$ に対応するものも同様である。また，$\beta\sim\sum_g Q_g g$ とすると，$\alpha\beta\sim\sum_{g,h}P_g g(Q_h)gh$ である。実際，

$$\begin{aligned}\alpha\beta(A)&=\textstyle\sum_g P_g g(V\{\sum_h Q_h h(WAW^*)\}V^*)\\&=\textstyle\sum_{g,h}P_g g(Q_h)gh(h^{-1}(V)WAW^*h^{-1}(V^*))\end{aligned}$$

で，$h^{-1}(V)W$ はユニタリであり，$P_g g(Q_h)$ は補題 1.6における条件を満たす中心射影である。

補題 1.7. α を $\mathscr{A}$ 上の自己同型，G は $\mathscr{A}$ 上の自己同型の任意の群とする。このとき次のような $\beta\in[G]$ と唯一つの極大中心射影 $E([G], \alpha)$ が存在する。

$$E([G], \alpha)\alpha\sim E([G], \alpha)\beta. \tag{1. 3}$$

そして，

(1. 4)　　　　$E([G], \alpha)=\sup_{\gamma\in[G]}\alpha(F(\alpha, \gamma))=\alpha(F(\alpha, \beta))$。

証明. [5; Lemma 7] を僅かに修正したものに過ぎず，容易に分かる。

次に，クロス積と期待写像について簡単に説明する。$\mathscr{A}$ は可分なヒルベルト空間 $\mathbf{H}$ に作用するとする。まず，$G\otimes\mathbf{H}$ は形式和 $\sum_{a\in G}a\otimes\xi_a$ ($\xi_a\in\mathbf{H}$) で $\|\sum a\otimes\xi_a\|_{G\otimes\mathbf{H}}=(\sum\|\xi_a\|^2_{\mathbf{H}})^{\frac{1}{2}}<\infty$ なるもの全体からなる可分なヒルベルト空間とする。もちろん，演算は各点毎に，内積は $<\sum a\otimes\xi_a, \sum a\otimes\eta_a>=\sum<\xi_a, \eta_a>$ で定義する。この $G\otimes\mathbf{H}$ 上で，作用素 $g\otimes A$ ($g\in G$, $A\in\mathscr{A}$) を

$$(g\otimes A)(a\otimes\xi)=ag^{-1}\otimes a(A)\xi$$

で定義すると，作用素の積と対合は

$$(g\otimes A)(h\otimes B)=gh\otimes h^{-1}(A)B,$$
$$(g\otimes A)^*=g^{-1}\otimes g(A^*)$$

で定義できる。クロス積 $G\otimes\mathscr{A}$ とは，ヒルベルト空間 $G\otimes\mathbf{H}$ 上で $\{g\otimes A \mid g\in G, A\in\mathscr{A}\}$ によって生成されるフオン・ノイマン環をいう。このとき，$1\otimes\mathscr{A}$ は $G\otimes\mathscr{A}$ の部分環で $\mathscr{A}$ と代数同型であるから，以後 $\mathscr{A}$ と $1\otimes\mathscr{A}$ は同一視する。また，$g\otimes I$ は $G\otimes\mathbf{H}$ 上のユニタリ元で $\mathscr{A}$ 上に自己同型 g を誘導する。なお，$G\otimes\mathscr{A}$ は $\mathscr{A}$ の表現に無関係に定まることは Zeller-Meier [9] によって示されている。$\mathscr{A}$ 上の忠実かつ正規なステート p は $G\otimes\mathscr{A}$ 上に忠実かつ正規に拡張できるが，p-ノルムを $\|T\|_p=(p(T^*T))^{\frac{1}{2}}$ によって定義するとき，$G\otimes\mathscr{A}$ の任意の元 T は p-ノルムについて

$$T=\sum_{g\in G}g\otimes T_g \qquad (T_g\in\mathscr{A})$$

と展開できる。

$\mathscr{A}$ からそのフオン・ノイマン部分環 $\mathscr{B}$ への期待写像とは，$\mathscr{A}$ から $\mathscr{B}$ への正値 $*$-線形な写像 Φ で，$\Phi(I)=I$ かつ

(1. 5)　　　　$\Phi(AB)=\Phi(A)B$　　　　$(A\in\mathscr{A}, B\in\mathscr{B})$

なるものをいう。$\mathscr{B}$ は Φ で動かない作用素全体と一致する。特に $\mathscr{A}$ が有限型のとき，その忠実かつ正規な跡を τ とすると，$\mathscr{A}$ から任意のフォン・ノイマン部分環 $\mathscr{B}$ 上への忠実かつ正規な期待写像で

$$\tau(\Phi(A)B)=\tau(AB) \qquad (B\in\mathscr{B})$$

なるものが唯一つ存在することは周知である。

$G\otimes\mathscr{A}$ のフオン・ノイマン部分環で $\mathscr{A}$ を含むものを中間部分環とよぶことにする。$G\otimes\mathscr{A}$ の中間部分環と $[G]$ の充満部分群との対応について [5] の結果をまとめておく。

$$N(\mathscr{A})=\{U\in(G\otimes\mathscr{A})_u \mid U\mathscr{A}U^*=\mathscr{A}\}$$

とすると，$N(\mathscr{A})$ の元は $\mathscr{A}$ の自己同型を誘導する。U で誘導される自己同型を φ_U で表わすことにすると，長田 [2] の定理は $\mathscr{A}$ が非可換な場合へ次のように拡張される。

それを用いて，Dye の対応の非可換な拡張が得られる。

定理 1.8. ([5; Theorem 1]) G が $\mathscr{A}$ 上で自由に作用すれば，充満群 $[G]$ の元 α は $G\otimes\mathscr{A}$ の内部自己同型に拡大できる。逆に $N(\mathscr{A})$ の元 U で誘導される $\mathscr{A}$ 上の自己同型は充満群 $[G]$ に属する。

定理 1.9. ([5; Theorem 2], cf. [4; Proposition 6. 1]) $\mathscr{A}$ は有限型で，G は $\mathscr{A}$ 上で自由に作用するとする。このとき，$[G]$ の充満部分群 K 全体の束と，$G\otimes\mathscr{A}$ の中間部分環 $\mathscr{B}$ 全体の作る束とは同型である。その同型は，K に中間部分環

$$\mathscr{B}(K)=\mathscr{R}[U \mid \varphi_U\in K] \tag{1.6}$$

を，$\mathscr{B}$ には充満部分群

$$K(\mathscr{B})=\{\varphi_U \mid U\in N(\mathscr{A})\cap\mathscr{B}\} \tag{1.7}$$

を対応させることによって得られる。

次の補題は上の定理の証明に用いられたものであるが，後で必要になるので上げておく。

補題 1.10. $\mathscr{B}$ を $G\otimes\mathscr{A}$ の中間部分環，Φ を $\mathscr{B}$ 上への期待写像とするとき，任意の $U\in N(\mathscr{A})$ に対して $\Phi(U)$ は部分等距離作用素で，その原射影は $E(K,\varphi_{U^*})\in\mathscr{Z}$，終射影は $E(K,\varphi_U)\in\mathscr{Z}$ である。

証明. $\Phi(U)$ が部分等距離作用素であることは [5; Lemma 5] である。また，[5; Lemma 8] により適当なユニタリ元 $W\in N(\mathscr{A})\cap\mathscr{B}$ によって $\Phi(U)=E(K,\varphi_U)W$ と書けるから，$\Phi(U)$ の終射影は

$$\Phi(U)\Phi(U)^*=E(K,\varphi_U)WW^*E(K,\varphi_U)=E(K,\varphi_U)$$

となる。そして原射影は

$$\Phi(U)^*\Phi(U)=\Phi(U^*)\Phi(U^*)^*=E(K,\varphi_{U^*}).$$

補題 1.11. ([5; Lemma 4], [1; Cor. to Lemma 2. 1]) G が $\mathscr{A}$ 上で自由に作用するならば，

$$(G\otimes\mathscr{A})\cap(1\otimes\mathscr{A})'=1\otimes\mathscr{Z}$$

この補題の証明は簡単な計算によって得られるが，同様の計算で，G が $\mathscr{A}$ 上で自由に作用しているときは

$$(G\otimes\mathscr{A})\cap(G\otimes\mathscr{A})'=1\otimes\mathscr{Z}^G$$

が得られる。ただし，$\mathscr{Z}^G$ は G のすべての自己同型によって不変な $\mathscr{Z}$ の元の集合とする。これは $G\otimes\mathscr{A}$ の中心が $\mathscr{Z}^G$ であることを示し，従ってもし G が $\mathscr{Z}$ 上でエルゴ

ード的であれば，$G\otimes\mathscr{A}$ は因子である。特に，$\mathscr{A}$ が因子であれば，$\mathscr{A}$ の外部自己同型群 G とのクロス積は常に因子である。([7; Theorem 1]).

2. 此の節では Dye による決定関数の概念を導入し，[4] の結果の中で我々の必要とするものが，$\mathscr{A}$ が非可換な場合にも成立することを確かめる。

定義 2.1. G をフォン・ノイマン環 $\mathscr{A}$ 上の自己同型の（可算とは限らない）任意の群とする。G 上の決定関数とは，G から $\mathscr{Z}_p$ 上への写像 $g\to E_g$ で

(2.1)　$E_gE_{gh}=E_gg(E_h)\quad(g,\ h\in G)$　かつ　$E_1=I$

なるものをいう。

例えば，P を定まった一つの中心射影とすると

(2.2)　$E_g=Pg(P)\quad(g\neq 1),\qquad E_1=I$

は決定関数である。また

(2.3)　$E_g=F(g,\ 1)$

も決定関数である。実際，

$$g(F(h,\ 1))=F(hg^{-1},\ g^{-1})=F(ghg^{-1},\ 1)$$

と $F(g,\ 1)$ 上では g が内部自己同型であることに注意すると

$$F(g,\ h)g(F(g,\ 1))=F(g,\ 1)F(ghg^{-1},\ 1)=F(g,\ 1)F(gh,\ 1)$$

これと $F(1,1)=I$ によって $F(g,\ 1)$ は決定関数である。

決定関数の基本的な性質として，

(2.4)　$g(E_{g^{-1}})=E_g\quad(g\in G)$

実際，(2.1) で $h=g^{-1}$ とおけば $E_g=E_gE_1=E_gg(E_{g^{-1}})$. よって $E_g\leqq g(E_{g^{-1}})$. 対称性によって $E_{g^{-1}}\leqq g^{-1}(E_g)$ 即ち $g(E_{g^{-1}})\leqq E_g$ となるからである。

或る群 G の部分群 H 上で定義されている決定関数は，種々の方法で群 G 全体に拡大できる。例えば，E_g が G の部分群 H 上で定義されているとき，$D_g=E_g\ (g\in H)$, $D_g=0\ (g\in G-H)$ は明らかに E_g の拡大である。また，G が $\mathscr{A}$ 上で自由に作用するときは，G 上の決定関数 E_g は次のように充満群 $[G]$ 上へ自然に拡大できる。即ち，$\alpha\in[G]$ は (1.2) によって

$$\alpha\sim\sum_{g\in G}Q(\alpha,\ g)g$$

と表わせるが，G が自由に作用するときは，この表わし方は一意的で $Q(\alpha,\ g)=gF(\alpha,\ g)$ である。このとき，

$$E_\alpha=\sum_{g\in G}Q(\alpha,\ g)E_g$$

が $[G]$ 上の決定関数であることを示そう。先ず，

$$Q(g\beta,\ h)=h(F(g\beta,\ h))=h(F(\beta,\ gh))$$
$$=g(g^{-1}hF(\beta,\ g^{-1}h))=g(Q(\beta,\ g^{-1}h))$$

である。しかるとき，$Q(\alpha,\ g)\ (g\in G)$ の直交性により，

$$E_\alpha\alpha(E_\beta)=\left(\sum_gQ(\alpha,\ g)E_g\right)\sum_fQ(\alpha.\ f)f\left(\sum_hQ(\beta,\ h)E_h\right)$$

$$=(\sum_g Q(\alpha,\ g)E_g)g(\sum_h Q(\beta,\ h)E_h)$$

(2.1) を用い gh を改めて h とすれば,

$$=\sum_g Q(\alpha,\ g)E_g(\sum_h Q(\beta,\ g^{-1}h)E_h)$$

ここで上述の式を用いると,

$$=(\sum_g Q(\alpha,\ g)E_g)(\sum_h Q(g\beta,\ h)E_h)$$

$$=(\sum_g Q(\alpha,\ g)E_g)(\sum Q_h(\alpha\beta,\ h)E_h)=E_\alpha E_{\alpha\beta}.$$

$E_1=I$ は明らかである。

さて，決定関数と充満部分群との対応を考えよう。

補題 2.2. ([4 ; p, 554]) G 上の決定関数 E_g に対して,

(2.5) $$K=K(E_g)=\{\alpha\in[G] \mid \alpha\sim\sum_g P_g g,\ P_g\leqq E_g\}$$

と定義すれば, K は $[G]$ の充満部分群である。ただし, $\{P_g\}$ は補題 1.6 における条件を満たすものとする。

証明. (i) K が部分群であること。$\alpha\sim\sum P_g g$ とすると $\alpha^{-1}\sim\sum g^{-1}(P_g)g^{-1}=\sum g(P_{g-1})g$ であって, (2.4) により $g(P_{g-1})\leqq g(E_{g-1})=E_g$ だから $\alpha^{-1}\in K$. また, $\beta\sim\sum_g Q_g g$ とすると, $\alpha\beta\sim\sum_{g,h}P_g(Q_h)gh=\sum_g[\sum_h P_{gh^{-1}}\ gh^{-1}(Q_h)]g$ であって, (2.1) により $\sum_h P_{gh-1}\ gh^{-1}(Q_h)=\sum_h P_{gh^{-1}}\ gh^{-1}(Q_h)E_{gh^{-1}}\ gh^{-1}(E_h)=\sum_h P_{gh-1}gh^{-1}(Q_h)E_{gh^{-1}}E_g\leqq E_g$ だから $\alpha\beta\in K$.

(ii) K が充満群であること。$\alpha\in[K]$ は次のように表わせる。即ち, $\alpha\sim\sum_n R_n\alpha_n$. ただし, $\alpha_n\sim\sum_g Q_{n,g}g$, $Q_{n,g}\leqq E_g$. 従って $\alpha\sim\sum_n R_n(\sum_g Q_{n,g}g)=\sum_g(\sum_n R_n Q_{n,g})\ g$ であって $\sum_n R_n Q_{n,g}\leqq\sum_n R_n E_g=E_g$ だから, $\alpha\in K$.

この補題の $K(E_g)$ を E_g で定まる $[G]$ の充満部分群という。逆に,

補題 2.3. (4 ; p. 554]) K を $[G]$ の充満部分群とすると, (1.3) で定まる。

(2.6) $$E(K,\ g)=\sup_{k\in K}g(F(g,\ k))$$

は決定関数である。

証明. $E(K,\ g)g(E(K,\ h))=\sup_{l,m\in K}g(F(g,\ l))gh(F(h,\ m))$

$$=\sup_{l,m}g(F(g,\ l))gh(F(h,\ l^{-1}m))=\sup_{l,m}g(F(g,\ l))gh(F(lh,\ m))$$

$$=\sup_{l,m}g(F(g,\ l))gh(F(gh,\ m))=E(K,\ g)E(K,\ gh).$$

また, 明らかに $E(K,\ 1)=I.$

上述の (2.5), (2.6) によって得られる決定関数と充満部分群との対応を更に調べてみよう。

補題 2.4. ([4 ; Lemma 3. 1]) K を $[G]$ の任意の充満部分群とすれ, ば

$$K(E(K,\ g))=K.$$

また, E_g を G の任意の決定関数とすれば,

$$E_g\leqq E(K(E_g),\ g).$$

等号がすべての g に対して成り立つのは，$E_g \geqq F(g, 1)$ がすべての g に対して成り立つときそのときに限る。

証明. $\alpha \in K(E(K, g))$ 即ち，$\alpha \sim \sum_g Q_g g$, $Q_g \leqq E(K, g)$ とすると，(1.4) により，$Q_g \beta_g \sim Q_g g$ なる $\beta_g \in K$ が存在し，K が充満群だから，$\alpha \sim \sum Q_g \beta_g$ となる。よって $\alpha \in K$. 逆に $\alpha \in K$ とすると，もちろん $\alpha \in [G]$ だから，$\alpha \sim \sum_g Q_g g$ と表わされ，任意の g に対して $Q_g \alpha = Q_g g$, (1.4) により $Q_g \geqq E(K, g)$. 以上によって $K(E(K, g)) = K$.

次に，決定関数 E_g に対して $K(E_g) = K$ とかく。先ず，$(I - F(g, 1))E_g$ は $\sum_n P_n$ の形にかける。ただし，$\{P_n\}$ は互いに直交し $P_n g^{-1}(P_n) = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ なる中心射影の族である。しかるとき，写像

$$P_n g + g^{-1}(P_n) g^{-1} + (I - [P_n + g^{-1}(P_n)])1$$

は，$P_n \leqq E_g$, $g(P_n) \leqq g^{-1}(E_g)$, $I - [P_n + g^{-1}(P_n)] \leqq E_1 = I$ だから $K(E_g)$ の元である。これと前半に示したことから $P_n \leqq E(K, g)$. n は任意だから $(I - F(g, 1))E_g \leqq E(K, g)$. ところが $F(g, 1) \leqq E(K, g)$ だから，$E_g = (I - F(g, 1))E_g + F(g, 1)E_g$ として $E_g \leqq E(K, g)$ となる。

最後に等号の成立条件を示そう。$E_g = E(K, g)$ ならば，$E_g = E(K, g) \geqq F(g, 1)$. となる。逆に，$E_g \geqq F(g, 1)$ として $E(K, g) \leqq E_g$ となることを示そう。一つの $g \in G$ と $\alpha \in K$ に対して，$Pg = P\alpha$ なる任意の中心射影 P をとると，$\alpha \sim \sum_{h \in G} Q_h h$ ならば各 h に対して $Q_h P g \sim Q_h P h$.

従って，$F(g, h)$ の極大性により

$$Q_h P \leqq h(F(g, h)) = h(F(h^{-1}g, 1)).$$

そして，仮定から $F(h^{-1}g, 1) \leqq E_{h^{-1}g}$ であり，また $Q_h \leqq E_h$ だから

$$Q_h P \leqq E_h h(E_{h^{-1}g}) = E_h E_g \leqq E_g.$$

結局 $P = \sum_h Q_h P \leqq E_g$. 従って $E(K, g) \leqq E_g$.

以後 G は $\mathscr{A}$ 上で自由に作用するものとして議論を進める。このときは，G 上の決定関数 E_g に対して常に $E_g \geqq F(g, 1)$ となるから，補題の 2.3 によって，$E_g \to K(E_g) \to E(K(E_g), g)$ は，G 上の決定関数全体と $[G]$ の充満部分群全体との 1 対 1 の対応を定める。決定関数全体は自明の順序で束をなすが，上の対応がこの束と充満部分群全体の束との同型を与えることを示そう。先ず

補題 2.5. ([cf. 3; Proof of Theorem 1]) E は 0 でない中心射影で，$g \in G$ が局所内部であるような中心射影を含まないとする。このとき $[G]$ の元 γ で，E 上では $\gamma \sim g$, $E \vee g(E)$ 上では $\gamma \sim 1$ なるものが存在する。

証明。 Eを互いに直交する中心射影の族 $\{P_n\}$ に分割し，$g(P_1) = g(E)(I - E)$, $g(P_{n+1}) \leqq P_n$ $(n \geqq 1)$ なるようにする。そのためには，$P_1 = Eg^{-1}(I - E)$, $P_0 = g(P_1)$ とし，$n \geqq 1$ に対しては $P_{n+1} = \{E - (P_1 + \cdots + P_n)\} g^{-1}(P_1 + \cdots + P^n)$ とすればよい。実際，作り方から P_n は互いに直交する。また，R が $R \leqq P_{n+1}$, $g(R) \leqq P_i$ $(0 < i \leqq n)$ なる中心射影ならば，$R \leqq \alpha^{-1}(P_i)\{E - (P_1 + \cdots + P_i)\} \leqq P_{i+1}$ だから $i = n$ となり $g(P_{n+1}) \leqq P_n$. もし $P_{n+1} = 0$ ならば，$E - (P_1 + \cdots + P_n)$ はその上で g が局所内部であるような E の部分中心射

影だから，$E=P_1+\cdots+P_n$ となる。同様にもしすべての n に対して $P_{n+1}\neq 0$ ならば $E=\sum_{n=1}^{\infty}P_n$ となる。さて，$Q_n=P_n-g(P_{n+1})$ $(n\geqq 1)$ とすると，$P_0=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(Q_n)$. 更に，$g(E), Q_1, Q_2, \cdots, I-(E+P_0)$ は互いに直交して和が I なる中心射影であり，また，$E, g(Q_1), g^2(Q_2), \cdots, I-(E+P_0)$ も同様である。よって

$$\gamma\sim g(E)g+\sum Q_n g^{-n}+\{I-(E+P_0)\}1 \tag{2.7}$$

は $[G]$ の元で，E 上では $\gamma\sim g$ であり，$E\vee g(E)$ 以外即ち $I-(E+P_0)$ 上では $\gamma\sim 1$である。

補題 2.6. (cf. [3;Lemma 5. 5]) E_g, F_g を G 上の二つの決定関数とすると，任意の $g\in G$ に対して

$$E(K(E_g), g)E(K(F_g), g)=E(K(E_g)\cap K(F_g), g). \tag{2.8}$$

証明。 $E_g=E(K(E_g), g), F_g=E(K(F_g), g)$ だから，補題1.7により $\alpha\in K(E_g), \beta\in K(F_g)$ を適当にとれば $E_g\alpha\sim E_g g, F_g\beta\sim F_g g$, よって $E_gF_g g\sim E_gF_g\alpha\sim E_gF_g\beta$ となる。$E'=\alpha^{-1}(E_gF_g)=\beta^{-1}(E_gF_g)$ とすると E' 上では $\alpha\sim\beta$ である。$E_0'(\leqq E')$ をその上で α が局所内部である極大中心射影とし，$E=E'-E_0'$ とする。補題2.4を g を $\alpha\in K(E_g)$ として用いると，E 上では $\alpha\sim\beta$ だから，(2.7) は g を β としても成り立つ。よって $\gamma\in K(E)\cap K(F_g)$. そこで γ' を，$E\vee\alpha(E)$ 上では $\gamma'\sim\gamma$, E_0' 上では $\gamma'\sim\alpha\sim\beta$, その他では$\gamma'\sim 1$ と定義すると，$\gamma'\in K(E_g)\cap K(F_g)$で，$E'$ 上では $\gamma'\sim\alpha\sim\beta$ 即ち $E_gF_g\gamma'\sim E_gF_g\alpha\sim E_gF_g\beta$ となる。此れは $E_gF_g\leqq E(K(E_g)\cap K(F_g), g)$ を示す。逆向きの不等式は明らか。

定理 2.7. G が $\mathscr{A}$ 上に自由に作用するならば，G 上の決定関数 E_g 全体の束と，$[G]$ の充満部分群 K 全体の束とは同型である。その同型は E_g に

$$K(E_g)=\{\alpha\in[G] \mid \alpha\sim\sum P_g g,\ P_g\leqq E_g\}$$

を，K には

$$E_g(K)=E(K, g)=\sup_{k\in K}g(F(g, k))$$

を対応させることによって得られる。

証明。 G が $\mathscr{A}$ 上に自由に作用すれば，E_g と K が1対1に対応することは既に述べた。補題 2.6は $K(E_gF_g)=K(E_g)\cap K(F_g)$ を示しているから，この対応で $E_g\wedge F_g=E_gF_g$ は $K(E_g)\wedge K(F_g)$ に対応する。次に $K(E_g)\vee K(F_g)=[K(E_g)\cup K(F_g)]K\subset(E_g\vee F_g)$ は明らか。逆に $\alpha\in K(E_g\vee F_g)$ とすると，$\alpha\sim\sum P_g g, P_g\leqq E_g\vee F_g$ とかけるが，$Q_g=P_gE_g\leqq E_g$, $R_g=P_g-Q_g\leqq F_g$ とおけば，$\alpha\sim\sum Q_g g+\sum R_g g\in[K(E_g)\cup K(F_g)]$.
以上によって，定理に述べた対応は束同型である。

特別な場合として，P を中心射影とし，局所部分群 $[G]_P=\{\alpha\in[G] \mid F(\alpha, 1)\geqq I-P\}$ に対応する決定関数を考えよう。

補題 2.8. $E_g([G]_P)=Pg(P)$, $(g\neq 1)$.

証明。 $\alpha\in[G]_P$ として，$\alpha\sim\sum_{g\in G}Q_g g$ と表わせば，$g\neq 1$ のとき $F(g,\alpha)\leqq P$. また $Q_g=g(F(g,\alpha))=\alpha(F(g,\alpha))$ である。従って，一方では $Q_g=g(F(g,\alpha)\leqq g(P)$ であり，他方では，$Q_g=\alpha(F(g,\alpha))\leqq\alpha(P)=P$ であるから $Q_g\leqq Pg(P)$. 逆に，α が $E_g=Pg(P)$ に対応する充満部分群に属するならば，$\alpha\sim\sum Q_g g$, $Q\leqq Pg(P)$ $(g\neq 1)$ とかけるが，このとき $Q\leqq I-P$ ならば $\alpha(Q)=Q_1Q+\sum_{g\neq 1}Q_gPg(P)g(Q)=Q_1Q$. よって $\alpha(Q)=Q$ となるから $\alpha\in[G]_P$ である。

系 2.9. P が G で不変，即ち P が $G\otimes\mathscr{A}$ の中心射影ならば $E_g([G]_P)=P$, $(g\neq 1)$ である。

3. 定理1.9で示されたDyeの対応と定理2.7の結果とを結べば，クロス積 $G\otimes\mathscr{A}$ の中間部分環全体の作る束と G 上の決定関数全体の作る束とは同型であることが分かるが，その対応を直接考えることによって $G\otimes\mathscr{A}$ の部分環の構造を明らかにすることを考えよう。

$\mathscr{B}$ は $G\otimes\mathscr{A}$ の中間部分環を，K は $[G]$ の充満部分群を，E_g は G 上の決定関数を表わすものとして，例えば E_g に対応する中間部分環は $\mathscr{B}(E)$ で表わすことにする。このとき既に分っているように

$$\mathscr{B}(K)=\mathscr{R}[U\mid\varphi_U\in K]$$
$$K(\mathscr{B})=\{\varphi_U\mid U\in N(\mathscr{A})\cap\mathscr{B}\}$$
$$E_g(K)=E(K,g)=\sup_{k\in K}g(F(g,k))$$
$$K(E_g)=\{\alpha\in[G]\mid\alpha\sim\sum P_g g,\ P_g\leqq E_g\}$$

である。従って一応

$$E_g(\mathscr{B})=E_g(K(\mathscr{B}))=\sup\{g(F(g,\varphi_U))\mid U\in N(\mathscr{A})\cap\mathscr{B}\}$$
$$\mathscr{B}(E_g)=\mathscr{B}(K(E_g))=\mathscr{R}[U\mid\varphi_U\sim\sum Pg,\ P_g\leq E_g]$$

となる。実は，$G\otimes\mathscr{A}$ から $\mathscr{B}(E_g)$ への期待写像が $\Phi\ (\sum g\otimes A_g)=\sum g\otimes E_{g^{-1}}A_g$ であることを示すことによって，$\mathscr{B}(E_g)$ をもっと明確に表わすことができる。ところで，この Φ が期待写像であることを定義に従って証明することを試ると，Φ が正値であること以外は簡単に分かるが，正値であることは例えば

$$\Phi\ ((\sum g\otimes A_g)(\sum g\otimes A)^*)=\sum_{g,h}h^{-1}\otimes E_{hg^{-1}}h(A_gA^*_h)$$
$$=\sum_{g,h}(g\otimes g^{-1}(E_{gh^{-1}})A_g)(h\otimes h^{-1}(E_{gh^{-1}})A_h)^*$$

等の計算から直接示すことは困難に思われる。また，富山[8]の結果により，Φ がノルム1の射影であることを示してもよいが，これは射影であることは明らかであるし，ノルムが1であること，或いはノルムが減少することを示すのも，比較的容易である。しかし，ここではやや迂遠であるが，次の補題を用意して Φ が期待写像であることを示す。なお，この節でも $\mathscr{A}$ は有限型，G は $\mathscr{A}$ 上で自由に作用するものとする。

補題 3.1. E_g を G 上の決定関数とするとき，任意の $g\in G$ に対して，

$$g\otimes E_{g^{-1}}\in\mathscr{B}(E_g)$$

証明。 先ず $\varphi_U(A)=\sum P_g g(VAV^*)$ $(A\in\mathscr{A})$ とすると，この φ_U は

(3.1) $$U=\sum g\otimes g^{-1}(P_g)V$$

によって誘導されることを示そう。実際，U がユニタリであることは，$\{P_g\}$，$\{g^{-1}(P_g)\}$ の直交性を考慮した次の計算で分かる。

$$\begin{aligned}UU^*&=(\textstyle\sum_g g\otimes g^{-1}(P_g)V)(\sum_h h^{-1}\otimes P_h h(V^*))\\&=\textstyle\sum_{g,h} gh^{-1}\otimes h(g^{-1}(P_g)V)P_h h(V^*)\\&=1\otimes\textstyle\sum_g P_g g(VV^*)=1\otimes I\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U^*U&=(\textstyle\sum_g g^{-1}\otimes P_g g(V^*))(\sum_h h\otimes h^{-1}(P_h)V)\\&=\textstyle\sum_{g,h} gh^{-1}\otimes h^{-1}(P_g g(V^*))h^{-1}(P_h)V\\&=1\otimes\textstyle\sum_g g^{-1}(P_g)V^*V=1\otimes I\end{aligned}$$

また，$A\in\mathscr{A}$ に対して，

$$\begin{aligned}UAU^*&=(\textstyle\sum_g g\otimes g^{-1}(P_g)V)(1\otimes A)(\sum_h h\otimes h^{-1}(P_h)V)^*\\&=(\textstyle\sum_g g\otimes g^{-1}(P_g)VA)(\sum_h h^{-1}\otimes P_h h(V^*))\\&=\textstyle\sum_{g,h} gh^{-1}\otimes h(g^{-1}(P_g)VA)P_h h(V^*)\\&=1\otimes\textstyle\sum_g P_g g(VAV^*)\end{aligned}$$

よって

$$\varphi_U(A)=\sum_g P_g g(VAV^*)$$

このことによって

$$\begin{aligned}\mathscr{B}&=\mathscr{B}(E_g)=\mathscr{B}(E_g(\mathscr{B}))\\&=\mathscr{R}[U\in N(\mathscr{A})\mid U=\textstyle\sum g\otimes g^{-1}(P_g)V,\ V\in\mathscr{A}_u,\ P_g\leqq E_g(\mathscr{B})].\end{aligned}$$

ところが，g を固定すると，補題 1.7(1.4) によって，$k_0\in K$ を適当に選べば

$$E_g(\mathscr{B})=E(K(\mathscr{B}),g)=g(F(g,k_0))$$

となる。$k_0=\varphi_U$，$U\in N(\mathscr{A})\cap\mathscr{B}$ とすると，内部自己同型の差は無視してよいから，

$$U=g\otimes g^{-1}(E_g)+\sum_{h\neq g} h\otimes h^{-1}(P_h)$$

としてよい。ただし，$\{P_h\}$ は $\{h^{-1}(P_h)\}$ と共にそれぞれ互いに直交し，$P_h\leqq E_h$，$P_hE_g=0$，$h^{-1}(P_h)g^{-1}(E_g)=0$ なる中心射影の族である。しかるとき，

$$U'=g\otimes g^{-1}(E_g)-\sum_{h\neq g} h\otimes h^{-1}(P_h)$$

も $N(\mathscr{A})\cap\mathscr{B}$ のユニタリであることは直ちに分かるから，

$$g\otimes E_{g^{-1}}=g\otimes g^{-1}(E_g)=\frac{U+U'}{2}\in\mathscr{B}\cdot$$

補題 3.2. Φ を $G\otimes\mathscr{B}$ から中間部分環 $\mathscr{B}$ への期待写像とする。適当な中心元 C_g によって

(3.2) $$\Phi(g\otimes I)=g\otimes g^{-1}(C_g)=(1\otimes C_g)(g\otimes I)$$

と書けるならば，C_g は射影である。

証明。 $$\begin{aligned}\Phi(g\otimes I)&=\Phi(\Phi(g\otimes I))=\Phi\{(1\otimes C_g)(g\otimes I)\}=(1\otimes C_g)\Phi(g\otimes I)\\&=(1\otimes C_g)(1\otimes C_g)(g\otimes I)=C_g^2(g\otimes I)\end{aligned}$$

此れと(3.2)を比較すれば，$g\otimes I$ はユニタリだから $C_g^2=C_g$. また，

$$\{\Phi(g\otimes I)\}^*=\{C_g(g\otimes I)\}^*=(g^{-1}\otimes I)C_g^*$$

と

$$\{\Phi\ (g\otimes I)\}^*=\Phi\ (g^{-1}\otimes I)=C_{g-1}(g^{-1}\otimes I)=(g^{-1}\otimes I)g(C_{g-1})$$

によって $C_g^*=g(C_{g-1})$. 従って $C_g=g(C_{g-1})$ さえ示せば, $C_g^*=C_g$ となるから C_g は射影であることが分かる。ところが,

$$\begin{aligned}\Phi\ \{(g^{-1}\otimes I)\Phi\ (g\otimes I)\}&=\Phi\ \{(g^{-1}\otimes I)C(g\otimes I)\}\\&=\Phi\ \{g^{-1}(C_g)(g^{-1}\otimes I)(g\otimes I)\}=g^{-1}(C_g)\end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned}\Phi\ \{(g^{-1}\otimes I)\Phi\ (g\otimes I)\}&=\Phi\ (g^{-1}\otimes I)\Phi\ (g\otimes I)\\&=C_{g-1}(g^{-1}\otimes I)C_g(g\otimes I)=C_gg^{-1}(C_g)\ (g^{-1}\otimes I)\ (g\otimes I)\\&=C_{g-1}g^{-1}(C_g)\end{aligned}$$

によって

$$C_{g-1}g^{-1}(C_g)=g^{-1}(C_g)$$

これから $g(C_{g-1})C_g=C_g$. また, g を g^{-1} に変えて $C_gg(C_{g-1})=g(C_{g-1})$. 最後の二式を比較して $C_g=g(C_{g-1})$ が得られる。

定理 3.3. $G\otimes\mathscr{A}$ から中間部分環 $\mathscr{B}=\mathscr{B}(E_g)$ への期待写像は,

(3.8) $$\Phi\ (\textstyle\sum_g g\otimes A_g)=\sum_g g\otimes\ E_{g-1}A_g$$

で与えられる。

証明。 任意の $g\in G$ に対して

$$\Psi(g\otimes I)=g\otimes E_{g-1}$$

と定義すれば, 補題 3.1 により Ψ は $\mathscr{B}$ への写像であって, 任意の $A\in\mathscr{A}$ に対して

$$\begin{aligned}\Psi(g\otimes I)\ (1\otimes A)&=(g\otimes E_{g-1})\ (1\otimes A)g=\otimes E_{g-1}A\\&=(1\otimes g(A))\ (g\otimes E_{g-1})=(1\otimes g(A))\Psi(g\otimes I).\end{aligned}$$

よって, $\Psi(g\otimes I)=W$ とおくと, 任意の $A\in\mathscr{A}$ に対して

$$WAW^*=(1\otimes g(A))WW^*$$

であって, かつ

$$W^*W=(g^{-1}\otimes E_g)\ (g\otimes E_{g-1})=1\otimes g^{-1}(E_g)E_{g-1}=1\otimes E_{g-1}.$$

一方

$$\begin{aligned}\Phi\ (g\otimes I)\ (1\otimes A)&=\Phi\ \{(g\otimes I)\ (1\otimes A)\}\\&=\Phi\ \{(1\otimes g(A))\ (g\otimes I)\}=(1\otimes g(A))\Phi\ (g\otimes I)\end{aligned}$$

だから, $\Phi\ (g\otimes I)=V$ とおくと

$$VAV^*=(1\otimes g(A))VV^*$$

であって, かつ補題 1.10 により

$$V^*V=E(K,\ g^{-1})=E_{g-1}.$$

よって, $VAV^*=WAW^*$, かつ $W^*W=V^*V=E_{g-1}\in\mathscr{Z}$. 従って,
$W^*VAV^*V=W^*WAW^*V$ となるから $W^*VA==AW^*V$. $A\in\mathscr{A}$ は任意だから, 補題 1.11により $W^*V\in\mathscr{Z}$. 即ち, $(g^{-1}\otimes I)\ (1\otimes E_g)V\in\mathscr{Z}$. $E_gV=V$ だから $V\in(g\otimes I)\mathscr{Z}=g(\mathscr{Z})\ (g\otimes I)=\mathscr{Z}(g\otimes I)$. よって或る $C_g\in\mathscr{Z}$ 対して,

$$\Phi\ (g\otimes I)=V=(1\otimes C_g)\ (g\otimes I)=g\otimes C_{g-1}$$

と書ける。このとき，補題3.2によって C_g は中心射影であり，

$$E_g=VV^*=(g\otimes C_{g^{-1}})(g^{-1}\otimes C_g)=1\otimes g(C_{g^{-1}})C_g=C_g$$

従って

$$\Phi\ (g\otimes I)=g\otimes E_{g^{-1}}$$

よって

$$\Phi\ (\sum g\otimes A_g)=\sum\Phi\ (g\otimes A_g)=\sum\Phi\ \{(g\otimes I)(1\otimes A_g)\}$$
$$=\sum\Phi\ (g\otimes I)(1\otimes A_g)=\sum(g\otimes E_{g^{-1}})(1\otimes A_g)=\sum(g\otimes E_{g^{-1}}A_g).$$

$\mathscr{B}\ (E_g)$ は期待写像 Φ_{II} の値域であるから，この補題によって次の定理は明らかである。

定理 3.4. G が $\mathscr{A}$ 上で自由に作用するとき，G 上の決定関数 E_g に対応する $G\otimes\mathscr{A}$ の中間部分環 $\mathscr{B}\ (E_g)$ は

$$\mathscr{B}\ (E_g)=\{\textstyle\sum_g g\otimes E_{g^{-1}}A_g \mid \sum g\otimes A_g\in G\otimes\mathscr{A}\}$$

で与えられる。

補題2.8と系2.9により，次の系が得られる。

系 3.5. P を $\mathscr{A}$ の中心射影とするとき，決定関数 $E_g=Pg(P)\ (g\neq 1)$ に対応する $G\otimes\mathscr{A}$ の中間部分環は

$$\mathscr{B}\ (E_g)=\{\textstyle\sum_{g\neq 1}g\otimes gP(P)A_g+1\otimes A_1 \mid A_1\in\mathscr{A},\ \sum g\otimes A_g\in\mathscr{A}\}$$

特に，$P\in\mathscr{Z}^G$ 即ち P が $G\otimes\mathscr{A}$ の中心射影ならば，$E_g=P$ に対応する中間部分環は，

$$\mathscr{B}=(G\otimes\mathscr{A})P+\mathscr{A}(I-P)$$

である。

この系は [3 ; Proposition 3. 1] との関連において興味深い。

4.　此れまでに述べた対応において，$[G]$ の充満部分群 K が正規である場合について更に考察を進めよう。定理1.8によって，$[G]$ の元従って特に G の元も $G\otimes\mathscr{A}$ の内部自己同型に拡張される。そのとき，$\alpha\in[G]$ を誘導する $G\otimes\mathscr{A}$ のユニタリ元は唯一つではないが，しかし中心 $\mathscr{Z}$ のユニタリ元だけの差しかない。即ち，いま U, V が共に α を誘導する $G\otimes\mathscr{A}$ のユニタリ元であれば，任意の $A\in\mathscr{A}$ に対して

$$UAU^*=\alpha(A)=VAV^*\qquad\text{よって}\quad V^*UA=AV^*U$$

だから，補題1.11によって $V^*U\in\mathscr{Z}$． V^*U はもちろんユニタリだから，或る $W\in\mathscr{Z}_u$ に対して $U=VW$ となる。逆に $W\in\mathscr{Z}_u$ を任意にとれば，$U=VW$ と V とが $\mathscr{A}$ 上の同じ自己同型を誘導することは明らかである。特に，$g\in G$ を誘導する $G\otimes\mathscr{A}$ のユニタリ元は，すべて $g\otimes Z,\ Z\in\mathscr{Z}_u$ の形に書ける。G の元の拡張になっているような $G\otimes\mathscr{A}$ の内部自己同型全体を $\tilde{G}$ で表わすことにする。

さて，$G\otimes\mathscr{A}$ の中間部分環 $\mathscr{B}$ が $\tilde{G}$ によって不変であれば，$\tilde{G}$ は $\mathscr{B}$ にも自己同型を誘導することになるが，先ずそのための条件を考えよう。此の節でも $\mathscr{A}$ は有限型

とし，G は $\mathscr{A}$ 上で自由に作用するものとする。

補題 4.1. $[G]$ の充満部分群 K が正規であるための必要十分条件は，$\mathscr{B}(K)$ が $N(\mathscr{A})$ のユニタリ元による $G\otimes\mathscr{A}$ の内部自己同型全体 $[\tilde{G}]$ によって不変なことである。

証明。　$\alpha\in[G]$ を誘導する $G\otimes\mathscr{A}$ の一つのユニタリ元を U_α とし，U_α による $G\otimes\mathscr{A}$ の内部自己同型を $\tilde{\alpha}$ で表わすと，任意の $U\in(G\otimes\mathscr{A})_u$ と $A\in\mathscr{A}$ に対し，

$$\varphi_{\tilde{\alpha}^{-1}(U)}(A)=\tilde{\alpha}^{-1}(U)A\tilde{\alpha}^{-1}(U)^*$$
$$=U_\alpha{}^*UU_\alpha AU_\alpha{}^*U^*U_\alpha=\alpha^{-1}\varphi_U\alpha(A).$$

従って K が正規であれば，$\varphi_U\in K$ なることと任意の $\alpha\in[G]$ に対して $\varphi_{\tilde{\alpha}^{-1}(U)}\in K$ なることとは同値である。従って

$$\tilde{\alpha}\{\mathscr{B}(K)\}=\tilde{\alpha}\{\mathscr{R}[U\mid\varphi_U\in K]\}=\mathscr{R}[\tilde{\alpha}(U)\mid\varphi_U\in K]$$
$$=\mathscr{R}[U\mid\varphi_{\tilde{\alpha}-1(U)}\in K]=\mathscr{R}[U\mid\varphi_U\in K]=\mathscr{B}(K).$$

逆に，任意の $\alpha\in[G]$ に対して $\tilde{\alpha}\{\mathscr{B}(K)\}=\mathscr{B}(K)$ とする。しかるとき，$U\in N(\mathscr{A})$ に対して $\varphi_U\in K$ ならば，$U\in\mathscr{B}(K)=\tilde{\alpha}\{\mathscr{B}(K)\}$. よって $\tilde{\alpha}^{-1}(U)\in\mathscr{B}(K)$. 従って $\alpha^{-1}\varphi_U\alpha=\varphi_{\tilde{\alpha}-1(U)}\in K$ となるから K は正規である。

補題 4.2. $G\otimes\mathscr{A}$ の中間部分環 $\mathscr{B}$ について，$\mathscr{B}$ が $[\tilde{G}]$ で不変なことと $\tilde{G}$ で不変なこととは同値である。

証明。　$\mathscr{B}$ が $\tilde{G}$ で不変であるとして，任意の $\tilde{\alpha}\in[\tilde{G}]$ に対し $\tilde{\alpha}(\mathscr{B})=\mathscr{B}$ であることを示せばよい。ところが，$\alpha(A)=\sum P_g g(VAV^*)$ と表わされるとすれば，$\tilde{\alpha}(B)=\sum P_g\tilde{g}(VBV^*)$ である。そして定理3.4により，$B=\sum g\otimes E_{g-1}B_g$ とすると，$V\in\mathscr{A}_u$ だから $VBV^*=\sum g\otimes E_{g-1}VB_gV^*\in\mathscr{B}$. よって仮定により，$\tilde{g}(VBV^*)\in\mathscr{B}$. 従って $\tilde{\alpha}(\mathscr{B})=\mathscr{B}$。

上の二つの補題により

定理 4.3. K が $[G]$ の正規充満部分群であるための必要十分条件は，$\mathscr{B}(K)$ が $\tilde{G}$ で不変なことである。

次に，決定関数について対応する条件を調べよう。

$F(h,k)=hF(hg^{-1},kg^{-1})$ なることに注意すると，K が正規充満部分群ならば，任意の $h\in G$ に対して

$$E_g=E(K,g)=E(hKh^{-1},g)=hE(K,h^{-1}gh)=h(E_{h^{-1}gh}h)$$

従って，h を h^{-1} に変えて

$$h(E_g)=E_{hgh^{-1}}.$$

逆に，任意の $h\in G$ に対して $h(E_g)=E_{hgh-1}$ ならば $E_g=h(E_{h^{-1}gh})$ となるから，上の計算の逆をたどって

$$E(K, g)=E(hKh^{-1}, g)$$

即ち $E_g(K)=E_g(hKh^{-1})$ となるから，$hKh^{-1}=K$.

従って，

定理 4.4. $[G]$ の充満部分群 K が正規であるための必要十分条件は，すべての $g, h\in G$ に対して $h(E_g)=E_{hgh^{-1}}$ となることである。

系 4.5. G が可換群ならば，K が $[G]$ の正規充満部分群であるための必要十分条件は，各 E_g が G で不変なこと，即ち各 E_g が $G\otimes\mathscr{A}$ の中心射影なることである。

参　考　文　献

1) H. Behncke: *Automorphisms of cross products*, Tôhoku Math., J., 21 (1969) 580-600
2) H. Choda: *On automorphisms of abelian von Neumann algebras*, Proc. Japan Acad., 41 (1965) 280-283
3) H. A. Dye: *On groups of measure preserving transformations I*, Amer. J. Math., 81 (1959) 119-159
4) H. A. Dye: *On groups of measure preserving transformationsII*, Amer. J. Math., 85 (1963) 551-576
5) Y. Haga-Z. Takeda: *Correspondence between subgroups and subalgebras in a cross product von Neumann algebra*, Preprint (1971)
6) R. R. Kallman: *A generalization of free action*, Duke Math. J., 36 (1969) 781-789
7) M. Nakamura-Z. Takeda: *On some elementary properties of the crossed products of von Neumann algebras*, Proc. Japan Acad., 34 (1958) 489-494
8) J. Tamiyama: *On the projection of norm one in W*-algebras*, Proc. Japan Acad., 33 (1957) 608-612
9) G. Zeller-Meier: *Produits croises d'une C*-algebre par un groupe d'automorphisms*, J. de Math. Pures et Appl., 47 (1968) 101-239