

# PG 出力を整流した場合の数学的取扱い

関 山 正 憲

(1922年 6 月26日受理)

## The Mathematical Treatment of the PG Output Voltage which Passes through a Rectifier

Masatoshi SEKIYAMA

**Abstract:** — It is usually believed, that the output voltage from a pilot generator is proportional to the rotor speed, even passing through a rectifier. But the fact is that the proportional relation between the rotor speed and the output voltage, is approximate and until only some specific speed. And if the speed passes this specific point, the output voltage becomes small.

With this fact, this report deals. The data which are used to complete this report, are not got by means of experiments but by a computer.

### 1. ま え が き

一般に、パイロット・ジェネレータ (pilot generator 以後 PG と記す) より出る交流を整流した直流電圧は回転速度に比例すると思われている。しかし、回転数が高くなりある限度を超すとこの関係は成立しなくなる。実験的にも、ある回転数の所でピークを生ずることが認められる。また PG を回転速度の検出器とする場合、コイルのインダクタンスおよび整流器に続く平滑回路のコンデンサによる伝達関数は、自動制御のループ中に取り上げるべきかどうかの問題等もあるので、これらを究明するため数学的に取扱って (ただし、一部電子計算機利用) 一応見るべき結果を得たのでここに報告する。

### 2. 理論の条件と考え方

複雑をさけるため、図 1 のような簡単な平滑回路の場合を考える。図では、コンデンサ  $C$  と負荷抵抗  $R$  とが互に作用し平滑回路を形成している。PG のコイルはインダクタンス  $L$  および抵抗  $r$  を有し、その内部に誘起される起電力は  $V \sin \omega t$  の正弦波で表わされるものとす。ただし、 $\omega$  は被測定量たる回転速度に比例し磁極数を  $p$ 、毎分の回転数を  $n$  とすると  $\omega = 2\pi \cdot \frac{p}{2} \cdot \frac{n}{60}$  なる関係がある。

整流器は順方向の抵抗零オーム、逆方向の抵抗無限大の理想的素子 4 ケが両波整流型に

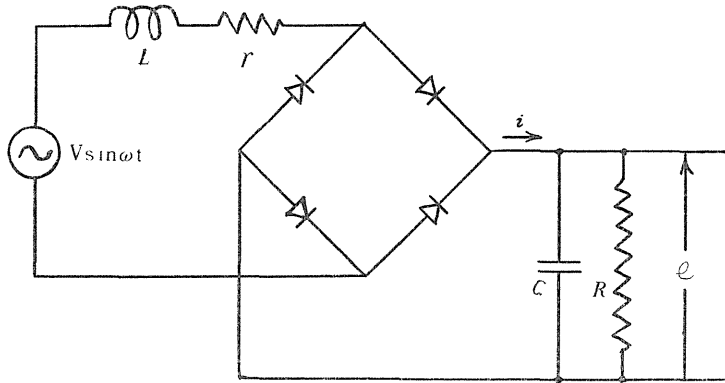


図 1 出力を整流し平滑化する主題の回路

組まれているものとす。

図1において、整流器出力電流  $i$  は  $R$  にかかる出力電圧 (=  $C$  の端子電圧)  $e$  が  $V \sin \omega t - r \cdot i - L \frac{di}{dt}$  より大きくなると零になる。このときは、 $L$  および  $r$  によるインピーダンスにおける電圧降下がないばかりでなく、整流素子の逆方向に当るので整流器をもって左側が引き離され、 $C$  と  $R$  よりなる回路が単独に存在すると考えてよい。したがって、図2の  $e = E e^{-\frac{t}{RC}}$  で表わされる放電期間となる。 $i \neq 0$  のときは、 $i$  の一部により  $C$  に充電が行われるとともに、残りの  $i$  は  $R$  をながれて  $e$  をつくる。

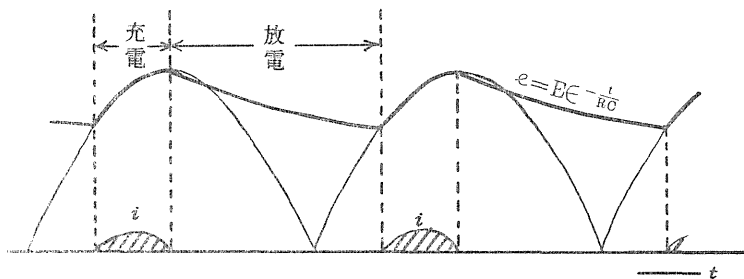


図 2 充電部と放電部による出力電圧波形

したがって、出力  $e$  は図2の太線のように充電期間と放電期間のくり返しから成り、その波形の基本周波数は  $PG$  コイルの起電力  $V \sin \omega t$  の周波数の2倍となる。

### 3. 充電期間の理論式

電源電圧  $V \sin \omega t$  より  $L$ ,  $r$  によるインピーダンスの電圧降下を差引いたものは  $C$  の端子電圧と等しい。また、 $C$  への充電電流を積分したものがその端子電圧になるので、

$$\begin{cases} V\sin\omega t - ri - L\frac{di}{dt} = e \\ \frac{1}{C}\left(i - \frac{e}{R}\right) dt = e \end{cases}$$

$i$  を消去し整理すると

$$LC\frac{d^2e}{dt^2} + \left(rc + \frac{L}{R}\right)\frac{de}{dt} + \left(1 + \frac{r}{R}\right)e = V\sin\omega t \dots\dots\dots(1)$$

係数が定数のときの線形2階微分方程式である。その解法にしたがって行く。

$$\begin{aligned} LCD^2e + \left(rc + \frac{L}{R}\right)De + \left(1 + \frac{r}{R}\right)e &= V\sin\omega t \\ e &= \frac{\frac{V}{LC}\sin\omega t}{D^2 + \frac{1}{LC}\left(rc + \frac{L}{R}\right)D + \frac{1}{LC}\left(1 + \frac{r}{R}\right)} \\ &= \frac{\frac{V}{LC}\sin\omega t}{\left\{D + \frac{1}{2LC}\left(rc + \frac{L}{R}\right)\right\}^2 + \frac{1}{LC}\left(1 + \frac{r}{R}\right) - \left\{\frac{1}{2LC}\left(rc + \frac{L}{R}\right)\right\}^2} \quad (2) \end{aligned}$$

この(2)式は特殊解である。公式

$$\frac{f(t)}{(D-A)^2+B^2} = \frac{\epsilon^{-At}}{B} \left\{ \sin Bt \int \epsilon^{-At} \cos Bt \cdot f(t) dt - \cos Bt \int \epsilon^{-At} \sin Bt \cdot f(t) dt \right\} \dots\dots\dots(3)$$

を用いるには

$$A = -\frac{1}{2LC} \left( rc + \frac{L}{R} \right) \dots\dots\dots(4)$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 + \frac{r}{R} - \frac{1}{4LC} \left( rc + \frac{L}{R} \right)^2} \dots\dots\dots(5)$$

と対応させればよい。しかし、 $f(t)$  は正弦波  $\frac{V}{LC}\sin\omega t$  なので更に変形を進められ(2)式は

$$\begin{aligned} e &= \frac{V\epsilon^{-At}}{LCB} \left\{ \sin Bt \int \epsilon^{-At} \cos Bt \sin\omega t dt - \cos Bt \int \epsilon^{-At} \sin Bt \sin\omega t dt \right\} \\ &= \frac{V\epsilon^{-At}}{2LCB} \left\{ \sin Bt \int \epsilon^{-At} \sin(\omega+B)t dt + \sin Bt \int \epsilon^{-At} \sin(\omega-B)t dt \right. \\ &\quad \left. + \cos Bt \int \epsilon^{-At} \cos(\omega+B)t dt - \cos Bt \int \epsilon^{-At} \cos(\omega-B)t dt \right\} \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{然るに} \int \epsilon^{-At} \sin(\omega+B)t dt &= \frac{-\epsilon^{-At} \{ A\sin(\omega+B)t + (\omega+B)\cos(\omega+B)t \}}{A^2 + (\omega+B)^2} \\ \int \epsilon^{-At} \cos(\omega+B)t dt &= \frac{\epsilon^{-At} \{ (\omega+B)\sin(\omega+B)t - A\cos(\omega+B)t \}}{A^2 + (\omega+B)^2} \end{aligned} \quad (7)$$

なる公式があるのでこれを用い

$$\begin{aligned} e &= \frac{V\epsilon^{-At}}{2LCB} \left\{ \sin Bt \frac{-\epsilon^{-At} \{ A\sin(\omega+B)t + (\omega+B)\cos(\omega+B)t \}}{A^2 + (\omega+B)^2} \right. \\ &\quad \left. + \sin Bt \frac{-\epsilon^{-At} \{ A\sin(\omega-B)t + (\omega-B)\cos(\omega-B)t \}}{A^2 + (\omega-B)^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \cos Bt \left[ \frac{e^{-At} \{ (\omega+B) \sin(\omega+B)t - A \cos(\omega+B)t \}}{A^2 + (\omega+B)^2} \right. \\
 & \left. - \cos Bt \frac{e^{-At} \{ (\omega-B) \sin(\omega-B)t - A \cos(\omega-B)t \}}{A^2 + (\omega-B)^2} \right] \\
 & = \frac{V}{2LCB} \left[ \frac{(\omega+B) \sin \omega t - A \cos \omega t}{A^2 + (\omega+B)^2} - \frac{(\omega-B) \sin \omega t - A \cos \omega t}{A^2 + (\omega-B)^2} \right] \\
 & = \frac{V [ \omega(-4\omega B) + B(2A^2 + 2\omega^2 + 2B^2) ] \sin \omega t + AV(4\omega B) \cos \omega t}{2LCB \{ A^2 + (\omega+B)^2 \} \{ A^2 + (\omega-B)^2 \}} \\
 & = \frac{\sqrt{(A^2 - \omega^2 + B^2)^2 + 4A^2 \omega^2}}{LC \{ A^2 + (\omega+B)^2 \} \{ A^2 + (\omega-B)^2 \}} V \sin \left( \omega t - \tan^{-1} \frac{-2A\omega}{A^2 - \omega^2 + B^2} \right) \quad (8)
 \end{aligned}$$

以上の結果より充電期間の  $e$  はコイルに誘起される起電力と同一の角速度をもつ正弦波に沿うことがわかる。

3. 充電と放電の境

(8) 式を  $e = Q \sin(\omega t - \phi)$  とおくと

$$Q = \frac{\sqrt{(A^2 - \omega^2 + B^2)^2 + 4A^2 \omega^2}}{LC \{ A^2 + (\omega+B)^2 \} \{ A^2 + (\omega-B)^2 \}} V \dots\dots\dots(9)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{-2A\omega}{A^2 - \omega^2 + B^2} \text{ ただし、負のときは } \pi \text{ を加える。} \dots\dots\dots(10)$$

充電期間の最終点には  $i=0$  となるので、 $L$  と  $r$  による電圧降下はない。したがって、 $V \sin \omega t$  が  $Q \sin(\omega t - \phi)$  に等しくなる。そのときを  $t=t_0$  とすると  $V \sin \omega t_0 = Q(\omega t_0 - \phi)$  この式より  $t_0$  を出すと

$$t_0 = \frac{1}{\omega} \tan^{-1} \frac{\sin \phi}{\cos \phi - V/Q} \text{ ただし、負のときは } \frac{\pi}{\omega} \text{ を加える。} \dots\dots(11)$$

したがって、 $V \sin \omega t$  と  $Q \sin(\omega t - \phi)$  の交点の高さは (11) を使用し

$$E = V \sin \omega t_0 = \frac{V \sin \phi}{\sqrt{1 - \frac{2V}{Q} \cos \phi + \left(\frac{V}{Q}\right)^2}} \dots\dots\dots(12)$$

図3にてわかるように、放電期間の最終点 (= 充電期間の開始点) は

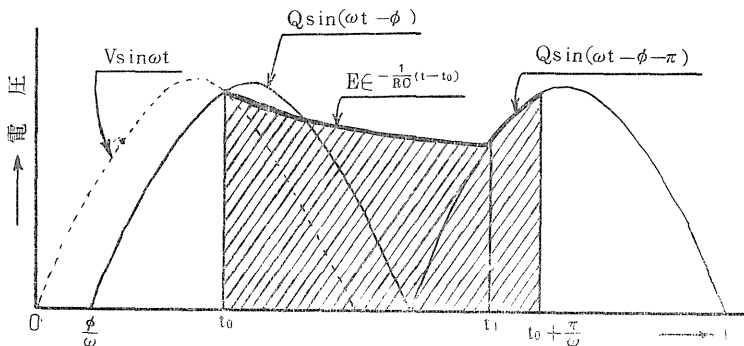


図 3 充電部と放電部の境を説明する

$$E \in \frac{t_1 - t_0}{RC} = Q \sin(\omega t_1 - \pi - \phi) \dots \dots \dots (13)$$

を満足する  $t_1$  のときである。この式より数学的に  $t_1$  を求めるのは困難なので電子計算機で求めることとする。

放電曲線が次の正弦波の半波と交わる点は、谷から頂上間の  $\frac{\pi}{2}$  rad. 以内に入る。したがって、それを100等分してその  $J$  番目を  $IF$  ステートメントで求める。具体的には、 $J$  を1から100まで変える間に

$$E \in \frac{\phi + \pi - \omega t_0 + \frac{\pi}{2} \times \frac{J}{100}}{-RC\omega} - Q \sin\left(\frac{\pi}{2} \times \frac{J}{100}\right)$$

の符号の変わるときの  $J$  を求め、それを次式に入れ

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \left( \phi + \pi + \frac{\pi}{2} \times \frac{J}{100} \right) \dots \dots \dots (14)$$

とする。

4. 出力電圧の式その他

出力の平均電圧を求めるため、図3の陰線を施した部分を積分し時間で除すると

$$\begin{aligned} out &= \frac{\omega}{\pi} \left[ \int_{t_1}^{t_0} E \in \frac{t-t_0}{RC} dt + \int_{t_1}^{t_0+\frac{\pi}{\omega}} Q \sin(\omega t - \phi - \pi) dt \right] \\ &= \frac{RC\omega E}{\pi} \left( 1 - \in \frac{t_0-t_1}{RC} \right) + \frac{Q}{\pi} \left[ \cos(\omega t_1 - \phi - \pi) - \cos(\omega t_0 - \phi) \right] \dots \dots (15) \end{aligned}$$

ここまでは、 $V$  および  $\omega$  を定数として扱い、(9)、(11)、(12)の式を得たが、実際は  $V$  および  $\omega$  は変数でありかつ、 $V \propto \omega$  なる関係があるので、 $V$  の代りに  $G\omega$  を入れ

$$Q = \frac{G\omega \sqrt{(A^2 - \omega^2 + B^2)^2 + 4A^2\omega^2}}{LC\{A^2 + (\omega + B)^2\}\{A^2 + (\omega - B)^2\}} \dots \dots \dots (9)'$$

$$t_0 = \frac{1}{\omega} \tan^{-1} \frac{\sin\phi}{\cos\phi - G\omega/Q} \quad \text{ただし、負のときは } \frac{\pi}{\omega} \text{ を加える} \dots \dots (11)'$$

$$E = \frac{G\omega \sin\phi}{\sqrt{1 - \frac{2G\omega}{Q} \cos\phi + \left(\frac{G\omega}{Q}\right)^2}} \dots \dots \dots (12)'$$

以上で電子計算機にかけるに要する式(4)、(5)、(9)'、(10)、(11)'、(12)'、(14)、(15)の全部を導き終った。

5. 結 果

$\omega$  の変化に対する直流出力電圧の状況をしらべるため、(15)をプロットして見る。ただし、(15)式中に出て来る  $E$ 、 $t_0$ 、 $t_1$ 、 $Q$  等はすべて他の式を用いねばならぬので到底筆算でなどやれるものでない。プログラムは次の通りになる。

DIMENSION RO(3), W(21), Q(21), P(21), TO(21), E(21), TI(21), OUT(21)  
 R=69.  
 H=96. E-3  
 C=3.3 E-6  
 G=7.2 E-3

```

SET  O
CO=0.
C1 =1.
LINE  0,C0,C1
C2 =0.0025
C3 =0.5
DO  50 K=3,5
RO(K)=10.**K
A=-(R*C+H/RO(K))/(2.*H*C)
B=SQRTE((1.+R/RO(K)-(R*C+H/RO(K))**2/(4.*H*C))/(H*C))
DO  40 I=1,21
W(I)=200.*FLATF(21-I)
Q(I)=SQRTE((A*A-W(I)**2+B*B)**2+(2.*A*W(I))**2)*G*W(I)/(H*C
*(A*A+(W(I)+B)**2)*(A*A+(W(I)-B)**2))
P(I)=ATANF(-2.*A*W(I)/(A*A-W(I)**2+B*B))
IF(P(I))15,15,16
15  P(I)=P(I)+3.14159
16  TO(I)=1./W(I)*ATANF(SINF(P(I))/(COSF(P(I))-G*W(I)/Q(I)))
    IF(TO(I))17,17,18
17  TO(I)=TO(I)+3.14159/W(I)
18  E(I)=G*W(I)*SINF(P(I))/SQRTE(1.-2.*G*W(I)/Q(I)*COSF(P(I))+(G*
W(I)/Q(I))**2)
    DO  19 J=1,100
        IF(E(I)*EXPEF((P(I)+3.14159)/W(I)-TO(I)+3.14159*FLATF(J)/
(200.*W(I))/(-RO(K)*C))-Q(I)*SINF(3.14159*FLATF(J)/200.))20,20,19
19  CONTINUE
20  T1(I)=(P(I)+3.14159)/W(I)+3.14159*FLATF(J)/(200.*W(I))
40  OUT(I)=RO(K)*C*W(I)*E(I)/3.14159*(1.-EXPEF((TO(I)-T1(I))/(RO
(K)*C)))+Q(I)/3.14159*(COSF(W(I)*T1(I)-P(I)-3.14159)-COSF(W(I)*
TO(I)-P(I)))
50  CURVE 1,C2,C,3,(W(I),OUT(I),I=1,21)
    C9=9.
    C10=10.
    AXIS 1, C0, C0, C10, C1
    AXIS 2, C0, C0, C9, C1
    X LABEL 51
51  FORMAT(27H ANGULAR VELOCITY (RAD/SEC))
    Y LABEL 52
52  FORMAT(14H DC OUTPUT(V))
END

```

以上の結果はプロッターの作図による図4で示される。これにより出力電圧のピークは $\omega=1800$  附近にあり、これ以上の $\omega$  では速度計として不適当であることがわかる。そして

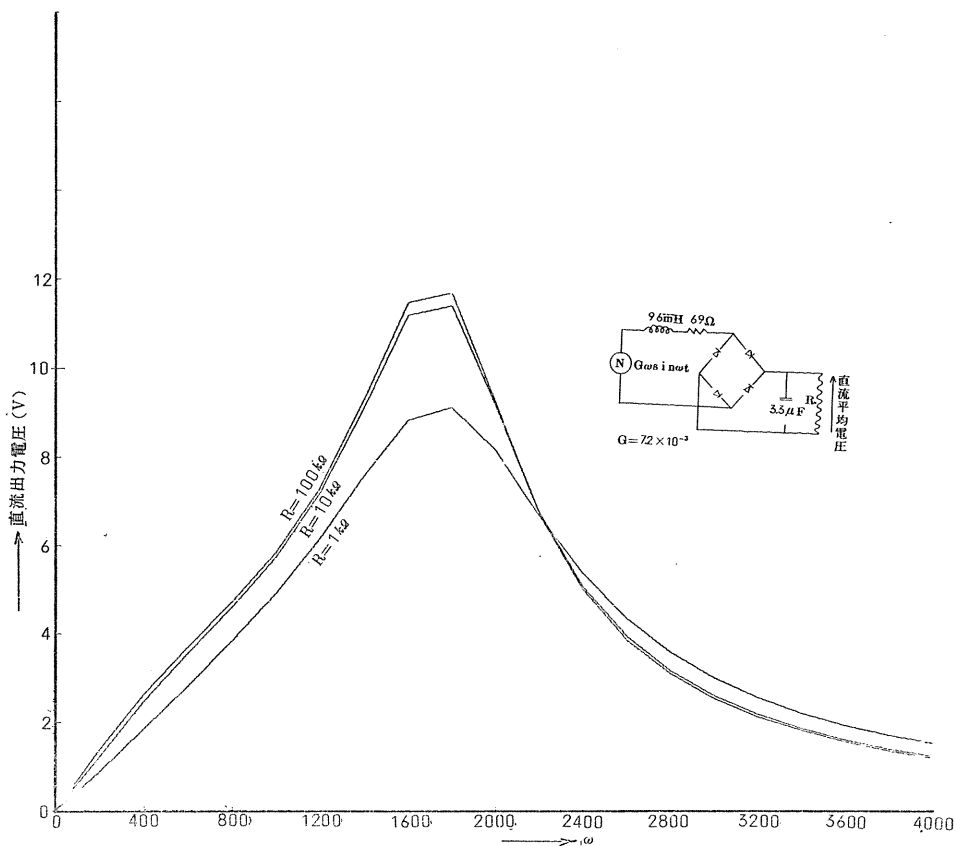


図4 プロッターの作図したものを複写した図

て、ピークの前は略直線ではあるが多少屈曲があり、出力電圧は $\omega$  に完全な比例関係にあるとはいえない。したがって、校正なしでは正確な回転計とはなり得ない。負荷抵抗 $R$  を $1k\Omega$ ,  $10k\Omega$ ,  $100k\Omega$  の3種に変えた場合を計算させたため3本の曲線となっているが、 $R=1k\Omega$  の場合が最も直線に近くなり、 $10k\Omega$  と  $100k\Omega$  の両者間にはほとんど差がない。

次に曲線のピークが $\omega=1800$  附近になる理由であるが、(10)式において $\omega = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} \left(1 + \frac{r}{R}\right)} \doteq \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1770$  のとき、 $\phi=90^\circ$  となることと関連があると思われる。これは( $L$  と  $C$  の直列共振点)に該当し興味ある結果といわねばならぬ。

$\omega$  の変化に対する出力電圧の応答のずれは、(10)式の $\phi$ の項が関係する。これは波形より考えて、充電部のみが関係し放電部の影響は少いと見なされるからである。また、 $\omega$  に対する大きさの応答の方は図4より使用範囲においては略直線の関係にあることがわかる。したがって、非線形であるこの系においても記述関数的な考え方で近似的伝達関数が求められ

$$\frac{out}{\omega} = \frac{7}{1200} \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{-2A\omega}{A^2 + B^2 - \omega^2}\right)^2}}{1 + j \frac{-2A\omega}{A^2 + B^2 - \omega^2}} \left( \begin{array}{l} \text{ただし, 使用範囲は図4} \\ \text{より } \omega < \sqrt{A^2 + B^2} \\ \text{(4) 式より } A < 0 \end{array} \right) \quad (16)$$

となる。これは図4より、 $\omega=1200$  で  $out=7^v$  であり、かつ、使用範囲は  $\omega < \sqrt{A^2 + B^2}$  なので

$$\left| \frac{out}{\omega} \right| \text{の平均値} = \frac{7}{1200}, \quad \tan\phi = \frac{-2A\omega}{A^2 + B^2 - \omega^2}$$

を用いることにより導き出せる。