位相亜群と準ヒルベルト環

芳賀義則*

(昭和56年9月8日受理)

Topological Groupoids and Quasi-Hilbert Algebras

YOSHINORI HAGA

Abstract — Representations of groupoids which are locally trivial and locally compact are studied following Westman [8], and a natural construction of quasi-Hilbert algebras associated to such groupoids are confirmed.

まえがき

最近，作用素環の研究に亜群が大きな役割を果たすようになって来ている。ここではその亜群の表現などについて考察する。可測亜群の表現に関する研究は数多い(〔1〕,〔6〕およびそれらの引用文献参照)が，我々は位相亜群の，しかも構造が比較的簡単な場合，すなわち局所自明な局所コンパクト亜群の連続表現について考えることにする。このような亜群はEhresmann〔3〕，Westman〔8〕などが，多分に微分何学的な興味から研究したものであるが，それは作用素環にも無縁なものでない。その表現について〔8〕,〔9〕と同様な議論をした後で，このような亜群から自然に準ヒルベルト環が構成されることを確かめる。

1. 位相亜群

集合Gにおいて，$G\times G$の特定の部分集合$G^{(2)}$が定まっていて，$G^{(2)}$からGへの写像 $(x, y)\to xy$ (積) およびGからGへの写像 $x\to x^{-1}$ (逆元)が次の4条件を満たすように定義されているときGを**亜群**(groupoid)という。

(i) $(x^{-1})^{-1}=x$.

(ii) $(x, y), (y, z)\in G^{(2)}$ ならば (xy, z), $(x, yz)\in G^{(2)}$ であって $(xy)z=x(yz)$

(iii) $(x^{-1}, x)\in G^{(2)}$. また, $(x, y)\in G^{(2)}$ならば $x^{-1}(xy)=y$.

(iv) $(x, x^{-1})\in G^{(2)}$. また, $(z, x)\in G^{(2)}$ならば $(zx)x^{-1}=z$.

これはHahn〔4〕による定義であって,〔5〕の定義すなわち"亜群とはその任意の元が逆元をもつ小カテゴリーである"ということと同値である。

$x\in G$に対し $d(x)=x^{-1}x$ をxの始対象(initial object, domain), $r(x)=xx^{-1}$ を終対象(final object, range)という。これらは$r(x)x=x$, $xd(x)=x$の意味で左右の単位元である。$G^0=d(G)=r(G)$をGの単位の集合という。Gの元はx, y等で表わし，単位元にはp, q等を用いることにする。p, $q\in G^0$に対して $G(q, p)=\{x\in G \mid d(x)=p, r(x)=q\}$ とする。任意のp, $q\in G^0$ に対して $G(q, p)$が空でないとき，亜群Gは**推移的**であるという。また$G(p, p)$は群であり，これをpにおける**等方群**という(〔6〕)。容易に分かるように推移的亜群Gではすべての等方群は互いに同形である。

いま，Gを推移的亜群とし，$e\in G^0$を任意に1つ選んで固定する。任意の$q\in G^0$に対してそれぞれ1つの$e_q\in G(q, e)$を選べば，それらの全体$\{e_q \mid q\in G^0\}$と$G(e, e)$とでGが生成される。すなわち任意の$x\in G$は$e_q z e_p^{-1}$, $z\in G(e, e)$の形にかける。しかもその

*茨城大学工学部応用数学科(日立市中成沢町)

表わし方は一意的に定まるから，写像　$(q, p, z) \to e_q z e_p^{-1}$　は$G^0 \times G^0 \times G(e, e)$からGの上への1対1の写像である。そして$G^0 \times G^0 \times G(e, e)$における積を　$(s, q, y)(q, p, z) = (s, p, yz)$　で定義すれば$G^0 \times G^0 \times G(e, e)$は亜群であり，上で述べたことからそれはGと同形になる。従って，推移的亜群の代数的構造は等方群$G(e, e)$とG^0によって決定される(〔3〕)。亜群Gが推移的でない場合には，明らかにこれを互いに素な推移的部分亜群の和集合として表わすことができる。

亜群Gが同時にハウスドルフ位相空間でもあり，亜群の演算と位相について次の2つの条件が満たされているときGは**位相亜群**であるという(〔3〕)。

(i)　写像$(x, y) \to xy$は$G^{(2)}$からGへの写像として連続である。ただし$G^{(2)}$は$G \times G$から誘導された位相をもつとする。

(ii)　写像$x \to x^{-1}$はGからGへの写像として連続である。

この定義から容易に分かるように，

(a)　写像$x \to x^{-1}$は同相写像である。

(b)　写像dとrは共に連続である。

(c)　G^0はGの閉部分集合である。

(d)　$G^{(2)}$は$G \times G$の閉部分集合である。

(e)　G^0はGの部分空間であり，またrによるGの商空間とも考えられるが部分空間としての誘導位相と商位相は一致する。

(f)　$G(q, p)$が空でないとき，等方群$G(p, p)$と$G(q, q)$は同形な位相群である。

位相亜群Gが**局所自明**であるとは，任意の$p \in G^0$に対して，pの1つの開近傍$V(p)$および$V(p)$からGへの連続関数σで，すべての$q \in V(p)$に対して$\sigma(q) \in G(q, p)$となるものが存在することである(〔3〕)。

このような亜群は微分幾何学において多くの例をもつ。またこのときGの推移的部分亜群の単位の集合はGの単位の集合G^0において開かつ閉である。Gが推移的である場合には，局所自明性は次のことと同値である。すなわち，特定の1点$e \in G^0$，G^0の開被覆$\{V_\alpha\}$および各V_αからGへの連続関数σ_αで，すべての$q \in V_\alpha$に対して$\sigma_\alpha(q) \in G(q, e)$となるものが存在する。

局所自明な推移的位相亜群Gは$G^0 \times G^0$を底空間とするファイバー束の構造を持つことを示そう。ファイバー束に関する定義は〔7〕に従う。射影は　$r \times d : G \to G^0 \times G^0$　とし，また任意に特定の1点$e \in G^0$を定めて，ファイバーを$G(e, e)$，構造群を$G(e, e)$とする。代表の座標束を作ろう。Gの局所自明性により，G^0の開被覆$\{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$と，各$V_\alpha$からGへの連続関数$\alpha$で$\alpha(q) \in G(q, e)$　$(q \in V_\alpha)$となるものが存在する。$\alpha, \beta \in A$に対して$V_\alpha \cap V_\beta$から$G(e, e)$への写像　$\alpha(q)^{-1} \cdot \beta(q)$　は明らかに構造群に属する。よって座標近傍として$V_\alpha \times V_\beta$ $(\alpha, \beta \in A)$をとり，座標関数$\varphi_{\alpha\beta} : (V_\alpha \times V_\beta) \times G(e, e) \to (r \times d)^{-1}(V_\alpha \times V_\beta)$は

$$\varphi_{\alpha\beta}(q, p, x) = \alpha(q)\, x\, (\beta(p))^{-1}$$
$$(q \in V_\alpha,\ p \in V_\beta,\ x \in G(e, e))$$

で定義すればよい。Gが推移的であるからこの写像は全射である。このことからまたGが局所コンパクトのときは，Gの位相多様体としての構造はG^0と$G(e, e)$の位相構造から得られることが分かる。

2. 局所自明亜群の表現

Gを位相亜群，G^0をその単位の集合とする。$\mathscr{H} = \{H_p \mid p \in G^0\}$は$G^0$を基底とするヒルベルト空間$H_p$の連続場とする(〔2〕II. 1. Exerc. 5)。このときGの$\mathscr{H}$における(連続な)**表現**Uとは，任意の$x \in G(q, p)$に次の2つの条件を満足するようなH_xからH_yへの等長変換$U(x)$を対応させる準同形Uをいう。

(i)　$r(x) = r(y)$ならば
$$U(x^{-1}y) = U(x)^{-1} U(y).$$

(ii)　$\mathscr{H}$の任意の2つの連続断面ξ，ηに対し
$$(\xi, \eta)(x) = \langle \xi_q,\ U(x)\eta_p \rangle$$
$$(x \in G(q, p))$$

で定義されるG上の関数(ξ, η)は連続である。

ここではGが局所自明な位相亜群である場合のみを論じることにする。表現空間$\mathscr{H}$には次のようなファイバー束の構造が導入される。底空間はG^0とすると$\mathscr{H}$からG^0への射影πは自然に定義される。1つの点$e \in G^0$を選んでヒルベルト空間H_eをファイバーとし，構造群はH_e上のユニタリ作用素全体の群$U(H_e)$とする。各$p \in G^0$に対し，H_p上の内積は適当な許容写像によってH_eから導入されているとしてよい。このときH_eからH_pへの等長写像はすべて許容写像である。よって$U_{q,p}$ $(p, q \in G^0)$をH_pからH_qへの等長変換とすると$U_{q,p}$はすべてまた許容写像である。その全体の集合を

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathscr{H}) = \{U_{q\,p} \mid p, q \in G^0\}$$

とする。この$\mathcal{U}$には変換の合成を積とし，

$$\mathrm{d}(U_{qp})=I_p, \quad \mathrm{r}(U_{qp})=I_q$$

として自然に亜群の構造が定義される。ただし，I_pはH_pにおける恒等写像であって，その全体がこの亜群の単位の集合である。$\mathcal{U}$はまた明らかに位相亜群である。つぎにこの亜群が局所自明であることを示そう。

ファイバー束$\mathcal{H}$を代表する１つの座標系において，$\{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$を底空間$G^0$の開被覆，　$\varphi_\alpha: V_\alpha \times H_e \to \pi^{-1}(V_\alpha)$　を座標関数とする。$\mathcal{U}(V_\alpha, e)=\{U_{qe} \mid q \in V_\alpha\}$として，写像　$\varphi_\alpha \times I_e: V_\alpha \to \mathcal{U}(V_\alpha, e)$を

$$(\varphi_\alpha \times I_e)(q)=\varphi_\alpha(q, I_e(\cdot))$$

で定義すれば，$\mathrm{r}\cdot(\varphi \times I_e)$は恒等写像である。そこで任意の$p \in G^0$に対し，$p$の属する座標近傍を$V_\alpha$とし，すべての$q \in V_\alpha$に対して，$V_\alpha$ から$\mathcal{U}$への関数σを

$$\sigma(q)=(\varphi_\alpha \times I_e)(q)\cdot(\varphi_\alpha \times I_e)(p)^{-1}$$

で定義すれば，σは連続であって　$\mathrm{d}(\sigma(p))=I_p$，$\mathrm{r}(\sigma(p))=I_q$　となる。よって$\mathcal{U}$は局所自明である。

以上の考察から，亜群Gが局所自明な推移的亜群の場合に，次の事実が成り立つことはもはやほとんど明白である（〔8〕）。

(a) UがGの$\mathcal{H}$における表現ならば，任意の$p \in G^0$に対して$U \mid G(p, p)$は等方群$G(p, p)$のH_pにおけるユニタリ表現であり，それらはすべてユニタリ同値である。

(b) １つの等方群$G(p, p)$の或るヒルベルト空間におけるユニタリ表現U_pが与えられたとき，Gの或る$\mathcal{H}$における表現Uが存在して，$U \mid G(p, p)$とU_pはユニタリ同値である。

(c) U, U'をそれぞれGの$\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$における表現とすれば，$U \mid G(p, p)$と$U \mid G'(p, p)$がユニタリ同値のときそのときに限りUとU'は同値である。ただし，UとU'との同値は次のように定義される。

写像$\theta: \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$に対し，$\theta(H_p)=H_p'$であり，$\theta_p=\theta \mid H_p$は同形写像であるとする。これが許容写像であって，しかも

$$\Theta(U_{qp})=\theta_q U_{qp} \theta_p^{-1} \qquad (U_{qp} \in \mathcal{U}(\mathcal{H}))$$

によって定義される$\Theta: \mathcal{U}(\mathcal{H}) \to \mathcal{U}(\mathcal{H}')$に対して$\Theta \cdot U=U'$となるとき$U$と$U'$は同値であるという。

Gが局所コンパクトである場合，Gの表現Uは群の場合と同様にコンパクトな台をもつG上の連続関数の環$\mathcal{K}(G)$の表現に拡張され，亜群上の調和解析へと議論を進めることができる。それは〔9〕で論じられているので省略し，次の節では$\mathcal{K}(G)$がDixmier〔2〕の意味で準ヒルベルト環であることを示すことにする。

3. 準ヒルベルト環 $\mathcal{K}$(G)

この節では，Gは常に局所自明，局所コンパクトかつ推移的な亜群とする。このとき明らかに$G(q, p)$（p, $q \in G^0$）およびG^0は局所コンパクトである。最初は〔9〕に従って幾つかの定義と結果を述べる。

$\lambda=\{\lambda_{qp} \mid p, q \in G^0\}$を$G(q, p)$上の正則ボレル測度$\lambda_{qp}$の系とし，$G(q, p)$上の可積分関数$f$に対して

$$\lambda_{qp}(f)=\int_{G(q,p)} f(x)\, d\lambda(x)$$

と表わす。またG上のコンパクトな台を持つ連続関数の全体を$\mathcal{K}(G)$で表わす。$h \in \mathcal{K}(G)$に対し$G^0 \times G^0$上の複素数値関数$\lambda(h)$を

$$(\lambda(h))(q, p)=\lambda_{qp}(h \mid G(q, p))$$

で定義するとき，常に$\lambda(h) \in \mathcal{K}(G^0 \times G^0)$となるならば系$\lambda=\{\lambda_{qp}\}$は連続であるということにする。連続な測度系$\lambda=\{\lambda_{qp}\}$が左不変であるとは，任意の$x \in G(q, s)$と$f \in \mathcal{K}(G(q, p))$に対して

$$\int_{G(s,p)} f(xy)\, d\lambda(y)=\int_{G(q,p)} f(y)\, d\lambda(y)$$

となること，また右不変であるとは，$x \in G(q, s)$，$f \in \mathcal{K}(G(q, p))$に対して

$$\int_{G(q,s)} f(yx)\, d\lambda(y)=\int_{G(q,p)} f(y)\, d\lambda(y)$$

となることをいう。

G上の左不変測度系は，等方群$G(e, e)$上のモジュラー関数をGへ拡張することによって作ることができる。Gから正数全体の乗法群への連続準同形Δはその$G(e, e)$への制限が，局所コンパクト群$G(e, e)$のモジュラー関数であるときG上のモジュラー関数ということにする。（G^0がパラコンパクトであればG上のモジュラー関数は存在する。ただし唯一つとは限らない。）このときG上のモジュラー関数Δと左不変測度系λとの間には

$$(*) \quad \begin{aligned} \lambda_{qp}(f) &= \int_{G(q,p)} f(y)\, d\lambda(y) \\ &= \int_{G(e,e)} \Delta(u) f(vxu)\, d\lambda(x) \\ & \qquad (u \in G(e, p),\ v \in G(q, e)) \end{aligned}$$

によって自然な1対1の対応がある。($G(e, e)$上では $d\lambda(x)$ は与えられたハール測度を示す。またこの積分は u, v の選び方には関係せずに定まる。) $G(e, e)$ がユニモジュラーならばG上の左右の不変測度系は唯一つ定まる。以後G上のモジュラー関数Δとそれに対応する左不変測系λは定まっているものとし，$d\lambda(x)$ を dx と略記する。またG^0上には $\mathrm{supp}\,\mu=G^0$ なるハール測度μが与えられているとし，$\mu(f)$を$\int_{G^0} f(q)\,dq$で表わす。

$\mathcal{K}(G)$ 上の関数f, gに対しそのたたみこみ$f*g$を

$$f*g(y)=\int_{G^0}\int_{G(q,s)} f(x)\,g(x^{-1}y)\,dx\,ds \qquad (y\in G(q,p))$$

で定義し，またfの対合f^*を

$$f^*(y)=\bar{f}(y^{-1})\Delta(y^{-1})$$

で定義する。通常の和，スカラー倍とこれらの定義によって$\mathcal{K}(G)$は$*$環となる。以上は〔9〕で論じられていることであるが，以下においてはこの$\mathcal{K}(G)$が

$$f^\wedge(x)=f(x)/\sqrt{\Delta(x)}$$

と内積

$$\langle f, g\rangle=\int_{G^0}\int_{G^0}\int_{G(q,s)}\sqrt{\Delta(y)}f(y)\bar{g}(y)\,dy\,dq\,ds$$

によって〔2〕のI.5で定義されている準ヒルベルト環になることを示そう。$f\to f^\wedge$が$\mathcal{K}(G)\to\mathcal{K}(G)$の1対1線形写像であることは明らかであるから，準ヒルベルト環の定義の5つの条件が成り立つことを順に確かめよう。

(i) $\langle f, g\rangle=\langle g^*, f^*\rangle$：等式(*)によって

$$\int_{G(q,s)}\sqrt{\Delta(y)}\,g^*(y)\bar{f}^*(y)\,dy$$
$$=\int_{G(e,e)}\Delta(u)\sqrt{\Delta(vxu)}\,\bar{g}(u^{-1}x^{-1}v^{-1})$$
$$\Delta(u^{-1}x^{-1}v^{-1})\cdot f(u^{-1}x^{-1}v^{-1})$$
$$\Delta(u^{-1}x^{-1}v^{-1})\,dx$$

$G(e, e)$ 上では$\Delta(x^{-1})\,dx=d(x^{-1})$ だから

$$=\int_{G(e,e)}\Delta(v^{-1})\sqrt{\Delta(u^{-1}xv^{-1})}$$
$$\bar{g}(u^{-1}xv^{-1})f(u^{-1}xv^{-1})\,dx$$
$$=\int_{G(s,q)}\sqrt{\Delta(y)}\,f(y)\bar{g}(y)\,dy$$

よって

$$\langle g^*, f^*\rangle=\int_{G^0}\int_{G^0}\int_{G(q,s)}\sqrt{\Delta(y)}\,g^*(y)\bar{f}^*(y)\,dy\,dq\,ds$$
$$=\int_{G^0}\int_{G^0}\int_{G(s,q)}\sqrt{\Delta(y)}\,f(y)\bar{g}(y)\,dy\,dq\,ds$$
$$=\langle f, g\rangle$$

(ii) $\langle f*g, h\rangle=\langle g, f^{*\wedge}*h\rangle$ ：(i)と同様に直接の計算で得られる。

(iii) 写像 $g\to f*g$が連続：$\mathcal{K}(G^0\times G^0)$における$L_2$ノルムを$\|\ \|_2$ で表わすと，$\|f\|=\|\lambda(|f|)\|_2$ になることが

$$\int_{G(q,p)}|f(x)|\,dx=\lambda_{qp}(|f|\,|\,G(q,p))$$
$$=\lambda(|f|)(q,p)$$

から分かり，$f*g\in\mathcal{K}(G^0\times G^0)$ に対しては$\|f*g\|_2\leqq\|f\|_2\,\|g\|_2$ が成り立つから

$$\|f*g\|=\|\lambda(|f*g|)\|_2$$
$$\leqq\|\lambda(|f|*|g|)\|_2$$
$$=\|\lambda(|f|)*\lambda(|g|)\|_2$$
$$\leqq\|\lambda(|f|)\|_2\,\|\lambda(|g|)\|_2=\|f\|\,\|g\|$$

(iv) 集合$\{f*g\mid f, g\in\mathcal{K}(G)\}$が$\mathcal{K}(G)$の稠密な線形部分空間を生成する：$g$を$\mathcal{K}(G)$の任意の関数とし$\varepsilon$は任意の正数とする。位相多様体$G$の構造は§1で述べたように$G^0\times G^0\times G(e, e)$と同相であるから簡単のために同一視することにすれば，gのコンパクトな台は$K\times K\times G(e, e)$に含まれるとしてよい。ただし，KはG^0のコンパクトな部分集合である。そして，Kの有限被覆に対する1の分割を用いることによりKは任意に小さな集合と考えても一般性は失われない。等方群$G(e, e)$の単位元eのコンパクトな近傍Vを十分小さくとって $\Sigma=\Sigma(g, \varepsilon)=K\times K\times V$すると，$g$の一様連続性により

$$m=\max\{\,|g(x^{-1}y)-g(y)|\mid x\in\Sigma,\ (x^{-1}, y)\in G^{(2)}\}<\varepsilon$$

となる。またΣを台とする適当な正値関数$f\in\mathcal{K}(G)$を選ぶことによって，Σから$\lambda(\Sigma_1)<\varepsilon$ なる部分集合Σ_1を除いた部分では

$$\left|\int_{G^0}\int_{G(q,s)} f(x)\,dx\,ds-1\right|<\varepsilon \qquad (q\in K)$$

とすることができる。そのようなfに対しては，任意の$y\in G-\Sigma_1$において，次の不等式が成り立つ。 $y\in G(q, p)$として

$$
\begin{aligned}
&|(f*g-g)(y)| \\
&\leqq \left| \int_{G^0}\int_{G(q,s)} f(x)g(x^{-1}y)\,dx\,ds \right. \\
&\qquad \left. -\int_{G^0}\int_{G(q,s)} f(x)g(y)\,dx\,ds \right| \\
&\qquad +\left| \int_{G^0}\int_{G(q,s)} f(x)g(y)\,dx\,ds-g(y) \right| \\
&\leqq m\left(\int_{G^0}\int_{G(q,s)} f(x)\,dx\,ds \right) \\
&\qquad +\left| \int_{G^0}\int_{G(q,s)} f(x)\,dx\,ds-1 \right| |g(y)| \\
&< \varepsilon(1+\varepsilon)+\varepsilon\cdot\max\{|g(y)|\,|\,y\in G\}
\end{aligned}
$$

この不等式と $\lambda(\Sigma_1)<\varepsilon$ によって $\| f*g-g \|$ は f を適当に選べば任意に小さくできる。

(v) $\mathcal{K}(G)$ の完備化であるヒルベルト空間を $\mathcal{H}$ とする。$\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ は，すべての $f, g \in \mathcal{K}(G)$ に対して $<\varphi, f*g>=<\psi, f^{\wedge}*g^{\wedge}>$ が成り立つような２元であるとすると，列 $\{h_n\}\subset\mathcal{K}(G)$ で $h_n\to\psi$, $h_n^{\wedge}\to\varphi$ となるものが存在する：$\psi\in\mathcal{H}$ だから $h_n\to\psi$ なる列 $\{h_n\}\subset\mathcal{K}(G)$ は存在する。示すべきことは $h_n^{\wedge}=h_n/\sqrt{\Delta}\to\varphi$ であるから，結局 $\varphi=\Delta^{-\frac{1}{2}}\psi$ を示せばよい。さて

$$
<\varphi, f*g>=\int_{G^0}\int_{G^0}\int_{G(q,s)}\sqrt{\Delta(y)}\,\varphi(y)
\left\{\int_{G^0}\int_{G(q,t)}\overline{f}(x)\overline{g}(x^{-1}y)\,dx\,dt\right\}dy\,dq\,ds
$$

であり，一方

$$
\begin{aligned}
<\psi, f^{\wedge}*g^{\wedge}> &= \int_{G^0}\int_{G^0}\int_{G(q,s)}\sqrt{\Delta(y)}\psi(y) \\
&\quad \left\{\int_{G^0}\int_{G(q,t)} \overline{f}(x)\,\Delta(x)^{-\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad \left. \cdot\overline{g}(x^{-1}y)\,\Delta(x^{-1}y)^{-\frac{1}{2}}\,dx\,dt\right\}dy\,dq\,ds \\
&= \int_{G^0}\int_{G^0}\int_{G(q,s)}\sqrt{\Delta(y)}\left(\Delta(y)^{-\frac{1}{2}}\psi(y)\right) \\
&\quad \left\{\int_{G^0}\int_{G(q,t)}\overline{f}(x)\overline{g}(x^{-1}y)\,dx\,dt\right\}dy\,dq\,ds
\end{aligned}
$$

仮定によってこの２つの積分は一致し，f, g は $\mathcal{K}(G)$ の任意の関数だから，G 上の不変測度系 λ と G^0 上の測度 μ に関してほとんど至る所，

$$
\varphi(y)=\Delta(y)^{-\frac{1}{2}}\psi(y)
$$

となる。

以上によって $\mathcal{K}(G)$ は準ヒルベルト環であることが示された。従ってもちろんこれに付随する標準フォン・ノイマン環が得られることになる。

参考文献

1) A. Connes: Sur la théorie non commutative de l'intégration. Springer, Lecture Notes in Math, 725(1979) 19--143.
2) J. Dixmier: Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien. Gauthier-Villars, Paris. (1969)
3) C. Ehresmann: Cátegories topologiques et catégories différentiables. Colloque de Géométrie Différentiable Globale, Bruxelles. (1959)
4) P. Hahn: Haar measure for measure groupoids. Trans. Amer. Math. Soc. 242(1978) 1--33.
5) A. Ramsay: Virtual groups and group actions. Advances in Math. 6(1971) 253--322.
6) J. Renault: A Groupoid approach to C*-algebras. Springer, Lecture Notes in Math. 793 (1980)
7) N. Steenrod: The topology of fibre bundles. Princeton Univ. Press, (1951)
8) J. Westman: Locally trivial C^r-groupoids and their representations, Pacific J. Math, 20(1967) 339–349.
9) J. Westman: Harmonic analysis on groupoids. Pacific J. Math. 27(1968) 621--632.