

# S行列と双一次z変換による回路網の過渡解析

小室隆男\*, 秋山道雄\*\*, 本多誠一\*\*\*

(昭和56年9月7日受理)

Transient Analysis of Network by means of S-matrix and Bilinear z-transformation

TAKAO KOMURO, MICHIO AKIYAMA and SEIICHI HONDA

**Abstract** – Recently, a method for the transient analysis of networks by means of the S-matrix and the z-transform has been developed. By use of the bilinear z-transformation instead of an interpolated z-transform in the method, the transformation from s-plane to z-plane can easily be obtained and the accuracy can be improved.

## 1. まえがき

仮想的無損失伝送線路を導入して、各素子(単一の抵抗, インダクタンス, キャパシタンスなど)をS行列で表現し, これにインタポレータを作用させてz変換あるいは修飾z変換を施し単純な代数演算の繰返しを電子計算機で行うことによって, 回路網を過渡解析する簡単な方法(S-z法)が提案された<sup>(1),(2)</sup>。さらに, 非線形回路網, 分布結合線路を含む回路網等へのこの手法の適用法も考えられた<sup>(3),(4)</sup>。

本文はインタポレータを作用させてz変換するかわりに, S行列の各要素の微分演算子sに直接双一次z変換  $s = 2(1-z^{-1})/T(1+z^{-1})$  を施すことにより, z領域への変換を簡単にし計算精度も改善されることを示す。

## 2. z領域への変換

S-z法のz領域への変換には, 各種のインタポレータとz変換の組合せが考えられるが, 現実的なものは変換の難易, 安定性から次に示す二つである。

素子として図1に示す終端コンデンサを例(導入した

伝線線路の特性インピーダンスを $Z_0$ とする)に, これらの組合せについて簡単に述べる<sup>(6)</sup>。図1より, 反射係数す

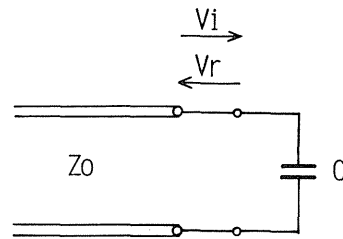


Fig. 1 A terminal capacitor.

なわち  $1 \times 1$  のS行列は次式で表わされる。

$$\Gamma(s) = \frac{V_r(s)}{V_i(s)} = -\frac{s-1/\tau}{s+1/\tau} \quad (1)$$

ここで,  $\tau = CZ_0$  である。以下, z変換の刻み幅をT,  $a = T/\tau$ , z領域における反射係数を $\Gamma(z)$ とする。また, 0次, 1次のインタポレータ  $G_{h0}(s)$ ,  $G_{h1}(s)$  はそれぞれ次式で示される。

$$G_{h0}(s) = (1 - e^{-sT}) / s \quad (2)$$

$$G_{h1}(s) = (e^{sT} - 2 + e^{-sT}) / Ts^2 \quad (3)$$

[1]  $[G_{h0} - Z_m] G_{h0}(s)$  を作用させた後, 修飾z変換を施し, むだ時間要素  $(1-m)T$  の  $m \rightarrow 1$  とし

\* 茨城大学工学部電子工学科(日立市中成沢町)

\*\* 茨城大学工学部情報工学科(日立市中成沢町)

\*\*\* 元茨城大学工学部電子工学科(日立市中成沢町)

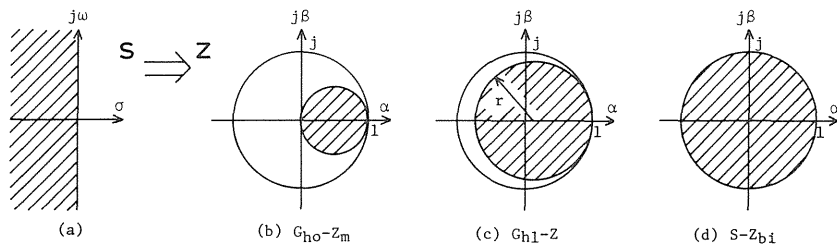


Fig. 2 Mapping from s-plane to z-plane.

た場合

$$\Gamma_1(z) = \lim_{m \rightarrow 1} Z_m \{ G_{h0}(s) \Gamma(s) \}$$

$$= \frac{(1 - 2e^{-a}) + e^{-a} z^{-1}}{1 - e^{-a} z^{-1}} z^{-1} \quad (4)$$

[2] [G<sub>h1</sub>-Z] G<sub>h1</sub>(s)を作用させた後、通常のz変換を施す場合

$$\Gamma_2(z) = Z \{ G_{h1}(s) \Gamma(s) \}$$

$$= \frac{[-2(1 - e^{-a})/a + 1] - [-2(1 - e^{-a})/a + e^{-a}] z^{-1}}{1 - e^{-a} z^{-1}} z^{-1} \quad (5)$$

これらの変換は、s領域(s = σ + jω)で安定な虚軸を含む左半平面のz領域(z = α + jβ)への写像が図2(b), (c) (円の半径rは文献(5)参照)のように、z平面の単位円の内部に写像されるから必ず安定である。しかし、虚軸も単位円の内部に写像されるので、自励振動するような回路網では振動が減衰することになり計算誤差が生じる。その誤差は(c)より(b)の方が大きく生ずることは明らかである。

計算の刻み幅TはT/CZ<sub>0</sub> = a ≪ 1を満足するように選ばれるが、このときこれらの組合せは微分方程式の差分近似法との対応関係より、[G<sub>h0</sub>-Z<sub>m</sub>]が後方オイラー法、[G<sub>h1</sub>-Z]が台形法に対応していることが示されている<sup>(6)</sup>。これより、S行列にインタポレータを作用させ、z変換を施すz領域への変換は、a ≪ 1のときS行列の各要素の微分演算子sを直接差分近似でおきかえたものと等価と考えられる。すなわち、s = (1 - z<sup>-1</sup>)/Tの変換が[G<sub>h0</sub>-Z<sub>m</sub>]と、s = 2(1 - z<sup>-1</sup>)/T(1 + z<sup>-1</sup>)の変換が[G<sub>h1</sub>-Z]と等価である。

そこで、ここではS行列の各要素にインタポレータを作用させることなく、その微分演算子sに直接s = 2(1 - z<sup>-1</sup>)/T(1 + z<sup>-1</sup>)の双一次z変換を施し、z領域への変換が簡単な方法を[S-Z<sub>bi</sub>]として提案する。

[3] [S-Z<sub>bi</sub>] 微分演算子sに直接双一次z変換s = 2(1 - z<sup>-1</sup>)/T(1 + z<sup>-1</sup>)を施す場合

$$\Gamma_3(z) = \Gamma(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}$$

$$= \frac{-(1 - A)/(1 + A) + z^{-1}}{1 - [(1 - A)/(1 + A)] z^{-1}} \quad (6)$$

ただし、A = a/2である。

この双一次z変換は図2(d)に示すように、s平面の虚軸と左半平面をz平面の単位円上とその内部に写像するので必ず安定な変換である。この変換を用いたときの計算誤差は、通常計算の刻み幅をa ≪ 1と選ぶので、[G<sub>h1</sub>-Z]と同程度であり、[G<sub>h0</sub>-Z<sub>m</sub>]より小さい。さらに、式(5) (6)を比較すると分かるように、[G<sub>h1</sub>-Z]に比べて変換が非常に簡単であるので、これら三つの変換のうち[S-Z<sub>bi</sub>]が最も良いz領域への変換である。

### 3. 解析例

図3に示すRLC回路、図4に示すLC回路を例として、Z<sub>0</sub> = 1Ωとし、[G<sub>h0</sub>-Z<sub>m</sub>]、[G<sub>h1</sub>-Z]、[S-Z<sub>bi</sub>]の各方法により解析した。

図3の回路の解析的な解は、

$$V_{cl}(t) = 1 - (1 + t) e^{-t} \quad (7)$$

で表われ、同図に示すようになる。z変換の刻み幅T = 10<sup>-3</sup>sとして、この解と比較した各方法における計

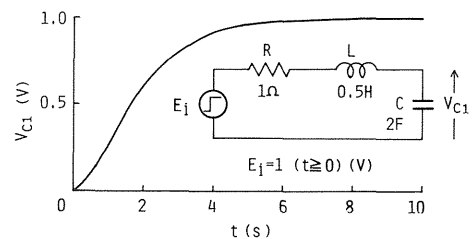


Fig. 3 RLC network and the transient state.

算誤差を表 1 に示す。これより,  $\{G_{h1}-Z\}$  と  $\{S-Z_{bi}\}$  は誤差の程度はまったく同じで,  $\{G_{h0}-Z_m\}$  より精度が 1 桁よいことがわかる。

Table 1 Errors of RLC network.

$T=10^{-3}s$

t(s)	1	2	3	6
$G_{h0}-Z_m$	$-8.6 \times 10^{-3}$	$-2.0 \times 10^{-3}$	$-9.5 \times 10^{-4}$	$-1.3 \times 10^{-3}$
$G_{h1}-Z, S-Z_{bi}$	$-7.0 \times 10^{-4}$	$-3.4 \times 10^{-4}$	$-1.4 \times 10^{-4}$	$1.1 \times 10^{-5}$

図 4 に示す回路の解析的な解は

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq t \leq 0.02s \quad V_{c2}(t) &= 50t - 50 \sin t \\ t > 0.02s \quad V_{c2}(t) &= 1 - 50 \{ \sin t \\ &\quad - \sin(t - 0.02) \} \end{aligned} \right\} (8)$$

で表わされるように, 減衰のない正弦波振動である。この回路について, z 変換のきざみ幅  $T = 10^{-4} s$  として,  $t = 100 s$  まで各方法で計算し, 解を 0.1 s ごとに印字させた。その結果の振幅が最大になる点のうち 4 点について, 式(8)と比較した計算誤差を表 2 に示す。これより,  $\{G_{h0}-Z_m\}$  は時間の経過と共に振動が減衰して計算誤差が大きく生じてくるが,  $\{G_{h1}-Z\}$  と  $\{S-Z_{bi}\}$  はそのようなことはないことが分かる。

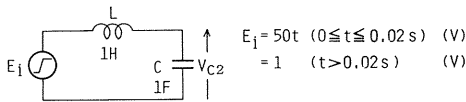


Fig. 4 LC network.

Table 2 Errors of LC network.

$T=10^{-4}s$

t(s)	3.2	34.6	66.0	97.4
$G_{h0}-Z_m$	$-1.0 \times 10^{-4}$	$-8.6 \times 10^{-4}$	$-1.6 \times 10^{-3}$	$-2.5 \times 10^{-3}$
$G_{h1}-Z, S-Z_{bi}$	$3.4 \times 10^{-6}$	$3.9 \times 10^{-5}$	$3.4 \times 10^{-5}$	$-1.1 \times 10^{-5}$

#### 4. むすび

S 行列と z 変換による回路網の過渡解析法において, インタポレータを作用させ z 変換するかわりに, S 行列の各要素の微分演算子 s に直接双一次 z 変換を施すことにより, z 領域への変換が簡単になり, 計算精度も改善されることを示した。

#### 参 考 文 献

- (1) 加藤誠己: 信学論 (D), 58-D, 12, (昭 50-12), p. 734.
- (2) 加藤, 岡田: 信学技報, CST76-59, (1976-09)
- (3) 小室, 秋山, 本多: 信学論 (A), J60-A, 11, (昭 52-11), p. 1023.
- (4) 小室, 秋山, 本多: 信学論 (A), J61-A, 8, (昭 53-08), p. 769.
- (5) 柴田, 加藤: 信学技報, CAS79-175, (1980-03).
- (6) 加藤誠己: 信学論 (D), J63-D, 2, (昭 55-02), p. 200.