Dyeの対応と一般クロス積

芳　賀　義　則*

(1972年9月5日受理)

The Dye Correspondence and Generalized Cross Products

by Yoshinori HAGA

Abstract:— Let G be a countable group of automorphisms acting freely on a von Neumann algebra $\mathscr{A}$. Suppose that $\mathscr{A}$ is $[G]$-finite. Then, it was shown in [8] that there exists a one-to-one correspondence, called the Dye correspondence, between all intermediate subalgebras $\mathscr{B}$ of $G\otimes\mathscr{A}$ and all full subgroups K of $[G]$.

When $\mathscr{A}$ is a factor, each full subgroup K is a full group of a freely acting subgroup F of G and the cross product $F\otimes\mathscr{A}$ is algebraically isomorphic to the intermediate subalgebra $\mathscr{B}$ which corresponds to K in the Dye correspondence. This makes clearer the meaning of the Dye correspondence. But, for a general von Neumann algebra $\mathscr{A}$, a full subgroup K of $[G]$ may not be a full group of a freely acting subgroup K of G. Therefore, in this paper, we construct a generalized cross product of $\mathscr{A}$ by a full subgroup K isomorphic to the intermediate subalgebra $\mathscr{B}$ which corresponds to K. In this construction, we use the determining function investigated in [7]. The generalized cross product constructed here will be useful for further investigation of a cross product through its intermediate subalgebras.

まえがき

フォン・ノイマン環 $\mathscr{A}$ の(可算)群 G によるクロス積 $G\otimes\mathscr{A}$ を考察するとき，G が $\mathscr{A}$ 上で自由に作用することを仮定するのが普通である。これによって，例えば $G\otimes\mathscr{A}$ の任意の元 A の展開

(0.1) $$A=\sum_{g\in G} G\otimes A_g \qquad (A_g\in\mathscr{A})$$

* 茨城大学工業短期大学部数学科

や，G の充満群の元 α の表現（(1.1)参照）

$$(0.2)\qquad \alpha(A)=\sum_{g\in G} g\varphi_V(Q_g A)$$

が一意に定まることになる。[7]，[8] においても，同じ仮定の下でいわゆる Dye の対応を研究した。それは $G\otimes\mathscr{A}$ の中間部分環 $\mathscr{B}$ の全体と G の充満群 $[G]$ の充満部分群 K の全体との間に自然な1対1の対応が存在することをいっている。

ところで，特に $\mathscr{A}$ が因子の場合には (0.2) における中心射影 Q_g が恒等作用素 I に限るから，G が $\mathscr{A}$ 上で自由に作用するとき，G の 元と $[G]$ の元は内部自己同型を除いては一致し，よって $[G]$ の充満部分群は G の一つの部分群 F に内部自己同型をつけ加えたものに外ならない。このことから，$\mathscr{A}$ が因子の場合は，Dye の対応は中間部分環 $\mathscr{A}$ と G の部分群 F との対応になり，しかも $\mathscr{B}\cong F\otimes\mathscr{A}$ となる [9；Theorem 2]）から，Dye の対応の意味は極めて明瞭になる。

一般のフォン・ノイマン環 $\mathscr{A}$ については，$[G]$ の充満部分環 K が自由に作用していることは勿論望み得ないし，また或る自由作用群 F(G の部分群と限らない)の充満群として $K=[F]$ とできるかどうかも，特別の場合，例えば G が Dye の意味で approximately finite である場合等を除いては明らかでない。

そこで，この論文で我々は，[7] でその性格を明らかにした決定関数を用いることによって，充満群 K と $\mathscr{A}$ とから，K に対応する $\mathscr{B}$ に同型なフォン・ノイマン環を構成し，一般の場合にも Dye の対応の意味をより明瞭にすることを試みる。その構成の着想は [1] から得られたものであり，中間部分環を通してクロス積を研究するのに有用である。

1. 準　備. $\mathscr{A}$ は可分なヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上のフォン・ノイマン環とし，その恒等作用素を I で表わす。$\mathscr{A}_p$，$\mathscr{A}_u$ はそれぞれ $\mathscr{A}$ の射影全体，ユニタリ作用素全体の集合を，$\mathscr{Z}$ は $\mathscr{A}$ の中心を表わすとする。G は $\mathscr{A}$ の（*-）自己同型の離散的可算群とし，その単位元は e で表わす。$\mathscr{A}$ 上の2つの自己同型 α, β に対し，$F(\alpha,\beta)$ はその上で $\alpha^{-1}\beta$ が局所的に内部自己同型であるような最大中心射影を表わすことにする。このとき $\sup_{g\in G} F(\alpha, g)=I$ なる自己同型 α 全体の集合を G の **充満群** といって $[G]$ で表わし，また $G=[G]$ なる群 G は充満群であるという。$[G]$ の元 α は (1.1) の形で表わされるが，我々はそれを簡単に

$$(1.1)\qquad \alpha=\sum_{g\in G} g\varphi_V Q_g$$

と記すことにする。ただし，φ_V は $V\in\mathscr{A}_u$ による内部自己同型であり，$\{Q_g\}$ は互いに直交する中心射影の族で，$\sum_{g\in G} Q_g=\sum g(Q_g)=I$ とする。G が $\mathscr{A}$ 上で自由に作用するとき，この表現は一意である。

一般クロス積との比較の為，クロス積について簡単に述べよう。$G\otimes\mathscr{H}$ は形式和 $\sum_{a\in G} a\otimes\xi_a$ ($\xi_a\in\mathscr{H}$，$\sum\|\xi_a\|^2<\infty$) の全体とする。すなわち，$G\otimes\mathscr{H}$ の元は G 上で定義され $\mathscr{H}$ の値をとるベクトル値関数で，$G\otimes\mathscr{H}$ はそのような関数の L^2- 空間に外ならない。$G\otimes\mathscr{H}$ 上の作用素 $g\otimes A$ を

$$(g\otimes A)(\sum_{a\in G} a\otimes\xi_a)=\sum_{a\in G} ag^{-1}\otimes a(A)\xi_a$$

で定義すると

$$(g\otimes A)(h\otimes B)=gh\otimes h^{-1}(A)B$$
$$(g\otimes A)^*=g^{-1}\otimes g(A^*)$$

となる。$\mathscr{A}$ の G による**クロス積** $G\otimes\mathscr{A}$ とは，$G\otimes\mathscr{H}$ 上で $\{g\otimes A\mid g\in G, A\in\mathscr{A}\}$ で生成されるフォン・ノイマン環をいう。$\mathscr{A}$ は $e\otimes\mathscr{A}$ と同一視して $G\otimes\mathscr{A}$ に埋めこまれる。

以後我々は $\mathscr{A}$ が有限型であることを前提し，さらに $\mathscr{A}$ が忠実，正規かつ G- 不変なトレース τ をもっている場合のみを対象とし，此れを一括して $\mathscr{A}$ が $[G]$- **有限**であるとよぶことにする。$G\otimes\mathscr{A}$ の元は τ-ノルムでの収束列として(0.1) の形で表わすことができ，τ は $\tau(\sum_{g\in G} g\otimes A_g)=\tau(A_e)$によって$G\otimes\mathscr{A}$ 上の忠実，正規かつ G- 不変なトレースに拡張される。よって，このとき $G\otimes\mathscr{A}$ も有限型である。

$\mathscr{A}$ と $G\otimes\mathscr{A}$ 間の部分環を**中間部分環**とよぶ。また $\mathscr{U}(G\otimes\mathscr{A}, \mathscr{A})$ は，$\varphi_U(\mathscr{A})=U\mathscr{A}U^*=\mathscr{A}$ なる $G\otimes\mathscr{A}$ のユニタリ作用素 U 全体の集合とすると [5] の結果の拡張として

定理 1.1. ([8; Theorem 3]) G は $\mathscr{A}$ 上で自由に作用するとし，$\mathscr{A}$ は $[G]$-有限とする。このとき，$G\otimes\mathscr{A}$ の中間部分環 $\mathscr{B}$ の全体と $[G]$ の充満部分群 K の全体との間に1対1の対応が存在し，それは K には中間部分環

$$\mathscr{B}(K)=\mathscr{R}[U\mid\varphi_U\in K]$$

を，$\mathscr{B}$ には充満部分群

$$K(\mathscr{B})=\{\varphi_U\mid U\in\mathscr{U}(G\otimes\mathscr{A}, \mathscr{A})\cap\mathscr{B}\}$$

を対応させることによって得られる。

次に，G 上で定義され $\mathscr{A}$ の中心射影を値とする関数 $g\to E_g$ が次式を満たすとき，E_g を**決定関数**とよぶ。

$$(1.3)\qquad \begin{aligned} &E_g g^{-1}(E_h)=E_g E_{hg} \qquad (g, h\in G)\\ \text{かつ}\quad &E_e=I. \end{aligned}$$

いま，$G\otimes\mathscr{A}$ からその中間部分環 $\mathscr{B}$ 上への期待写像を Φ とすると，各 $g\in G$ に対し $\Phi(g\otimes I)=g\otimes E_g$ となり，この E_g は $\mathscr{B}$ によって定まる決定関数となる。逆に1つの決定関数に対して1つの中間部分環 $\mathscr{B}$ が定まる。即ち

定理 1.2. ([7; Theorem 2.6]) $G, \mathscr{A}$ は前定理と同様とする。このとき $G\otimes\mathscr{A}$ の中間部分環 $\mathscr{B}$ の全体と G 上の決定関数 E_g の全体との間には1対1の対応が存在し，それは $\mathscr{B}$ には決定関数

$$E_g(\mathscr{B})=\Phi(g\otimes I)^*\Phi(g\otimes I)$$

を，E_g には中間部分環

$$\mathscr{B}(E_g)=\{\sum_{g\in G} g\otimes E_g A_g\mid\sum g\otimes A_g\in\mathscr{A}\}$$

を対応させることによって得られる。

此れと Dye の対応を合わせて，

定理 1.3. （[7; Theorem 2.10]） G, $\mathscr{A}$ は前定理と同様とする。このとき G 上の決定関数 E_g 全体と $[G]$ の充満部分群 K 全体との間に1対1の対応が存在し，それは E_g に充満部分群

$$K(E_g)=\{\alpha\in[G] \mid \alpha=\sum_{g\in G} g\varphi_V Q_g,\ Q_g\leqq E_g\}$$

を（ただし V, $\{Q_g\}$ は (1.1) におけるものと同様），K には決定関数

$$E_g(K)=\sup_{\beta\in K} F(g,\ \beta)$$

を対応させることによって得られる。

2. クロス積の一般化. Bures [1] の着想に従ってクロス積を一般化し，次の節で中間部分環に対してそれを適用することを考える。$\mathscr{A}$ をヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上のフォン・ノイマン環，K を $\mathscr{A}$ 上の充満群とし，各 $\alpha\in K$ は $\mathscr{H}$ 上のユニタリ作用素 U_α によって誘導されるとする。即ち $\alpha(A)=U_\alpha A U_\alpha^*$.

定義 2.1. $\mathscr{A}$ 上の自己同型 α_i と $\mathscr{A}$ の中心射影 F_i との対の族 $(\alpha_i,\ E_i)_{i\in I}$ は次の2つの条件を満たすとき K の擬基底 (pseudo-basis) であるという。

(2.1) $\qquad E_iE_jF(\alpha_i,\ \alpha_j)=0 \qquad (i\neq j)$

(2.2) $\qquad$ 任意の $\alpha\in K$ は適当な中心射影 $Q_i\leqq E_i$ とユニタリ作用素 $V\in\mathscr{A}$ によって $\alpha=\sum_{i\in I}\alpha_i\varphi_V Q_i$ と表わせる。

ここでは便宜上 $F_i\neq 0$ を仮定しない。なお，任意の充満群 K に対して擬基底は必ず存在する（[1; Prop. 4.10]）。

一般化されたクロス積 $K\otimes\mathscr{A}$ を定義するために，先ずそれが作用する適当なヒルベルト空間 $K\otimes\mathscr{H}$ を作ることから始める。$\mathscr{F}$ を次の性質をもつ関数 ξ: $K\to\mathscr{H}$ 全体の集合とする。

(2.3) $\qquad \xi(\alpha\varphi_V)=\alpha(V)\xi(\alpha) \qquad (V\in\mathscr{A}_u)$

(2.4) $\qquad \xi(\sum_{i\in I}\alpha_i Q_i)=\sum_{i\in I}\alpha_i(Q_i)\xi(\alpha_i)$

ただし，$\alpha_i\in K$ とし，$\{Q_i\}$ は互いに直交する $\mathscr{A}$ の中心射影の族で，$\sum Q_i=\sum\alpha_i(Q_i)=I$ とする。

従って，K の1つの擬基底 $(\alpha_i,\ E_i)_{i\in I}$ の α_i に対する ξ の値が定まれば $\mathscr{F}$ の元 ξ は確定する。

$\xi,\ \eta\in\mathscr{F}$ の和 $\xi+\eta$，複素数 λ と $\xi\in\mathscr{F}$ との積 $\lambda\xi$ を

$$\left.\begin{aligned}(\xi+\eta)(\alpha)&=\xi(\alpha)+\eta(\alpha)\\(\lambda\xi)(\alpha)&=\lambda(\xi(\alpha))\end{aligned}\right.\qquad(\alpha\in K)$$

で定義すれば，$\mathscr{F}$ は明らかに線形空間になる。K の1つの擬基底 $(\alpha_i,\ E_i)_{i\in I}$ をとって，

$\xi\in\mathscr{F}$ のノルム $\|\xi\|$ を

$$\|\xi\|^2=\sum_{i\in I}\|\alpha_i(E_i)\xi(\alpha_i)\|^2 \tag{2.5}$$

で定義すれば，此れは擬基底の取り方には無関係に確定することが分かる（[1; Lemma 9.5]）。そこで，

$$K\tilde{\otimes}\mathscr{H}=\{\xi\in\mathscr{F}\mid\|\xi\|<\infty\}$$

とすると，$K\otimes\mathscr{H}$ は内積

$$<\xi,\eta>=\sum_{i\in I}<\alpha_i(E_i)\xi(\alpha_i)\mid\eta(\alpha_i)>$$

によってヒルベルト空間になることは容易に分かる。$\mathscr{H}$ は $K\otimes\mathscr{H}$ にヒルベルト空間として埋め込まれる。

次に $K\otimes\mathscr{A}$ を定義しよう。$A\in\mathscr{A}$ と $\xi\in K\otimes\mathscr{H}$ に対し，$\bar{A}\xi$: $K\to\mathscr{H}$ を

$$(\bar{A}\xi)(\alpha)=(\alpha(A))(\xi(\alpha))\qquad(\alpha\in K) \tag{2.6}$$

で定義し，また $\gamma\in K$ を誘導する $\mathscr{H}$ 上のユニタリ作用素 U_γ と $\xi\in K\otimes\mathscr{H}$ に対し，$\hat{U}_\gamma\xi$: $K\to\mathscr{H}$ を

$$(\hat{U}_\gamma\xi)(\alpha)=\xi(\alpha\gamma)\qquad(\alpha\in K) \tag{2.7}$$

で定義する。しかるとき $\bar{A}\xi$ と $\hat{U}_\gamma\xi$ が (2.3) と (2.4) を満足することは簡単な計算で分かるから，どちらも $\mathscr{F}$ に属し，また $U_\gamma\in\mathscr{A}_u$ なるときは $\hat{U}_\gamma=\overline{U}_\gamma$ であることも(2.3)によって明らかである。さらに

$$\|\bar{A}\xi\|\leqq\|A\|\cdot\|\xi\|,\quad\|\hat{U}\xi\|=\|\xi\|$$

であることも容易に分かるから，$\bar{A}$ と $\hat{U}$ は $K\otimes\mathscr{H}$ 上の有界線形作用素で，U は等距離作用素である。

定義 2.2. 上述の $\bar{A}$ $(A\in\mathscr{A})$, $\hat{U}_\gamma$ $(\gamma\in K)$ 全体で生成される $K\otimes\mathscr{A}$ 上のフォン・ノイマン環を $\mathscr{A}$ の K による一般クロス積とよび $K\otimes\mathscr{A}$ で表わす。

$$K\otimes\mathscr{A}=\mathscr{R}[\bar{A},\hat{U}_\gamma\mid A\in\mathscr{A},\ \gamma\in K].$$

実際は，K が $\mathscr{A}$ の内部自己同型を全部含んでいるから

$$K\otimes\mathscr{A}=\mathscr{R}[\hat{U}_\gamma\mid\gamma\in K]$$

である。また，$\bar{\mathscr{A}}=\{\bar{A}\in K\otimes\mathscr{A}\mid A\in\mathscr{A}\}$ は $K\otimes\mathscr{A}$ のフォン・ノイマン部分環で $\mathscr{A}$ と代数同型である（[1; Lemma 9.9] 参照）。$\hat{U}_\gamma$ は $\bar{\mathscr{A}}$ 上に自己同型 γ を誘導する。

3. Dye の対応への適用． 我々は G が $\mathscr{A}$ 上で自由に作用するとし，$\mathscr{A}$ は $[G]$-有限であるとして，§2の構成法を $[G]$ の充満部分群 K と $\mathscr{A}$ に対して適用する。$\mathscr{A}$ はヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上に表現されていて，各 $g\in G$ は $\mathscr{H}$ 上のユニタリ作用素 U_g で誘導されるとしてよい。定理1.3に従って K に対応する決定関数を E_g とする。[7; Lemma 2.9] により，各 $g\in G$ に対し

(3.1) $$gE_g=\overline{g}E_g$$

なる $g\in K$ が存在し

(3.2) $$E_g = F(g, \overline{g})$$

である。

補題 3.1. $(g, E_g)_{g\in G}$ は K の擬基底である。

証明。 G は $\mathscr{A}$ 上で自由に作用しているから，$g\neq h$ なるとき

$$\begin{aligned}E_gE_hF(\overline{g}, \overline{h})&=F(g, \overline{g})F(\overline{h}, \overline{h})F(\overline{g}, \overline{h})\\&\leqq F(g, h)=0.\end{aligned}$$

すなわち (2.1) が成り立つ。また定理1.3と (3.1) により (2.2) も成り立つ。

この擬基底を用いるとき，先ず空間について次の事が成り立つ。

補題 3.2. 中間部分環 $\mathscr{B}$ に対応する充満部分群を K，決定関数を E_g とする。

$$G\otimes\{E_{g-1}\}\mathscr{H}=\{\sum_{g\in G}g\otimes E_{g-1}\xi_g \mid \sum g\otimes\xi_g\in G\otimes\mathscr{H}\}$$

と定義すると，これは $G\otimes\mathscr{H}$ の閉部分空間で $\mathscr{B}$ で不変であり，かつ $K\tilde{\otimes}\mathscr{H}$ と等距離同型である。

証明。 $G\otimes\{E_{g-1}\}\mathscr{H}$ が $G\otimes\mathscr{H}$ の閉部分空間であることは明らか。 $\mathscr{B}$ のすべての作用素は定理1.2によって $\sum_{h\in G}h\otimes E_hA_h$ ($A_h\in\mathscr{A}$) の形をもつ。よって (1.3) を用いて計算すると

$$\begin{aligned}&(\sum_{h\in G}h\otimes E_hA_h)(\sum_{g\in G}g\otimes E_{g-1}\xi_g)\\&=\sum_h\sum_g gh^{-1}\otimes g(E_hA_h)E_{g-1}\xi_g\\&=\sum_h\sum_g h\otimes E_{g-1}g(E_{h-1g}A_{h-1g})\xi_g\\&=\sum_h\sum_g h\otimes E_{g-1}E_{h-1}g(A_{h-1g})\xi_g\\&=\sum_h h\otimes E_{h-1}(\sum_g E_{g-1}g(A_{h-1g})\xi_g)\in G\otimes\{E_{g-1}\}\mathscr{H}.\end{aligned}$$

すなわち $G\otimes\{E_{g-1}\}\mathscr{H}$ は $\mathscr{B}$ によって不変である。次に写像 ω: $G\otimes\{E_{g-1}\}\mathscr{H}\longrightarrow K\tilde{\otimes}\mathscr{H}$ を

(3.3) $$\omega(\sum_{g\in G}g\otimes E_{g-1}\xi_g)=\xi$$

によって定義する。ただし，ξ は $\xi(\overline{g})=E_{g-1}\xi_g$ によって定義される $K\tilde{\otimes}\mathscr{H}$ のベクトルとする。しかるとき明らかに ω は同型写像であり，しかも (2.5) と (3.1) により

$$\begin{aligned}\|\xi\|^2&=\sum_{g\in G}\|\overline{g}(E_g)\xi(\overline{g})\|^2\\&=\sum_g\|E_{g-1}\xi_g\|^2 = \|\sum_g g\otimes E_{g-1}\xi_g\|^2\end{aligned}$$

となるから等距離である。

補題 3.3. $\xi\in K\tilde{\otimes}\mathscr{H}$ と任意の $h\in G$ に対し

$$E_{h-1}\xi(\sum_{g\in G}h\overline{g}Q_g)=E_{h-1}\xi(\sum_{g\in G}\overline{hg}Q_g)$$

が成り立つ。ただし $\{Q_g\}$ は互いに直交する中心射影の族で，$\sum Q_g=\sum g(Q_g)=I$ かつ

$Q_g \leqq E_g$ とする。

証明。 $g \in K$ は g によって一意に定まるわけではないが $\overline{g}E_g = \overline{\overline{g}}E_g$ ならば $E_{g-1}\xi(\overline{g}) = E_{g-1}\xi(\overline{\overline{g}})$ である。実際 (2.4) により

$$\begin{aligned} E_{g-1}\xi(\overline{\overline{g}}) + (I-E_{g-1})\xi(\overline{g}) &= \xi(E_{g-1}\overline{\overline{g}} + (I-E_{g-1})\overline{g}) \\ &= \xi(\overline{E_{g-1}\overline{g} + (I-E_{g-1})\overline{g}}) \\ &= E_{g-1}\xi(\overline{g}) + (I-E_{g-1})\xi(\overline{g}). \end{aligned}$$

よって $E_{g-1}\xi(\overline{g}) = E_{g-1}\xi(\overline{\overline{g}})$ となる。この等式を，これは直ちに証明できる次の等式

$$E_{h-1}(\sum_g \overline{h}\overline{g}Q_g) = E_{h-1}(\sum_g \overline{hg}\ Q_g)$$

に適用すれば結論が得られる。

以上の準備の下で次の主要定理を証明する。

定理 3.4. G は $\mathscr{A}$ 上で自由に作用し，$\mathscr{A}$ は $[G]$- 有限であるとする。$\mathscr{B}$ を $G \otimes \mathscr{A}$ の中間部分環とし，K は Dye の対応によって $\mathscr{B}$ に対応する $[G]$ の充満部分群とする。しかるとき $\mathscr{B}$ は一般クロス積 $K \tilde{\otimes} \mathscr{A}$ と代数的に同型である。

証明。 $\mathscr{B}$ に対応する決定関数を E_g とする。最初に $G \otimes \{E_{g-1}\} \mathscr{H}$ 上に制限した $\mathscr{B}$ と $K \tilde{\tilde{\otimes}} \mathscr{H}$ 上の $K \tilde{\otimes} \mathscr{A}$ が空間的に同型であることを示そう。補題3.3に述べたような1つの族 $\{Q_g\}$ と $V \in \mathscr{A}_u$ を用いて $U = \sum_{g \in G} g \otimes Q_g V$ とすると定理1.2により U は $\mathscr{U}(G \otimes \mathscr{A}, \mathscr{A}) \cap \mathscr{B}$ に属するユニタリ作用素である。そして任意の $A \in \mathscr{A}$ に対し

$$\begin{aligned} \varphi_U(A) &= U(e \otimes A)U^* \\ &= (\sum_g g \otimes Q_g VA)(\sum_h h^{-1} \otimes h(V^* Q_h)) \\ &= \sum_g \sum_h gh^{-1} \otimes h(Q_g VAV^* Q_h) \\ &= e \otimes \sum_g g(Q_g \varphi_V(A)) \end{aligned}$$

だから

$$\varphi_U = \sum_g g\varphi_V Q_g$$

である。また，$\overline{g}$ を誘導する $\mathscr{H}$ 上のユニタリ作用素 $U_{\overline{g}}$ を用いて $\mathscr{H}$ 上の作用素 $W = \sum_g U_{\overline{g}} - Q_g V$ を定義すると

$$\begin{aligned} WW^* &= \sum_g \sum_h U_{\overline{g}} Q_g VV^* Q_h U_{\overline{h}}^* \\ &= \sum_b U_{\overline{g}} Q_g U_{\overline{g}}^* \quad = \sum_g \overline{g}(Q_g) \\ &= \sum_g g(Q_g) = I \\ W^*W &= \sum_h \sum_g V^* Q_g U_{\overline{g}}^* U_{\overline{h}} Q_h V \\ &= \sum_h \sum_g U_{\overline{g}}^* \overline{g}(V^* Q_g) \overline{h}(Q_g V) U_h \\ &= \sum_h U_{\overline{g}}^* \overline{g}(V^* Q_g Q_h V) U_{\overline{h}} \\ &= \sum_h \overline{g}^{-1}(\overline{g}(Q_g)) = \sum_g Q_g = I \end{aligned}$$

よって W はユニタリ作用素である。しかもそれは U と同じ自己同型を誘導する。実際

$$
\begin{aligned}
WAW^* &= \sum_g \sum_h U_g^{\sim} Q_g VAV^* Q_h U_h^{\sim} \\
&= \sum_g \overline{g}(Q_g VAVQ_g) \\
&= \sum_g g(Q_g \varphi_V A) = \varphi_U(A).
\end{aligned}
$$

$\mathscr{H}$ 上のこのユニタリ作用素 W に対応する $K \tilde{\tilde{\otimes}} \mathscr{H}$ 上のユニタリ作用素 $\hat{U}$ を (2.7) によって定義する。すなわち

$$(\hat{U}\xi)(\alpha) = \xi(\alpha\varphi_W) = \xi(\alpha\varphi_U)$$

しかるとき (3.3) で与えた等距離作用素 ω が空間 $G \otimes \{E_{g^{-1}}\}\mathscr{H}$ に制限した $\mathscr{B}$ と一般クロス積 $K \tilde{\tilde{\otimes}} \mathscr{A}$ との空間同型を誘導する事が次のようにして分かる。先ず，$Q_h \leqq E_h$ により

$$
\begin{aligned}
U(\sum_g g \otimes E_{g^{-1}}\xi_g) &= (\sum_h h \otimes Q_h V)(\sum_g g \otimes E_{g^{-1}}\xi_g) \\
&= \sum_g \sum_h gh^{-1} \otimes g(E_h Q_h V) E_{g^{-1}}\xi_g \\
&= \sum_g \sum_h gh^{-1} \otimes E_{g^{-1}} E_{hg^{-1}} g(Q_h V)\xi_g \\
&= \sum_h h \otimes E_{h^{-1}}(\sum_g E_{g^{-1}} g(Q_{h^{-1}g} V)\xi_g).
\end{aligned}
$$

一方 (3.3) を用いて

$$
\begin{aligned}
(\omega^{-1}\hat{U}\omega)(\sum_g g \otimes E_{g^{-1}}\xi_g) &= \omega^{-1}\hat{U}\xi \\
&= \sum_h h \otimes E_{h^{-1}}(\hat{U}\xi)(\overline{h}) \\
&= \sum_h h \otimes E_{h^{-1}}\xi(\overline{h}\varphi_U) \\
&= \sum_h h \otimes E_{h^{-1}}\xi(\overline{h}\sum_g g(Q_g \varphi_V)) \\
&= \sum_h h \otimes E_{h^{-1}}\xi(\sum_g \overline{hg}(Q_g)\overline{hg}\varphi_V)
\end{aligned}
$$

ここで補題3.3を用い，hg をあらためて g とすると

$$
\begin{aligned}
&= \sum_h h \otimes E_{h^{-1}}\xi(\sum_g \overline{g}(Q_{h^{-1}g})\overline{g}\varphi_V) \\
&= \sum_h h \otimes E_{h^{-1}}\sum_g \overline{g}(Q_{h^{-1}g} V)\xi(\overline{g}) \\
&= \sum_h h \otimes E_{h^{-1}}(\sum_g E_{g^{-1}} g(Q_{h^{-1}g} V)\xi_g)
\end{aligned}
$$

従って $\omega^{-1}\hat{U}\omega = U$ となる。

さて部分空間 $G \otimes \{E_{g^{-1}}\}\mathscr{H}$ は $\mathscr{B}$ で不変だから，$G \otimes \mathscr{H}$ から $G \otimes \{E_{g^{-1}}\}\mathscr{H}$ 上への射影 P は $\mathscr{B}'$ に属する。従って $\mathscr{B} \cong K \tilde{\tilde{\otimes}} \mathscr{A}$ を示すためには P の中心台が I に等しいことを示せばよい ([3; I. 2. Prop. 2])。それには $\mathscr{B}$ の中心を $\mathscr{Z}(\mathscr{B})$ として

$$(3.4) \qquad (\mathscr{Z}(\mathscr{B}))'(G \otimes \{E_{g^{-1}}\}\mathscr{H}) = G \otimes \mathscr{H})$$

を示せばよい ([3; I. 1. Cor. 2 de Prop. 7])。ところが，先ず

$$e \otimes \mathscr{H} \subset (\mathscr{Z}(\mathscr{B}))'(G \otimes \{E_{g^{-1}}\}\mathscr{H})$$

は明らかである。次に，g を誘導する $\mathscr{H}$ 上のユニタリ作用素を U_g として作用素 V_g を

$$V_g(\sum_h h \otimes \xi_h) = \sum_h gh \otimes U_g \xi_h$$

で定義すれば，簡単な計算によって

$$V_g \in (\mathscr{Z}(\mathscr{A}))' \subset (\mathscr{Z}(\mathscr{B}))'$$

が分かる。よって，すべての $g \in G$ に対し

$$g \otimes \mathscr{H} = V_g(e \otimes \mathscr{H}) \subset (\mathscr{Z}(\mathscr{B}))'(G \otimes \{E_{g^{-1}}\}\mathscr{H})$$

従って（3.4）が成り立つから定理の証明は完結した。

特に $G \otimes \mathscr{H}$ 上の $G \otimes \mathscr{A}$ は $[G]\ \tilde{\otimes}\mathscr{H}$ 上の $[G]\tilde{\otimes}\ \mathscr{A}$ と空間的に同型になるわけで，此の意味で $\tilde{\otimes}$ はクロス積の一般化と考えてよい。

上の定理から直ちに分かる事を系として挙げよう。G_1, G_2 をそれぞれフォン・ノイマン環 $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ 上の自己同型群とし，θ を $\mathscr{A}_1$ から $\mathscr{A}_2$ 上への同型写像とする。α_2 を $\mathscr{A}_2$ の自己同型とすると $A \in \mathscr{A}_1$ に対し $\theta^{-1}\alpha_2\theta(A)$ は $\mathscr{A}_1$ 上の自己同型を定める。このとき $\theta^{-1}G_2\theta$ の充満群と G_2 の充満群が等しければ G_1 と G_2 は弱同値であるという事にする（[4] 参照）。しかるとき（[2: Theorem 1] 参照），

系 3.5. $\mathscr{A}_i$ は $[G_i]$- 有限であるとする（$i=1, 2$）。G_1 と G_2 が弱同値ならば，$[G_1]\tilde{\otimes}\mathscr{A}_1$ から $[G_2]\tilde{\otimes}\mathscr{A}_2$ 上への同型写像 θ が存在し，しかも $\theta(\mathscr{A}_1) = \mathscr{A}_2$ が成り立つ。

可換なフォン・ノイマン環のトレース τ を保存する自己同型の群 G は，次の条件を満たすとき Dye [4] に従って漸近有限（approximately finite）であるという。すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ と有限個の $\beta_1, \ldots, \beta_n \in G$ に対して $[G]$ の適当な有限部分群 F をとれば，ある $\beta_1', \ldots, \beta'_n \in [F]$ に対して $\tau(I - F(\beta_i, \beta_i')) < \varepsilon$, $(1 \leqq i \leqq n)$。

今，$\mathscr{A}$ や G は此れまでの通りとし，さらに G が $\mathscr{A}$ の中心 $\mathscr{Z}$ で漸近有限，$\mathscr{A}$ は漸近有限であるとすると $G \otimes \mathscr{A}$ は漸近有限である。此れは Golodets [6] によって示されたし，また [7] の結果を用いれば，[5] を追っても証明することは簡単である。さて，G が漸近有限なら定義から $[G]$ も漸近有限であり，また [4] に示されているように，漸近有限群の部分群はすべて漸近有限だから

系 3.6. G, $\mathscr{A}$ が漸近有限であれば，$G \otimes \mathscr{A}$ の中間部分環はすべて漸近有限である。

参考文献

[1] D. Bures: *Abelian subalgebras of von Neumann algebras*, Memoirs of the Amer. Math. Soc., No. 110 (1971).

[2] H. Choda: *On the crossed product of abelian von Neumann algebras. II*, Proc. Japan Acad., 43 (1967) 198-201.

[3] J. Dixmier: *Les Algèbres d'Opérateurs dans l'Éspace Hilbertien*, Gauthier-Villars, Paris (1957).

[4] H. Dye: *On groups of measure preserving transformations I*, Amer. J. Math.,

81 (1959) 119–159.

[5] H. Dye: *On groups of measure preserving transformations II,* Amer. J. Math., 85 (1963) 551–576.

[6] V. J. Golodets: *Cross products of von Neumann algebras* (Russian), Uspekhi Mat. Nauk, 26 (1971) 3–50.

[7] Y. Haga: *On subalgebras of a cross product von Neumann algebra*, Preprint (1972).

[8] Y. Haga and Z. Takeda: *Correspondence between subgroups and subalgebras in a cross product von Neumann algebra,* Tôhoku Math. J., 24 (1972) 167–190.

[9] M. Nakamura and Z. Takeda: *On some elementary properties of the crossed products of von Neumann algebras,* Proc. Japan Acad., 34 (1958) 489–494.