亜酸化銅，酸化銅，ほうろう系厚膜の電気的性質

山　内　正　行*，長　坂　秀　雄**

（1973年9月10日受理）

Electrical Properties of Ceramics Thick Film Resistors

Masayuki YAMAUCHI & Hideo NAGASAKA

Abstract：— Described herein are experimental results obtained with cuprous oxide—cupric oxide—enamel fritt thick film resistors. A mixture of cuprous oxide, cupric oxide and frit was suspended in an organic vehicle as paste and coated on an alumina substrate with a diameter of 3 mm. They were fired in an atmosphere of nitrogen with a dwell time of 3 minutes at 850°C and cooled later. Then they were cut to a length of 2 ～ 3 cm, electroded and finally coated with epoxy resin.

Resistivity ranges from 10 ohm-meter to 10^6 ohm-meter. Temperature coefficients of resistance are scattered between −10, 000 to −70, 000 ppm/°C with their compositions and related to their resistivity.

1. まえがき

厚膜抵抗材料としては，銀一パラジウム系が広く使われており，酸化タリウム，酸化ルテニウム系などの材料も使われる。これらの材料は抵抗値の制御も可能であり，抵抗の温度係数も数百 ppm/°C 程度で電気的特性がすぐれている。このほかにも多くの厚膜抵抗材料が提案されているが，なかなか実用には至っていない[1]。

筆者等は金属酸化物として亜酸化銅，酸化銅の2種類を採用し，これにフリットを併用した。これらを膜状に塗布し，窒素気流中でフリットの融点まで加熱して，セラミック厚膜を作製した。金属酸化物の配合量による抵抗率の変化，抵抗の温度係数等について調べた。以下に研究の概要を報告する。

**茨城大学工学部電気工学科（日立市中成沢町）
*茨城大学大学院工学研究科電気工学専攻（日立市中成沢町）

$\mathfrak{C}_A$–クラスの作用素のベキについて

中　本　律　男*

(1973年9月7日受理)

On the Powers of an Operator of Class $\mathfrak{C}_A$

Ritsuo NAKAMOTO

Abstract: — In [2], M. J. Crabb gives the best bound $\sqrt{2}$ of the inequality proposed by C. A. Berger and J. G. Stampfli [1]:

$$\limsup_{n\to\infty} \| T^n x \| \leqq \sqrt{2}\, \| x \|,$$

for an operator T with $w(T)=1$, where $w(T)$ is the numerical radius of T given by

$$w(T)=\sup\{\ |(Tx,\ x)|\ ;\ \|x\|=1\}.$$

In the present note, we shall give a further generalization of Crabb's theorem.

まえがき

あるヒルベルト空間 $\boldsymbol{H}$ 上の，数値域半径が1より小さい作用素 T に対して，C. A. Berger と J. G. Stampfli が [1] で

$$(1)\qquad \limsup_{n\to\infty}\ \| T^n x \|\ \leqq C \| x \|$$

の最良有界 C を決定する問題を提起した。彼らは，$C \geqq \sqrt{2}$ なる実例を与えたが，M. J. Crabb [2] は，$C=\sqrt{2}$ を与えて完全に解決した。

最近，Eckstein [3], Mlak [6] が，これをベキの収束性の問題としてとらえ，より広い作用素のクラスで議論している。

この小論では，これらの事を統一して，さらに広い $\mathfrak{C}_A$-クラスの作用素まで拡張したい。

---

* 茨城大学工学部応用数学科（日立市中成沢町）

1. 準　　備

以下では，作用素 T は全て，あるヒルベルト空間 $\boldsymbol{H}$ 上の有界線形作用素を表わすものとする。

H. Langer [5; p. 55] に慣って，$\mathfrak{C}_A$ を，$\boldsymbol{H}$ を部分空間として含むヒルベルト空間 $\boldsymbol{K}$ と $\boldsymbol{K}$ 上のユニタリー作用素 U が存在して，次の表現 (2) を許す作用素 T の集合とする。

$$(2)\qquad QT^nQ = PU^n|_H \quad (n=1, 2, \cdots\cdots),$$

ここで，P は $\boldsymbol{K}$ から $\boldsymbol{H}$ 上への射影作用素を表わし，$Q=A^{-1/2}$ で，A は $\boldsymbol{H}$ 上の逆元をもつ正値作用素とする。このとき，U は T の Q-膨張 (Q-*dilation*) と呼ばれている。

(2) より明らかに，

$$(3)\qquad QT^{*n}Q = PU^{*n}|_H \quad (n=1, 2, \cdots\cdots),$$

を満足するので，U^* は T^* の Q-膨張，すなわち，T^* も $\mathfrak{C}_A$ に属する。

特に，ある正数 ρ に対して，$A=\rho$ のとき，$\mathfrak{C}_A$ は，いわゆる Sz. Nagy-C. Foias の $\mathfrak{C}_\rho$-クラスになり，次の事がよく知られている ([5] 参照)。

$$\mathfrak{C}_1 = \{T\in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{H});\ \|T\|\leqq 1\},$$
$$\mathfrak{C}_2 = \{T\in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{H});\ w(T)=\sup_{\|x\|=1}|(Tx, x)|\leqq 1\}$$

ただし，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$ は $\boldsymbol{H}$ 上の作用素の全体を表わす。

M. J. Crabb は (1) の不等式の最良有界 $\sqrt{2}$ を次の定理で証明した。

定理 1 (Crabb). $T\in\mathfrak{C}_2$ で $\|x\|=1$ とするとき次の (i), (ii) が成立する。

(i) $\|T^nx\| \to l\ (0\leqq l\leqq\sqrt{2})$,

(ii) $l=\sqrt{2}$ のとき，$\|T^nx\| = \sqrt{2}\ (n=1, 2, \cdots\cdots)$.

さらに，G H. Eckstein [3] が $\mathfrak{C}_\rho$-クラスの作用素 T に対して，
$\lim\|T^nx\|$ の存在を示したが，しかしながら，W. Mlak [6] は，これをもっと一般の形で証明している。

定理 2 (Mlak). $T\in\mathfrak{C}_\rho$ とするとき，$\lim\|T^{*n}x\|$ が，$\boldsymbol{H}$ の任意の元 x に対して存在する。

2. 一　般　化

まず，次の補題を必要とする。

補題. ある整数 $n\geqq 0$ に対して，$h\in U^{n+1}\boldsymbol{M}$ とすると，このとき

$$(4)\qquad Ph=QT^nQ^{-1}PU^{-n}h.$$

ただし，$\boldsymbol{M}=\bigvee_{n=0}^{\infty}U^n\boldsymbol{H}$ とする。

証明. $U^{n+i}\boldsymbol{M}$ は，$U^{n+i}f\ (f\in\boldsymbol{H}, i\geqq 1)$ によって張られるので，このような h で証

明すれば十分である。このとき

$$
\begin{aligned}
Ph&=PU^{n+i}f=QT^{n+i}Qf\\
&=QT^nQ^{-1}QT^iQf\\
&=QT^nQ^{-1}PU^if\\
&=QT^nQ^{-1}PU^{-n}U^{n+i}f\\
&=QT^nQ^{-1}PU^{-n}h,
\end{aligned}
$$

これより結論が得られる。

さて，R_n を $U^{n+1}\boldsymbol{M}$ への射影作用素とする。明らかに，$0\leqq R_{n+1}\leqq R_n$ を満足するので，$R=\lim_{n\to\infty}R_n$ が存在する。そして，R は $\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n\boldsymbol{M}$ への射影作用素になる。

そこで，次の定理が成立する。

定理 3. $T\in\mathfrak{C}_A$ とすると，次の (i), (ii) が成立する。

(i) 任意の元 $f\in\boldsymbol{H}$ に対して，

$$\lim\|T^{*n}f\|=\|RQ^{-1}f\|,$$

(ii) $\lim\|T^{*n}f\|=\|Q^{-1}f\|$ ならば任意の自然数 n に対して

$$\|T^{*n}f\|=\|Q^{-1}f\|.$$

証明. (i) の証明. 補題より，$\boldsymbol{K}$ の任意の元 h に対して

$$PR_nh=QT^nQ^{-1}PU^{-n}R_nh$$

を満足するので，$\boldsymbol{H}$ の元 f について

$$
\begin{aligned}
(h,R_nf)&=(PR_nh,f)\\
&=(QT^nQ^{-1}PU^{-n}R_nh,f)\\
&=(h,R_nU^nPQ^{-1}T^{*n}Qf)\\
&=(h,R_nU^nQ^{-1}T^{*n}Qf)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。従って，次式を得る。

(5) $$R_nf=R_nU^nQ^{-1}T^{*n}Qf\ (n=1,2,\cdots\cdots,f\in\boldsymbol{H}).$$

ところで，$U^nQ^{-1}T^{*n}Qf\in U^n\boldsymbol{M}\ (n\geqq0)$ なので，(5) 式を使えば，任意の $g\in\boldsymbol{K}$ に対して，

$$(U^nQ^{-1}T^{*n}Qf,g)=(R_nf,g)+(U^nQ^{-1}T^{*n}Qf,(R_{n-1}-R_n)g)$$

となる。ところが，数列 $\{\|T^{*n}f\|\}$ は (2) より有界で，さらに，$R_{n-1}-R_n\to0$ が分るので，上式より，

$$U^nQ^{-1}T^{*n}Qf\to Rf\ (弱収束)$$

が得られる。しかし，$f\in\boldsymbol{H}$ とすると

$$
\begin{aligned}
(U^nQ^{-1}T^{*n}Qf,f)&=(PU^nQ^{-1}T^{*n}Qf,f)\\
&=(QT^nQQ^{-1}T^{*n}Qf,f)
\end{aligned}
$$

$$= (QT^n T^{*n} Qf, f)$$
$$= \| T^{*n} Qf \|^2$$

なので，$\lim_{n\to\infty} \| T^{*n} Qf \| = \| Rf \|$ となる。

従って，Q の可逆性より，$\lim \| T^{*n} f \| = \| RQ^{-1} f \|$ となり (i) が得られる。

(ii) の証明. もし，$\| RQ^{-1} f \| = \| Q^{-1} f \|$ を満足すれば，R は射影作用素なので $RQ^{-1} f = Q^{-1} f$ となる。

そこで，$Q^{-1} f \in R_n K$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ で，さらに，(5) より

$R_n Q^{-1} f = R_n U^n Q^{-1} T^{*n} Q Q^{-1} f$ となり $Q^{-1} f = R_n U^n Q^{-1} T^{*n} f$ がなりたつ。

それゆえに

$$\begin{aligned} \| Q^{-1} f \|^2 &= (R_n U^n Q^{-1} T^{*n} f, Q^{-1} f) \\ &= (U^n Q^{-1} T^{*n} f, Q^{-1} f) \\ &= (Q T^n Q Q^{-1} T^{*n} f, Q^{-1} f) \\ &= (Q T^n T^{*n} f, Q^{-1} f) \\ &= \| T^{*n} f \|^2, \end{aligned}$$

即ち，求める $\| Q^{-1} f \| = \| T^{*n} f \|$ を得る。

注意. $T \in \mathfrak{C}_A$ のとき，$T^* \in \mathfrak{C}_A$ なので，$\lim \| T^n f \|$ の存在が分る。
しかし，V. Istratescu [4] が $T \in \mathfrak{C}_A$ のとき，$\mathfrak{C}_A$-クラスの単調増大性より，$T \in \mathfrak{C}_{\|A\|}$ ということを示しているので，$\lim \| T^n f \|$ の存在については，Eckstein-Mlak の定理より明らかである。

参 考 文 献

[1] C. A. Berger and J. G. Stampfli: Norm dilation and skew dilation. Acta Sci. Math. Szeged, 28 (1967) 191-195.

[2] M. J. Crabb: The powers of an operator of numerical radius one. Mich. Math. J., 18 (1971) 253-256.

[3] GH. Eckstein: Sur les operateurs de classe $\mathfrak{C}_\rho$. Acta Sci. Math. Szeged, 33 (1972) 349-352.

[4] V. Istratescu: A remark on a class of power-bounded operators in Hilbert space, Acta Sci. Math. Szeged, 29 (1968) 311-312.

[5] B. Sz.-Nagy and C. Foias: Harmonic Analysis of operators on Hilbert space. Academiai Kiado, Budapest (1970).

[6] W. Mlak: On convergence properties of operators of class $\mathfrak{C}_\rho$. Acta Sci. Math. Szeged, 33 (1972) 353-354.