フォン・ノイマン環におけるガロア理論の拡大定理

芳　賀　義　則*

(1973年9月4日受理)

The Extension Theorem of the Galois Theory for von Neumann Algebras

by Yoshinori HAGA

Abstract:— On the basis of the definition of the Galois extension and the Fundamental Theorem of the Galois theory for von Neumann algebras given in [4], *we discuss about the so-called extension theorem*:

Let G be a countable group of automorphisms acting freely on a von Neumann algebra $\mathscr{A}$. Suppose that $\mathscr{A}$ is the Galois extension of $\mathscr{B}$ with Galois group G, that $\mathscr{C}$ and $\mathscr{D}$ are the intermediate subalgebras between $\mathscr{A}$ and $\mathscr{B}$, and that θ is an isomorphism of $\mathscr{C}$ onto $\mathscr{D}$ induced by a unitary operator. Then, if θ fix $\mathscr{B}$ in element-wise, θ can be extended to an automorphism of $\mathscr{A}$ belonging to the centrally full group $[G]'$. This is a generalization of the result in [10].

The proof of the above theorem is based on a property of inner automorphisms of a *cross product* von Neumann algebra *which* generalize a theorem in [9].

まえがき

フォン・ノイマン環 $\mathscr{A}$ におけるガロア理論は，最初 $\mathscr{A}$ が有限因子 (finite factor) である場合について Nakamura-Takeda [7], [8], Takeda [10], [11] によって研究された。M. Henle [5] はそれを一般のフォン・ノイマン環に拡張することを試みたが，原稿の段階でその誤りが武田氏によって指摘された。Henle はガロア拡大の定義を変更することによって誤りを訂正したが，修正された論文も理論の形式化に対する不満の故か未だに公表されていない。Haga-Takeda[4] は $\mathscr{A}$ の可換子環が有限である場合について，ガロア理論の基本定理を示すことに成功し，Henle の形式化が不十分である理由をも解明した。

さてこの論文では [4] におけるガロア拡大の定義と基本定理とを基にして，ガロア理論における拡大定理を論じる。それが [10] の一般化になっていることはもちろんである。

---

* 茨城大学工学部応用数学科（日立市中成沢町）

§1ではガロア拡大について [4] の結果を述べ，§2では拡大定理の証明の準備として，クロス積における内部自己同型写像の一性質を示す。拡大定理は§3で証明される。

以後，$\mathscr{A}$ は可分なヒルベルト空間上のフォン・ノイマン環とし，恒等作用素は I で表わす。$\mathscr{A}$ の中心は $\mathscr{Z}$ で表わし，また $\mathscr{A}$ の部分環というときはすべてフォン・ノイマン部分環を意味するものとする。G は $\mathscr{A}$ 上の（*-）自己同型写像の離散的可算群とし，単位元は e で表わす。

1. ガロア拡大

[4] からガロア拡大の定義と基本定理を引用する。

定義 1.1. ([4; Definition 4]) G は $\mathscr{A}$ 上で自由に作用するとし，$\mathscr{A}$ の G- 不変な元から成る部分環を $\mathscr{B}$ とする。このとき，$\mathscr{A}$ がガロア群 G による $\mathscr{B}$ のガロア拡大であるとは，次の条件を満足するような $\mathscr{A}$ の或るヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上への表現が存在することである：

(i) G の $\mathscr{H}$ 上へのユニタリ表現 $U_g(g\in G)$ で $g(A)=U_gAU_g^*(A\in\mathscr{A})$ なるものが存在する。

(ii) 可換子環 $\mathscr{A}'$ は有限で，G- 不変かつ忠実正規なトレースをもつ。

(iii) $\mathscr{B}'$ がクロス積 $G\otimes\mathscr{A}'$ と代数的に同型であって，その同型によって $\mathscr{A}'$ は $e\otimes\mathscr{A}'$ に，U_g は $g\otimes I$ に対応する。

この定義において本質的な条件は (iii) である。(i) は G が $\mathscr{A}'$ 上でも自由に作用する自己同型群となるための要請であるが，特に $\mathscr{A}'$ が有限である場合には，一般にこの様な G の表現が存在するとは限らない (Kadison [6] 参照)。(ii) は [4] の議論において期待写像 (expectation) を用いるために必要とされた条件であって，可能ならばこの条件を除いて理論を一般化することが望ましい。

次に充満群について説明する。一般に $\mathscr{A}$ 上の自己同型群 G に対し

$$(1)\qquad \alpha(A)=\sum_n P_n g_n(VAV^*)\qquad (A\in\mathscr{A})$$

（ただし g_n は G の元，V は $\mathscr{A}$ のユニタリ作用素，$\{P_n\}$ と $\{g_n^{-1}(P_n)\}$ は互いに直交し $\sum P_n=\sum g_n^{-1}(P)=I$ なる中心射影の族する。以後 (1) の形の式を書いたとき，これらの附随条件は省略する。）の形で表わされる $\mathscr{A}$ の自己同型写像 α 全体の群を $[G]$ で表わし，G で定まる充満群とよぶ。またそれ自身が充満である群を充満群という。$A'\in\mathscr{A}'$ に対しては $VA'V^*=A'$ であるから，(1) の α は $\mathscr{A}'$ においては

$$(2)\qquad \alpha(A')=\sum_n P_n g_n(A')\qquad (A'\in\mathscr{A}')$$

となるが，この形で表わされる $\mathscr{A}'$ の自己同型全体の群を $[G]'$ で表わし，G で定まる中心充満群とよぶ。G が $\mathscr{A}$ 上で自由にする作用するときは，(1), (2) の表現は一意的でそれぞれ

$$\alpha(A)=\sum_{g\in G} P_g g(VAV^*)\qquad (A\in\mathscr{A})$$

$$(1)\qquad \alpha(A')=\sum_{g\in G} P_g g(A')\qquad (A'\in\mathscr{A}')$$

とかける。このとき，$[G]$ の充満部分群 K に対応する中心充満群を常に K' で表わすことにする。

さて上の定義の下で，ガロア理論の基本定理は次の様に述べられる。

定理　1.2.　([4; Theorem 4]) $\mathscr{A}$ をガロア群 G による $\mathscr{B}$ のガロア拡大とする。しかるとき，$\mathscr{A}$ と $\mathscr{B}$ の中間の部分環の束と $[G]$ の充満部分群 K の束とは双対同型 (dually isomorphic) である。それは K に対して $\mathscr{A}$ の K'- 不変な元からなる部分環を対応させるガロア対応による双対同型である。

注意　定理1.2は因子でないフォン・ノイマン環におけるガロア対応においにおいては，充満部分群まで考えなければ十分でないことを示している。従って，ガロア理論の観点からすれば，ガロア拡大の定義を次の様に充満群を用いて少しく変更した方が自然である。この定義中の一般クロス積は [3] で定義されたものである。

定義　1.3.　K を $\mathscr{A}$ の自己同型の充満群とし，$\mathscr{B}$ は $\mathscr{A}$ の K- 不変な元から成る部分環とする。$\mathscr{A}$ が K をガロア群とする $\mathscr{B}$ のガロア拡大であるとは，次の条件を満足するような $\mathscr{A}$ の或るヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上への表現が存在することである。

(i)　K の $\mathscr{H}$ 上へのユニタリ表現 $U_\alpha(\alpha\in K)$ で $\alpha(A)=U_\alpha AU_\alpha{}^*$　$(A\in\mathscr{A})$ なるものが存在する。

(ii)　$\mathscr{A}'$ は有限で，K- 不変かつ忠実次規なトレースをもつ。

(iii)　$\mathscr{B}'$ は一般クロス積 $K\otimes\mathscr{A}'$ と代数的に同型であって，その同型によって $A'\in\mathscr{A}'$，U_α は $K\otimes\mathscr{A}'$ に自然に埋めこまれる。

もちろんこの定義は定義1.1と本質的に同じであるから，定理1.2は少しく言い換えるだけで同様に成り立つが，この定義を用いると例えば次の定理が成り立つ。その証明は [3; 定理3.4] を解釈し直すだけでよい。

定理　1.4.　$\mathscr{A}$ が K をガロア群とする $\mathscr{B}$ のガロア拡大であるとする。H が K の充満部分群ならば，ガロア対応によって H に対応する部分環を $\mathscr{C}$ とするとき，$\mathscr{A}$ は H をガロア群とする $\mathscr{C}$ のガロア拡大である。

§2 以下では定義1.1によって議論を進めるが，この場合は定義1.3を採用しても議論はほとんど変わらない。

2.　クロス積の内部自己同型の一性質.　フォン・ノイマン環 $\mathscr{A}$ のユニタリ作用素の集合を $\mathscr{U}(\mathscr{A})$ で表わし，$U\in\mathscr{U}(\mathscr{A})$ の誘導する内部自己同型写像を φ_U で表わす。また φ_U が $\mathscr{A}$ の部分環 $\mathscr{B}$ を不変にするとき，φ_U は $\mathscr{B}$ の自己同型写像とみなすこともできるが，そのような $U\in\mathscr{U}(\mathscr{A})$ の集合を $\mathscr{U}(\mathscr{A},\mathscr{B})$ で表わすことにする。以下において，$\mathscr{A}$ は有限とし，$\mathscr{A}$ 上で自由に作用する自己同型群 G によって不変な忠実かつ正規なトレース τ をもつとする。このとき，$G\otimes\mathscr{A}$ 上にトレース τ を拡張できるから，$G\otimes\mathscr{A}$ も有限であり，よって $G\otimes\mathscr{A}$ からその任意の部分環への期待写像が存在する。

補題　2.1.　$\mathscr{C}$ は $G\otimes\mathscr{A}$ と $\mathscr{A}$ の中間の部分環とし，$G\otimes\mathscr{A}$ から $\mathscr{C}$ への期待写

像を Φ とする。$U\in \mathscr{U}(G\otimes\mathscr{A})$ に対して $\varphi_U(\mathscr{A})\subset\mathscr{C}$ であるとすればは，$\Phi(U)$ は部分等長作用素であって，その始射影 (initial projection) は $\mathscr{Z}$ に属し，終射影 (final projection) は $\varphi_U(\mathscr{Z})$ に属する。

証明。［2; Lemma 6.1］および［1］と同じ着想による。任意の $A\in\mathscr{A}$ に対し，A, $\varphi_U(A)\in\mathscr{C}$ だから，

(3)　　$\Phi(U)A=\Phi(UA)=\Phi(\varphi_U(A)U)=\varphi_U(A)\Phi(U)$

である。よって正値作用素 S を

$$S=|\Phi(U)|=(\Phi(U^*)\Phi(U))^{1/2}$$

で定義すれば，任意の $A\in\mathscr{A}$ に対して，

$$\begin{aligned}S^2A&=\Phi(U^*)\varphi_U(A)\Phi(U)\\&=\Phi(U^*\varphi_U(A))\Phi(U)\\&=\Phi(\varphi_U^{-1}\varphi_U(A)U^*)\Phi(U)\\&=A\Phi(U^*)\Phi(U)=AS^2\end{aligned}$$

従って $S^2\in\mathscr{Z}$，よって $S\in\mathscr{Z}$ である。そこで

$$\Phi(U)=VS$$

を極分解とすると，V は等長作用素であり，始射影 $E=V^*V$ の始領域 (initial domain) が$S\in\mathscr{Z}$ の値域であるから，$E\in\mathscr{Z}$ である。また，［3］によって V の終射影は

$$F=VV^*=VEV^*=\varphi_U(E)F$$

であるから，$\varphi_U(E)\geqq F$ である。そして，明らかに $\varphi_U(E)\sim F$ (mod $G\otimes\mathscr{A}$) であって $G\otimes\mathscr{A}$ は有限であるから $F=\varphi_U(E)\in\varphi_U(\mathscr{Z})$ である。

以上により，$\Phi(U)=V$ を示せば証明は終る。(3) により，

$$\varphi_U(A)VS=VSA.$$

よって，

$$\begin{aligned}AU^*VS&=U^*\varphi_U(A)VS\\&=U^*VSA\qquad(A\in\mathscr{A})\end{aligned}$$

であるから，$U^*VS\in\mathscr{Z}$ である。従って，

$$\begin{aligned}U^*VS&=\Phi(U^*VS)\\&=\Phi(U^*\Phi(U))\\&=\Phi(U^*)\Phi(U)=S^2\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}S^4&=SV^*UU^*VS\\&=SV^*VS\\&=\Phi(U^*)\Phi(U)=S^2.\end{aligned}$$

すなわち，S^2 は射影であって，$S\geqq0$ であるから S 自身が射影である。そして，V^*V は

S の台 (support) であるから，$S=V^*V$ となる。よって

$$\Phi(U)=VS=VV^*V=V.$$

補題 2.2. $\mathscr{C}$ は $G\otimes\mathscr{A}$ と $\mathscr{A}$ の中間の部分環とし，$U\in\mathscr{U}(G\otimes\mathscr{A})$ に対して $\varphi_U(\mathscr{A})\subset\mathscr{C}$ であるとする。また $V\in\mathscr{C}$ は部分等長作用素で $V^*V\in\mathscr{Z}$，$VV^*\in\varphi_U(\mathscr{Z})$，$V\mathscr{A}V^*\subset\varphi_U(\mathscr{A})$，$V^*\varphi_U(\mathscr{A})V\subset\mathscr{A}$ とする。しかるとき，V を $\mathscr{C}$ のユニタリ作用素 W に拡張して，$W\mathscr{A}W^*\subset\varphi_U(\mathscr{A})$ となるようにできる。

証明. [2; Lemma 6.1]の証明の論法を借用する。V 自身がユニタリであれば補題は自明であるから，$V^*V=E\neq I$ とする。$\mathscr{C}$ が有限だから $VV^*=F\neq I$ で $I-E\sim I-F$ (mod $\mathscr{C}$) である。従って部分等長作用素 $T\in\mathscr{C}$ が存在して

$$T^*T=I-E,\quad TT^*=I-F$$

となる。ところで，$G\otimes\mathscr{A}$ は $\mathscr{U}(G\otimes\mathscr{A},\mathscr{A})$ で生成されているから，任意の $\varepsilon>0$ に対し適当に $U_1\cdots, U_U\in\mathscr{U}(G\otimes\mathscr{A},\mathscr{A})$ と複素数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ を選べば

$$\|U^{-1}T-\textstyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_iU_i\|_2<\varepsilon,$$
$$\|T-\textstyle\sum_i\lambda_iUU_i\|_2<\varepsilon$$

となる。ただし $\|\cdot\|_2$ は $G\otimes\mathscr{A}$ 上のトレース τ によるノルムとする。$G\otimes\mathscr{A}$ から $\mathscr{C}$ 上への期待写像 Φ はこのノルムを減少させるから，

$$\|T-\textstyle\sum_i\lambda_i\Phi(UU_i)\|_2<\varepsilon$$

となる。補題2.1により，$V_i=\Phi(UU_i)$ は $\mathscr{C}$ の部分等長作用素で，$V_i^*V_i\in\mathscr{Z}$，$V_iV_i^*\in\varphi_U(\mathscr{Z})$ である。$\varepsilon<\|T\|_2$ と ε を選び，不等式

$$\begin{aligned}&\|T-\textstyle\sum_i(I-F)V_i(I-E)\|_2\\&\quad\leqq\|TT^*\|\,\|T-\textstyle\sum_i\lambda_i\Phi(UU_i)\|_2\|T^*T\|<\varepsilon\end{aligned}$$

に注意すると，或るに i 対して

$$V'=(I-F)V_i(I-E)\neq0$$

となる。仮定により $I-E\in\mathscr{Z}$，$I-F\in\varphi_U(\mathscr{Z})$ であるから，

$$\begin{aligned}V'V'^*V'&=(I-F)(V_i(I-E)V_i^*)(I-F)V_i(I-E)\\&=(I-F)V_i(I-E)(V_i^*V_i)(I-E)\\&=(I-F)V_iV_i^*V_i(I-E)\\&=(I-F)V_i(I-E)=V'\end{aligned}$$

である。すなわち，V' は $\mathscr{C}$ の部分等長作用素で，

$$V'^*V'\leqq I-E,\quad V'V'^*\leqq I-F,$$

かつ
$$V'\mathscr{A}V'^*\subset\varphi_U(\mathscr{A}),\quad V'^*\varphi_U(\mathscr{A})V'\subset\mathscr{A}$$

となる。従って $V+V'$ は補題の V に対する条件をすべて満足する部分等長作用素で，V の真の拡張になっている。このことと Zorn の補題とによって，V は $\mathscr{C}$ のユニタリ作用素 W に拡張できて $W\mathscr{A}W^*\subset\varphi_U(\mathscr{A})$ となる。

以上の2つの補題を用いて次の定理を示そう。これは [4; Corollary to Theorem 1], [9; Corollary] の一般化でもある。

定理 2.3. $\mathscr{A}$ は有限で，その上で自由に作用する G で不変なトレースをもつとする。$\mathscr{C}$，$\mathscr{D}$ を $G\otimes\mathscr{A}$ と $\mathscr{A}$ の中間の部分環とする。このとき，$U\in\mathscr{U}(G\otimes\mathscr{A})$ が $\mathscr{C}$ と $\mathscr{D}$ の同型写像を誘導するならば，$UW\in\mathscr{U}(G\otimes\mathscr{A},\mathscr{A})$ となるような $W\in\mathscr{U}(\mathscr{C})$ が存在する。

証明。 $\varphi_{U^*}(\mathscr{A})=\varphi_U^{-1}(\mathscr{A})\subset\mathscr{C}$ だから，U^* に対して補題2.1を用いると，$V=\Phi(U^*)$ は $\mathscr{C}$ の部分等長作用素で，その始射影 E は $\mathscr{Z}$ に，終射影 F は $\varphi_{U^*}(\mathscr{Z})$ に属する。また，任意の $A\in\mathscr{A}$ に対し，(3) により

$$VAV^*=\varphi_U(A)F\in\varphi_{U^*}(\mathscr{A}),$$
$$V^*\varphi_{U^*}(A)V=EA\in\mathscr{A}$$

となるから，補題2.2を適用できて，V を $\mathscr{C}$ のユニタリ作用素 W に拡張し，$W\mathscr{A}W^*\subset\varphi_{U^*}(\mathscr{A})$ となるようにできる。従って

$$\begin{aligned}\varphi_{UW}(\mathscr{A})&=UW\mathscr{A}W^*U^*\\&\subset\varphi_U\varphi_{U^*}(\mathscr{A})=\mathscr{A}\end{aligned}$$

となるから $UW\in\mathscr{U}(G\otimes\mathscr{A},\mathscr{A})$ である。

3. 拡大定理. $\mathscr{A}$，G は前節と同じ条件を満たすとする。まず，

補題 3.1. $\mathscr{A}$ をヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上のフォン・ノイマン環とする。$\mathscr{H}$ 上のユニタリ作用素 U が $\mathscr{A}$ の部分環 $\mathscr{C}$ と $\mathscr{D}$ の同型写像を誘導するならば，U はまた $\mathscr{C}'$，$\mathscr{D}'$ 間の同型写像を誘導する。

証明。 $U^*\mathscr{D}U=\mathscr{C}$ だから，任意の $C'\in\mathscr{C}'$ に対して

$$\begin{aligned}UC'U^*D&=UC'(U^*DU)U^*\\&=U(U^*DU)C'U^*\\&=DUC'U^*\end{aligned}$$

が成り立つ。よって $UC'U^*\in\mathscr{D}'$ となるから補題は明らか。

補題 3.2. $U\in\mathscr{U}(G\otimes\mathscr{A}',\mathscr{A}')$ で誘導される $\mathscr{A}$ 上の自己同型写像は中心充満群 $[G]'$ に属する。

証明。 [4; Theorem 1] により，φ_U は G を $\mathscr{A}'$ 上の自己同型群とみたときの充満群に属し，従って [4; Lemma 3] によって

$$\varphi_V(A')=\textstyle\sum_{g\in G}P_g g((V'A'V'^*) \qquad (A'\in\mathscr{A}')$$

と表わせる。U はまた $\mathscr{A}$ の自己同型写像をも誘導し，$A\in\mathscr{A}$ に対し

$$\varphi_U(A)=\sum_{g\in G} P_g\, g(V'AV'^*)$$
$$=\sum_g P_g\, g(A)$$

となる。すなわち，$\varphi_U\in[G]'$ である。

最後にこの論文の主定理である次の拡大定理を示そう。

定理 3.3. $\mathscr{A}$ が G をガロア群とする $\mathscr{B}$ のガロア拡大であるとし，$\mathscr{C}$，$\mathscr{D}$ は $\mathscr{A}$ と $\mathscr{B}$ の中間の部分環とする。表現空間 $\mathscr{H}$ 上のユニタリ作用素 U で誘導される $\mathscr{C}$，$\mathscr{D}$ 間の同型写像 θ が $\mathscr{B}$ の元を動かさなければ，θ は$[G]'$ に属する $\mathscr{A}$ の同型写像に拡大できる。

証明。　任意の $B\in\mathscr{B}$ に対して $\theta(B)=UBU^*=B$ だから $U\in\mathscr{B}'$ である。ガロア拡大の定義により $\mathscr{B}'$ は $G\otimes\mathscr{A}'$ と代数同型であるから，この２つを同一視することによって，$U\in G\otimes\mathscr{A}'$ としてよい。$\mathscr{C}'$ と $\mathscr{D}'$ は $G\otimes\mathscr{A}'$ と $\mathscr{A}'$ の中間の部分環で，補題3.1により U は $\mathscr{C}'$，$\mathscr{D}'$ 間の同型写像を誘導する。しかるとき，定理2.3により適当な $W\in\mathscr{U}(\mathscr{C}')$ を選べば，$UW\in\mathscr{U}(G\otimes\mathscr{A}', \mathscr{A}')$ となる。UW で $\mathscr{A}$ 上に誘導される自己同型写像を φ とすると，任意の $C\in\mathscr{C}$ に対して

$$\varphi(C)=UWCW^*U^*=UCU^*=\theta(C)$$

となるから，φ は θ の拡大であり，補題3.2によって $\varphi\in[G]'$ である。

参　考　文　献

[1] M. Choda: *On the conditional expectation of a partial isometry in a certain von Neumann algebra*, Proc. Japan Acad., 41 (1965) 277-279.

[2] H. Dye: *On groups of measure preserving transformations II*, Amer. J. Math., 85 (1963) 551-576.

[3] 芳賀：*Dye* の対応と一般クロス積，茨大工学部研究集報，20 (1972) 247-256.

[4] Y. Haga—Z. Takeda: *Correspondence between subgroups and subalgebras in a cross product von Neumann algebra*, Tôhoku Math. J., 24 (1972) 167-190.

[5] M. Henle: *Galois theory of W*-algebras*, Preprint, (1971).

[6] R. Kadison: *Isomorphisms of factors of infinite type*, Canad. J. Math., 7 (1955) 322-327.

[7] M. Nakamura—Z. Takeda: *A Galois theory for finite factors*, Proc. Japan Acad., 36 (1960) 258-260.

[8] M. Nakamura—Z. Takeda: *On the fundamental theorem of the Galois theory for finite factors*, Proc. Japan Acad., 36 (1960) 313-318.

[9] M. Nakamura—Z. Takeda: *On inner automorphisms of certain finitefactors*, Proc. Japan Acad., 37 (1961) 31-32.

[10] Z. Takeda: *On the extension theorem of the Galois theory for finite factors*, Proc. Japan Acad., 37 (1961) 78-82.

[11] Z. Takeda: *On the normal basis theorem of the Galois theory for finite factors.* Proc. Japan Acad., 37 (1961) 144-148.