

「滴れ」の研究

The Investigation on Water Drop

高玉 續 (Isao Takatama)

ABSTRACT — The object of this investigation is to obtain the physical properties of any liquid by the mathematical method. In this paper the writer calculated the form of the drop which occurs on the dried surface of a flat plate. The equilibrium equation of the drop in three dimensions is given by the following equation

$$T \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{T}{R_0} + \rho g h = 0$$

where T the surface tension of liquid, ρ the density of liquid, g the acceleration of gravity, R_1, R_2 the radii of two principal curvatures and R_0 at the point of inflexion Q in Fig. 1. is especially expressed by R_0 . It is too difficult to solve exactly the above equation taking the all boundary conditions into account. Therefore the author solved this equation strictly under the consideration as the two dimensional problem. From this computation the following results were obtained —

1. The drop holds an equilibrium form when the next conditions are satisfied.

$$63^\circ \leq \alpha_1, \alpha_0 \leq 180^\circ$$

$$0.65 \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \leq R \leq 3.14 \sqrt{\frac{T}{\rho g}} ; \quad 0 \leq H \leq 3.41 \sqrt{\frac{T}{\rho g}}$$

where α_1 is the contact angle, α_0 the inclined angle, R the radius of drop at root, H being the height of drop.

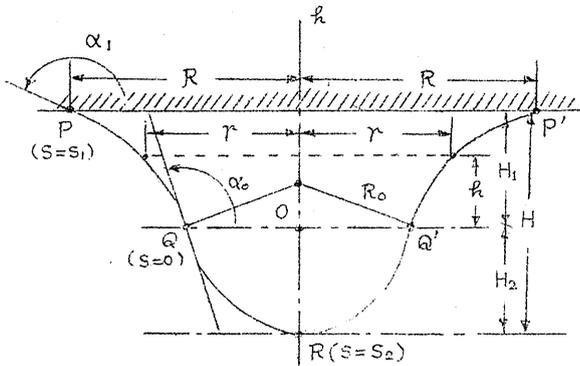
2. As the total volume of drop at a point dropping down has an intimate connexion with the angles α_0 and α_1 , the writer solved it graphically, and also computed, from the new standpoint, the volume of drop in course of dropping, since the LOHNSTEIN'S method which has been used for this

kind of calculation is seemed to be unreasonable from detailed investigation.

1. 緒言 液体を取扱う機械例えは蒸溜塔、蒸汽罐復水器等においては液体の物理的性質が重要な役割を果たすが、その一例として高温蒸気が冷却面で凝結する如き場合には、液体の表面張力、密度、粘性、熱傳導率等が重要な因子となる。蒸気が伝熱面に凝結する時には凝結液体が膜状となって流動する場合と滴状凝結をなして伝熱面に附着し或る一定の大きさに達すると滴下する場合とに分けられる。前者に對しては W. Nusselt の有名な膜状凝結理論⁽¹⁾が樹立されて以來 W. Stender,⁽²⁾ M. Jakob,⁽³⁾ S. Erle⁽⁴⁾ 等によつて拡張され実験結果と極めて良く一致することが確められた。しかしながら後者に関しては実験的研究⁽⁵⁾は数多いが理論的研究は一寸見当らないようである。斯くの如き滴下現象は日常我々は「雨滴れ」としてよく見かけるが、この場合には表面張力、密度、流量等が重要な因子となり、中でも流量が最も作用着しくこの流量が或る一定値以内にある間は不連続的な滴下現象を生ずるが、一定値を越すと連続的な流動現象に移るものであることが簡単な実験によつて知られる。とにかく滴状凝結の場合にはその熱伝達率が膜状凝結の場合よりも遙かに大きいことが実験的に確められている。従つて液滴の発生状態と伝熱現象との間には密接なる關係があることがわかるが、筆者はその研究の第一歩として伝熱効果を考慮せず⁽⁶⁾に、まづ如何なる状態の変化によつて液滴が生長し滴下するかを理論的に調べて見た。「雨滴れ」に関する研究には古来から有名なものが多く、Lord Rayleigh,⁽⁶⁾ T. Lohnstein,⁽⁷⁾ J. C. Adams, F. Bashforth 等の研究があり、最近では棚沢⁽⁸⁾、岡根⁽⁹⁾氏等がある。

本研究では最初に理論的解析を簡単にするため乾いた平面板に生ずる液滴の平衡状態を考へて液滴の形状に對して二次元的に嚴密に論じた。次に液滴の懸垂容積を計算し、従来は滴下容積を求めるのに T. Lohnstein の所謂等角落下の仮定を用いていたのであるが、筆者にはこの仮定が不合理のように思へたのでこれとは全く別個な仮定を設けて滴下容積を計算することを提案した。

2. 基礎方程式の誘導とその解。 蒸溜塔とか復水器の内部では液滴は蒸気と接觸するが、こゝでは取扱いを簡単にするために液滴が空氣と接觸して水平におかれた乾いた平面板に懸垂されて平衡状態にある場合を考えると液滴の形は一般に第1圖の如くなる。同圖に於いて QP 曲線は上方に對して凸、QR 曲線は凹であり、Q 点は両曲線の彎曲点になる。又 P 点で QP は水平板



第 1 図

と接触角 α_1 をなして交はる。
 弯曲点 Q を原点にとり、 T を
 液体の表面張力 dyne/cm 、
 ρ を液体の密度 g/cm^3 、 g
 を重力加速度 cm/sec^2 、 R_1
 および R_2 を主曲率半径とす
 れば、 Q 点では $R_1 \rightarrow \infty$ 、
 $R_2 = R_0$ であるから液滴自
 由表面の平衡方程式は

$$T \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{T}{R_0} + \rho g h = 0 \quad \text{----- (1)}$$

である。(1)式を数学的に厳密に解くことは困難であるから問題を二次元的
 に考えて、 x, h 変数を S, α に変換する。第2図に於いて

$$y = \int_0^S \sin \alpha \cdot ds$$

であるから(1)式の代りに次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} \widehat{PQ} \text{ に対して} \quad & \frac{d\alpha}{ds} - \frac{1}{R_0} - \frac{\rho g}{T} \int_0^S \sin \alpha \cdot ds = 0 \\ \widehat{QR} \quad \quad \quad & \frac{d\alpha}{ds} - \frac{1}{R_0} + \frac{\rho g}{T} \int_0^S \sin \alpha \cdot ds = 0 \end{aligned} \right\} \text{----- (2)}$$

$$(2) \text{式は更に} \quad \frac{d^2\alpha}{ds^2} \mp \frac{\rho g}{T} \sin \alpha = 0 \quad \text{----- (2a)}$$

となる。境界条件は Q が弯曲点であることを考慮して

$$\left. \begin{aligned} P: \quad & S = S_1, \quad \alpha = \alpha_1 \\ Q: \quad & S = 0, \quad \alpha = \alpha_0, \quad \left(\frac{d\alpha}{ds} \right)_{s=0} = 0 \\ R: \quad & S = S_2, \quad \alpha = 2\pi \end{aligned} \right\} \text{----- (3)}$$

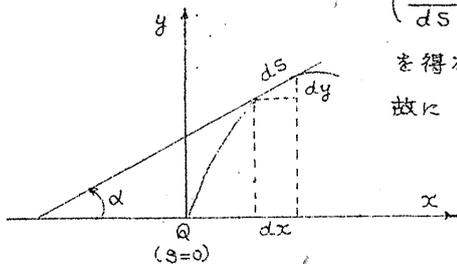
である。まづ \widehat{PQ} を求めるには(2a)の両辺に $2 \frac{d\alpha}{ds}$ を乗じて一回積分すれば

$$\left(\frac{d\alpha}{ds} \right)^2 = C - \frac{2\rho g}{T} \cos \alpha, \quad C: \text{積分常数}$$

を得る。境界条件から $C = \frac{2\rho g}{T} \cos \alpha_0$

故に

$$S = \sqrt{\frac{T}{2\rho g}} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos \alpha_0 - \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{T}{2\rho g}} \int_{\theta}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}, \quad \pi - \theta = \alpha$$



第 2 図

これを楕円積分に変形するために

$$\sin \frac{\theta_0}{2} = k, \quad \sin \frac{\theta}{2} = k \sin \psi$$

と置けば

$$S = \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} = \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \{K - F(k, \psi)\} \quad \text{----- (4)}$$

ここに $F(k, \psi) = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}}$, $K = F(k, \frac{\pi}{2})$ である。

数値計算に便利なように x, y 座標に変せば

$$\begin{aligned} dx &= \cos \alpha \cdot ds = -\cos \theta \cdot ds = \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \frac{2k^2 \sin^2 \psi - 1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} d\psi \\ &= \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} - 2\sqrt{\frac{T}{\rho g}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi} \cdot d\psi \end{aligned}$$

$$dy = \sin \alpha \cdot ds = \sin \theta \cdot ds = 2k \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \sin \psi \cdot d\psi$$

であるから

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} - 2\sqrt{\frac{T}{\rho g}} \int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi} \cdot d\psi \\ y &= 2k \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}} \sin \psi \cdot d\psi = 2k \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \cos \psi \end{aligned} \right\} \text{----- (5)}$$

となる。次に QR 曲線に対しては前同様にして

$$S = \sqrt{\frac{T}{2\rho g}} \int_{\alpha'_0}^{\alpha'} \frac{d\alpha'}{\sqrt{\cos \alpha' - \cos \alpha'_0}}, \quad \alpha'_0 = \pi + \alpha_0 \cong \alpha' \cong 2\pi$$

を得るが $2\pi - \alpha' = \theta'$, $k = \sin \frac{\theta'_0}{2}$, $\sin \frac{\theta'}{2} = k \sin \psi'$ と置けば

$$S = \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \int_{\psi'}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi'}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi'}} = \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \{K - F(k, \psi')\} \quad \text{----- (6)}$$

となる。しかし

$$\left. \begin{aligned} x &= -\sqrt{\frac{T}{\rho g}} \int_{\psi'}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi'}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi'}} + 2\sqrt{\frac{T}{\rho g}} \int_{\psi'}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi'} \cdot d\psi' \\ y &= -2k \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \int_{\psi'}^{\frac{\pi}{2}} \sin \psi' \cdot d\psi' = -2k \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \cdot \cos \psi' \end{aligned} \right\} \text{----- (7)}$$

を得る。故に接触角 α_1 および α_0 を与えることによって ψ_1, k が求まり液滴自由表面の形状が求められる。(5)式と(7)式を比較すれば液滴の形は弯曲点 Q に関して対称的であることがわかる。更に液滴の高さ H を α_0 と α_1 の函数として求めて見ると

$$\lambda = \tan \alpha = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}} / (2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1)$$

から

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \right\}$$

故に $k = \cos \frac{\alpha_0}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_0^2}} \right)}$, $\cos \frac{\alpha_1}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} \right)}$

従って $H_1 = 2k \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \cos \psi_1 = 2k \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \left(1 - \frac{1}{k^2} \cos^2 \frac{\alpha_1}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$

$$= \sqrt{\frac{2T}{\rho g} \left(\sqrt{1+\lambda_1^2} - \sqrt{1+\lambda_0^2} \right)}$$

$$H_2 = 2k_1 \sqrt{\frac{T}{\rho g}} = \sqrt{\frac{2T}{\rho g} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_0^2}} \right)}$$

結局 $H = H_1 + H_2 = \sqrt{\frac{2T}{\rho g}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_0^2}}} + \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_0^2}}} \right\}$ ----- (8)

但し $\tan \alpha_1 = \lambda_1$, $\tan \alpha_0 = \lambda_0$

を得る。一例として水の場合に $\alpha_1 = 180^\circ$, $\alpha_0 = 110^\circ$, $T = 75 \text{ dyne/cm}$, $\rho = 1 \text{ gr}$, $g = 980 \text{ cm/sec}^2$ として液滴の高さを計算してみると $H = 0.633 \text{ cm}$ となる。

3. 解の吟味。本節では前節に於いて求めた解を物理的に吟味する。

(5), (7) 両式に於いて $\alpha_1 = \pi$ とおけば

$$R_{\alpha_1=\pi} = -2\sqrt{\frac{T}{\rho g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} + 4\sqrt{\frac{T}{\rho g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi} \cdot d\psi$$

となるが、 $R_{\alpha_1=\pi}$ は $\alpha_0 = 180^\circ$ 即ち $k = 0$ のとき最大となり

$$R_{\max} = \pi \sqrt{\frac{T}{\rho g}} = 3.14159 \sqrt{\frac{T}{\rho g}}$$

を得る。又 $\alpha_1 = 180^\circ$, $\alpha_0 = 0$ 即ち $\alpha_1 = 180^\circ$, $k = 1$ のときに液滴高さの最大値が得られ、

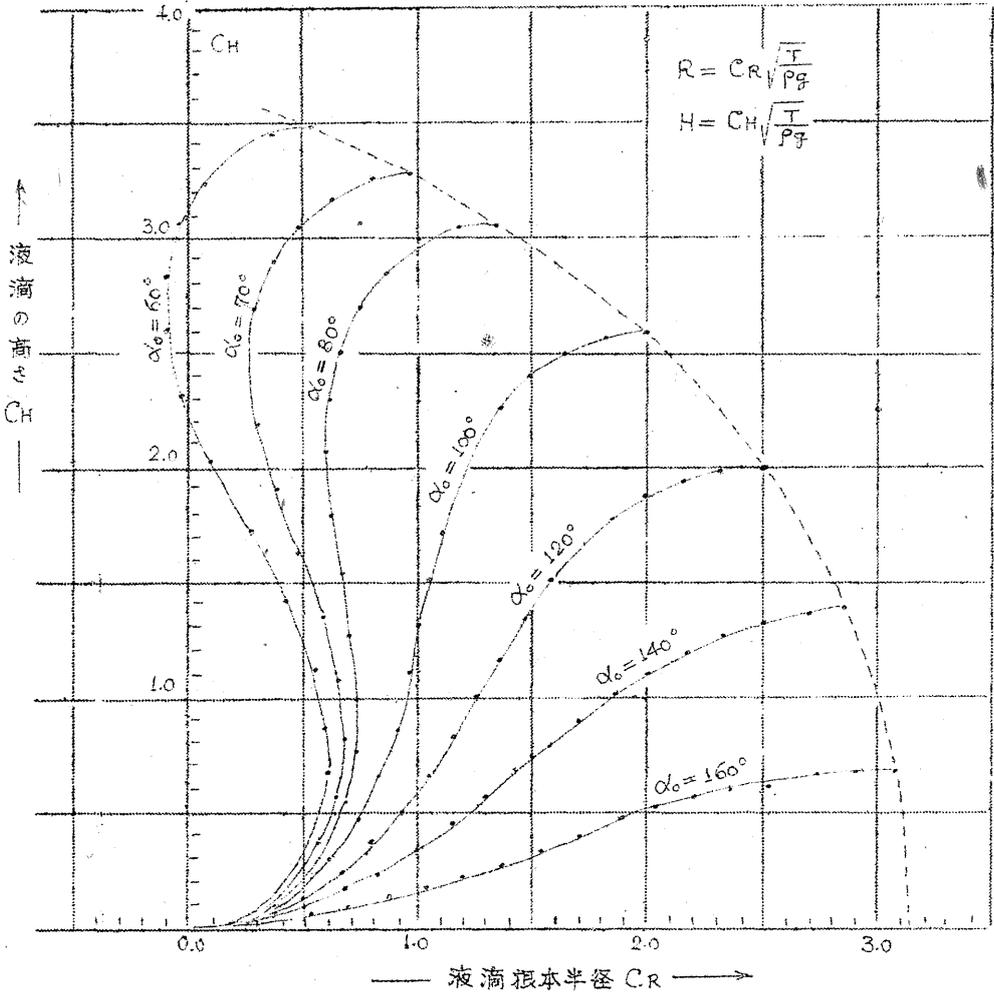
$$H_{\max} = 4\sqrt{\frac{T}{\rho g}}$$

となる。従って一般に $0^\circ < \alpha_0 < 180^\circ$ に於ける R および H に対して次の限界が成立せねばならない。

$$0 \leq R \leq 3.14159 \sqrt{\frac{T}{\rho g}}, \quad 0 \leq H \leq 4\sqrt{\frac{T}{\rho g}} \quad \text{----- (9)}$$

こゝで $\alpha_0 = 180^\circ$ の場合に α_0 を色々に変化させて液滴の形を画いて見ると第3図の如くなる。

第3図は液滴自由表面の形を実際に水平板に懸垂される場合とは上下逆に、しかも半面のみ画いたもので α_0 の減少と共に液滴根本半径および高さがどのように変化するか明瞭になる。第4図は $\alpha_1 = 150^\circ$ の計算例である。第3, 4図を比較すると $\alpha_1 = 180^\circ$ の場合には α_0 の減少と共に一樣に R は減少し、 H は増加するが、これに対して $\alpha_1 = 150^\circ$ の場合には H は一樣に増加するけれども R は一度増加して最大値 $R_m = 2.07 \sqrt{\frac{T}{\rho g}}$ から再び減少を始める。しかもこの

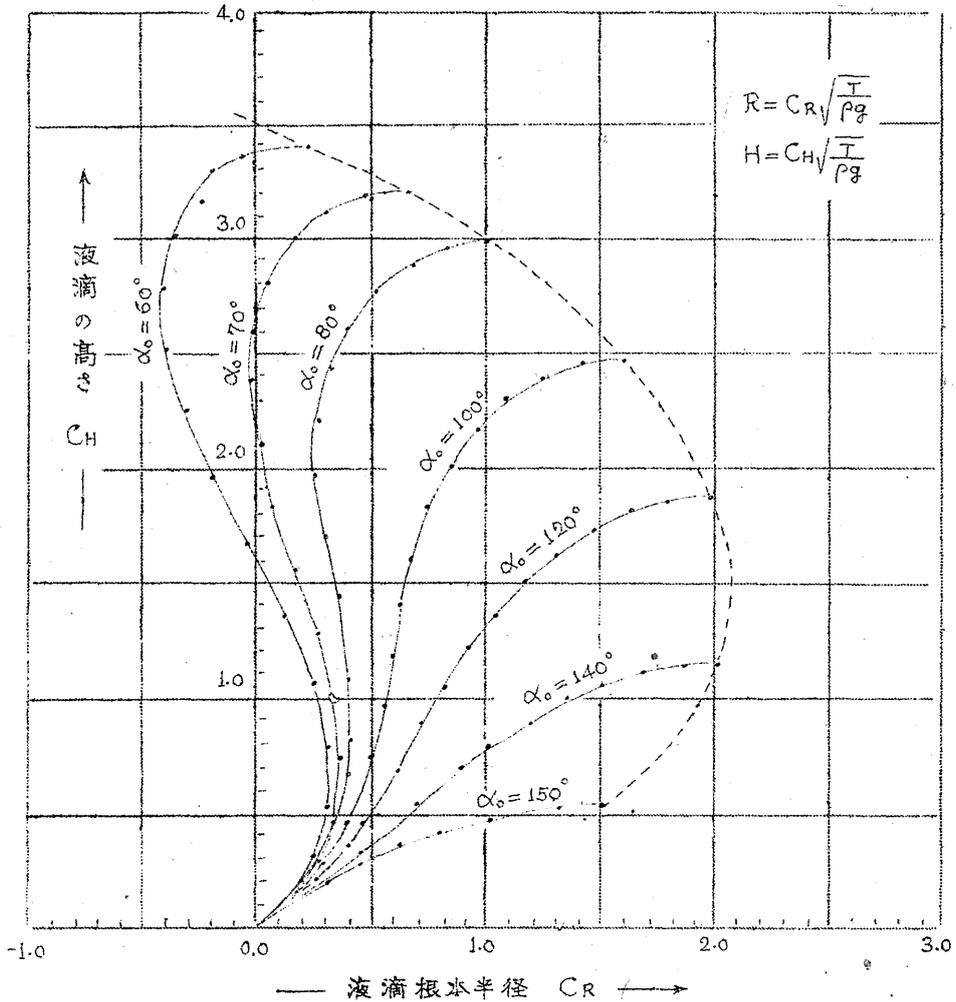


第3図 $\alpha_1 = 180^\circ$ の場合の懸垂液滴の形

傾向は $\alpha_1 < 180^\circ$ の場合にはすべて見受けられる。

扱て、(9)式に示された不等式は純数学的に導かれたものであるが更にこれを物理的に考察すると限界が縮小される。即ち才3図に於いて $\alpha_0 = 90^\circ$ の場合には液滴自由表面との垂直切線は一個であるが $\alpha_0 < 90^\circ$ の場合には二個となる。しかも $\alpha_0 \leq 60^\circ$ の場合には全曲面を左右対称的に画くと才5図(A)の如くなる。しかしながら斯くの如き液滴の平衡状態は物理的に不可能であるから才5図(B)の如くに $60^\circ < \alpha_0 < 70^\circ$ に於いて極限の平衡形が存在する筈である。この時の α_0 、 R および H を求めて見ると

$$\alpha_0 = 63^\circ, \quad R = 0.65 \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}, \quad H = 3.41 \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \quad \text{----- (10)}$$

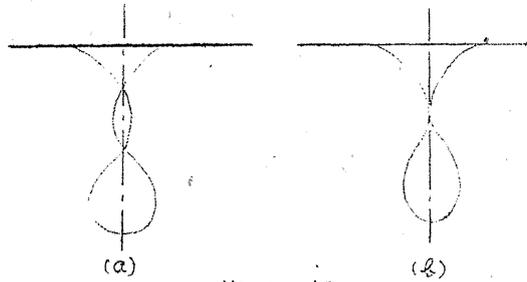


第4図 $\alpha_1 = 150^\circ$ の場合の懸垂液滴の形

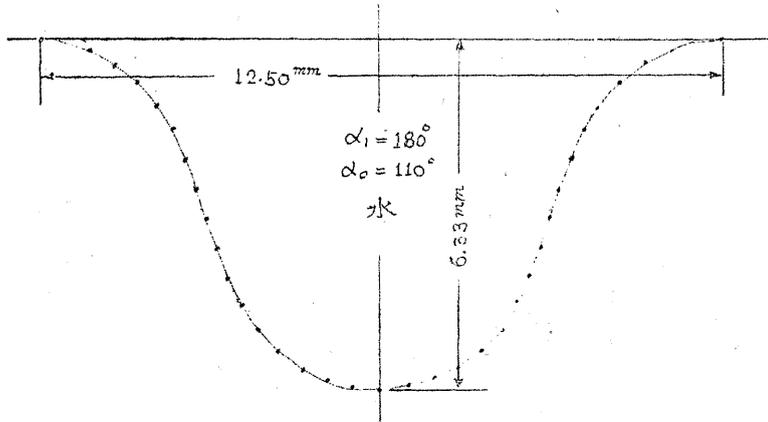
が得られる。(9),(10) 両式を同時に考察すると任意の液滴が最後に満足せねばならぬ条件として次式が得られる。即ち

$$\left. \begin{aligned} 0.65\sqrt{\frac{T}{\rho g}} \leq R \leq 3.14\sqrt{\frac{T}{\rho g}} \\ 0 \leq H \leq 3.41\sqrt{\frac{T}{\rho g}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

であって如何なる種類の液滴といえどもこの限界を出ることはない。以上の理論的結果と実際の液滴とを比較するために空気中で銅板およびガラス板から液滴を懸垂せしめて落下寸前の液滴の形を写真に撮った。印刷の關係上写真は載せてないが第6圖の如くに $\alpha_1 = 180^\circ$, $\alpha_0 = 110^\circ$ の場合の懸垂液滴の形を画くとこれが極めて良く銅板に懸垂された液滴の実験写真と一致した。



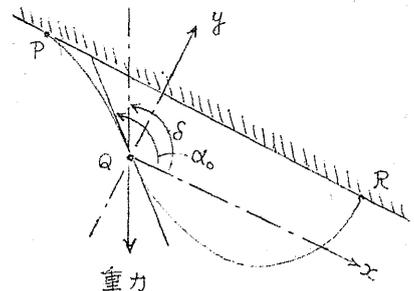
第 5 図



第 6 図 水の懸垂液滴の形

4. 傾斜板に懸垂された液滴

最も一般の場合即ち第 7 図に於いて平板の傾斜角を δ とし坐標原点を弯曲点 Q に取り、 x 軸を平板に平行に y 軸を垂直に取れば、微小曲線部分の釣合を考へて平衡方程式を作ると PQ および QR 曲線に対してそれぞれ



第 7 図

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds} - \frac{1}{R_0} - \frac{\rho g}{T} \int_a^s \cos(\alpha - \delta) ds &= 0 \\ \frac{d\alpha}{ds} - \frac{1}{R_0} + \frac{\rho g}{T} \int_0^s \cos(\alpha - \delta) ds &= 0 \end{aligned} \right\} \text{----- (12)}$$

が得られる。 $\alpha - \delta = \theta$ と置いて S に関して微分すれば

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2} \mp \frac{\rho g}{T} \cos \theta = 0 \text{----- (12a)}$$

となる。境界条件は

$$\left. \begin{aligned} P: \alpha &= \alpha_1, \quad S = S_1 \\ Q: \alpha &= \alpha_0, \quad S = 0, \quad \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)_{S=0} = 0 \\ R: \alpha &= \alpha_2, \quad S = S_2 \end{aligned} \right\} \text{----- (13)}$$

PQ 曲線に対して前と全く同様にして楕円積分となる。即ち

$$S = \sqrt{\frac{T}{2\rho g}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta - \sin\theta_0}} = \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \int_{\phi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \phi}}$$

但し $\frac{\pi}{2} - \theta = \Theta, \sin \frac{\Theta}{2} = K, \sin \frac{\Theta}{2} = K \sin \phi$

である。更に x, y 座標に変換すると

$$dx = \cos \delta \cdot ds = \cos \delta \cdot \sin \Theta \cdot ds - \sin \delta \cdot \cos \Theta \cdot ds$$

$$dy = \sin \delta \cdot \sin \Theta \cdot ds + \cos \delta \cdot \cos \Theta \cdot ds$$

であるから

$$\left. \begin{aligned} x &= 2K \cos \delta \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \cos \phi - 2 \sin \delta \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \int_{\phi}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - K^2 \sin^2 \phi} d\phi + \sin \delta \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \int_{\phi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \phi}} \\ y &= 2K \sin \delta \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \cos \phi + 2 \cos \delta \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \int_{\phi}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - K^2 \sin^2 \phi} d\phi - \cos \delta \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \int_{\phi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \phi}} \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

となる。QR に対する解は (14) 式に負符号をつけたものに等しい。特別な場合として鉛直板即ち $\delta = \frac{\pi}{2}$ とすると

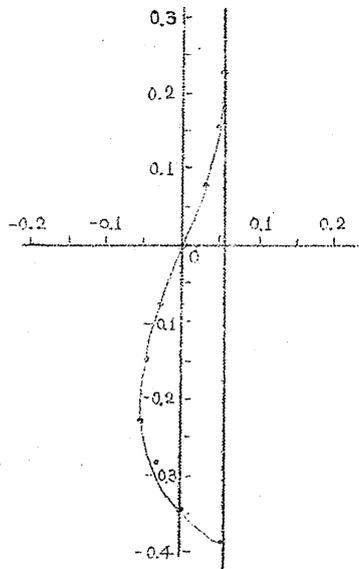
$$x = \pm \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \int_{\phi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \phi}} \mp 2 \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \int_{\phi}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - K^2 \sin^2 \phi} d\phi$$

$$y = \pm 2K \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \cos \phi$$

となってこれは水平板に懸垂された液滴の解と同形であるから鉛直平板に対する液滴は水平板に懸垂された液滴の形を鉛直板で切断した一部分に等しい。才 8 図は $\alpha_0 = 70^\circ, \alpha_1 = 90^\circ, \delta = 90^\circ$ の場合の計算結果である。たゞこゝで注意せねばならぬことは α_1, α_0 および α_2 は各々独立に任意の値を取ることができないことである。即ち P, R は同一鉛直線上になければならぬことから

$$\begin{aligned} & -2 \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \int_{\phi_1}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - K^2 \sin^2 \phi} d\phi + \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \int_{\phi_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \phi}} \\ & = 2 \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \int_{\phi_2}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - K^2 \sin^2 \phi} d\phi - \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \int_{\phi_2}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \phi}} \end{aligned}$$

を得る。 $\phi_1 > \phi_2$ とすれば



第 8 図

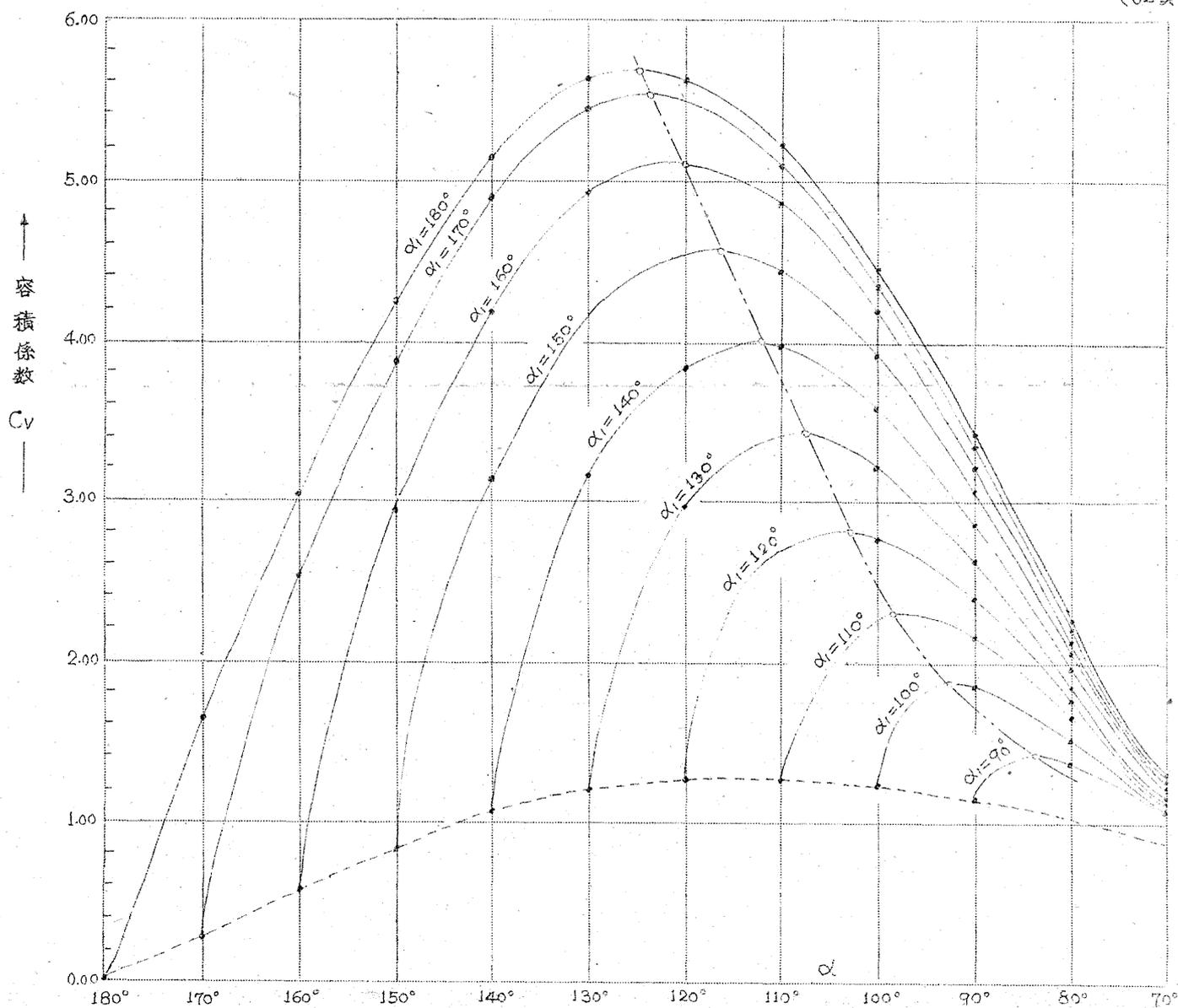
$$\int_{\phi_2}^{\phi_1} \frac{d\phi}{\sqrt{1-K^2 \sin^2 \phi}} - \int_{\phi_2}^{\phi} \sqrt{1-K^2 \sin^2 \phi} d\phi + A = 0 \quad \text{----- (15)}$$

よして $A = 2 \int_{\phi_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-K^2 \sin^2 \phi}} - 4 \int_{\phi_1}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-K^2 \sin^2 \phi} d\phi$ である。

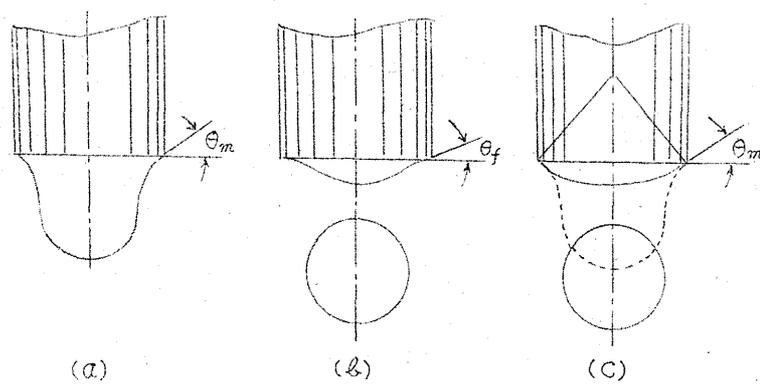
今 α_0 および α_1 が与えられれば K および ϕ_1 は決まるから A は求まり方程式 (15) を解いて ϕ_2 を求めれば $\sin(\pi - \frac{\alpha_2}{2}) = K \sin \phi_2$ から α_2 が決まるわけである。

5. 液滴の落下. 第4節の理論的結果によると懸垂液滴の形状および大きさは液滴自由表面が平板との接触点に於ける接触角 α_1 と曲面の弯曲点に於ける切線が X 軸とのなす角即ち α_0 によって決定される。しかも液滴を決定する主要素は α_0 であつて $63^\circ \leq \alpha_0 \leq 180^\circ$ の限界内では如何なる種類の液体であつても理論的には平衡状態にあり、 $\alpha_0 = 63^\circ$ の場合が平板に懸垂され得る液滴の極限形であつてこの時始めて平衡が破れ滴下するわけである。しかしながら実際には液滴が極限形になる前に滴下してしまう。これは如何なる理由によるのであろうか。まづ液滴自由表面は第1図に於いて r 軸を中心軸とする曲線 $PQRQ'R'$ の回転面であると考え滴下直前の α_1, α_0 および懸垂容積の間の關係を求めて見る。第9図は接触角 α_1 が与えられた場合に傾角 α_0 の大きさによって全容積が如何に変化するを示す。第9図から液滴が極限形になる前に滴下する理由が次のように説明される。即ち例えば $\alpha_1 = 180^\circ$ の場合には α_0 が 180° から減少するにつれて V は急激に増加し $\alpha_0 = 125^\circ$ に於いて V は最大となり、それ以後は逆に容積が減少する。これは液滴が $\alpha_0 = 125^\circ$ から生長するにつれて液体が平板の上方に逆流することを意味するが、明らかに物理的に不可能であるから極限形 $\alpha_0 = 63^\circ$ になる前に滴下してしまうわけである。応用上重要な滴下角度 α_{0d} , 最大容積係数 C_{vd} および接触角 α_1 を第9図から求めて第1表に示すが、この表から液体と平板の物質によって決まる α_1 が与えられれば α_0 が何度附近で滴下しその時の最大容積の大凡を見積ることが出来る。

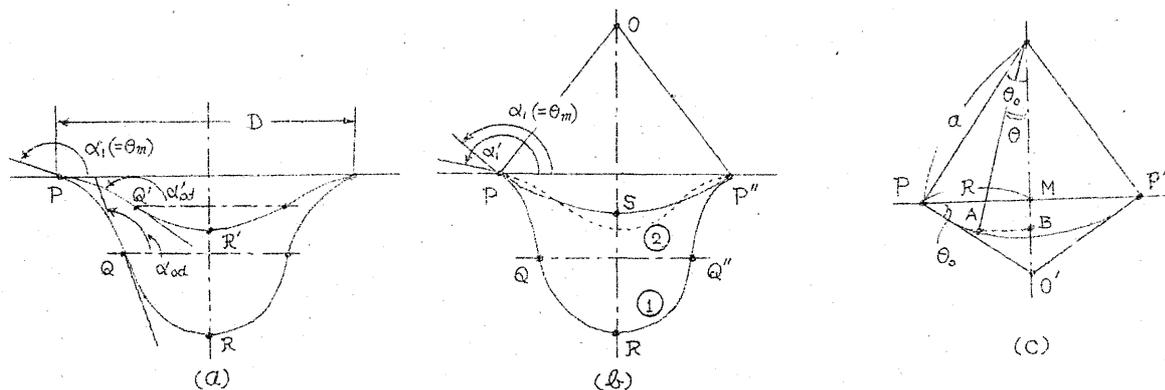
平衡が破れて滴下する場合には第10図(8)の如く鉛直円管端から滴下する時に落下滴と同管に懸垂される残液とに別れることが実験から認められる。平板から滴下する時も同様な現象が見られる。この際の落下滴および残液の容積が液滴全容積の何割に当るかわかれば滴下現象は完全に解かれたことになるのであるが、これを厳密に解くには動水力学的な基礎方程式が必要であり、現在に至るも解かれていない。T. Lohnstein は円管端から滴下する場合にこれを処理するために所謂等角落下の仮定⁽¹⁰⁾を設けた。即ち第9図に於いて (a) を落下直前の状態、(b) を落下直後の状態とした時に滴下直



第9圖 懸垂液滴容積線圖



第10圖



第11圖

前の根本の角度 θ_m が滴下直後の根本の角度 θ_f に等しいと置いたのである。しかるに才11図(a)に於いて曲線PQRおよびPQ'R'をそれぞれ落下直前および直後の液滴の形として α_1 即ち θ_m を与えると滴下直前の角度 α_{od} は容積の最大になる真として求められる。

液滴根本半径を表はす方程式は

$$R = 2\sqrt{\frac{T}{\rho g}} \int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} - \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} - \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} + 2\sqrt{\frac{T}{\rho g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} = \frac{D}{2} \quad (16)$$

$$\text{よって} \quad \psi_1 = \sin^{-1} \left(\frac{\sin \frac{\pi - \alpha_1}{2}}{\sin \frac{\pi - \alpha_0}{2}} \right), \quad k = \sin \frac{\pi - \alpha_0}{2}$$

よって与えられる。滴下直前の角度および根本直径をそれぞれ α_{od} および D_d とすると滴下の前後に於いて α_1 即ち θ_m は変化なく $\alpha_1 = \theta_m = \theta_f$ であり、 D_d は同管外径 D に等しいから勿論変化なく、変化するのは α_{od} のみで α'_{od} (一般に $\alpha'_{od} < \alpha_{od}$) となる。(16)式は ψ_1, k について一価函数であつて α_1, α_0 の値一個に対応して $R = \frac{D}{2}$ が一個決まる。それ故 $\alpha_{od} \neq \alpha'_{od}$ であるならばたとえ $\alpha_1 = \theta_m = \theta_f$ 即ち α_1 に変化がなくても当然滴下前後に於ける根本半径は異なり、落下の前後に於いて液滴根本直径が同管外径 D に等しいという事実と反することになる。無理に α_1 も D_d も変化がないとすれば $\alpha_{od} = \alpha'_{od}$ 以外に α'_{od} のとる値はなく液滴は全然滴下しないことになり、これ又事実と反するわけである。従つて等角落下の仮定は理論的に不合理となり、液滴落下直後には才11図(b)②真線の如くになり一般に $\theta_m = \alpha'_1 > \alpha_1 = \theta_f$ となるのである。同様なことが平板から落下する場合についても云える。そこで筆者は次の如き仮定を提案したい。即ち才11図(b)に於いて①PQRを落下直前の液滴の形とした時にP, P'に於いて①曲面に接する球面PSP''を想像し、これをP, P''を通る水平面で切斷した時のPSP''球面とPP''平面とで囲まれた体積が残液容積に等しいと置くのである。落下直後にはこの残液が②の真線の如き平衡形を保ち $\alpha_{od} \neq \alpha'_{od}, \alpha_1 \neq \alpha'_1$ であることは勿論である。従つて残液容積を求めるには(c)で

$$\overline{AB} = a \sin \theta, \quad a \sin \theta_1 = R \quad \therefore \overline{AB} = R \frac{\sin \theta}{\sin \theta_1}$$

$$\text{故に 残液容積 } V' = \pi \int_0^R (\overline{AB})^2 dh = -\frac{\pi R^3}{\sin^3 \theta_1} \int_0^{\theta_1} \sin^3 \theta \cdot d\theta$$

$$= -\frac{\pi R^3}{\sin^3 \theta_1} \left(-\frac{\cos \theta_1 \sin^2 \theta_1}{3} - \frac{2}{3} \cos \theta_1 + \frac{2}{3} \right)$$

又 $\sin\theta = \sin\alpha$, $\sin\theta_1 = \sin\alpha_1$, $R = C_R \sqrt{\frac{T}{\rho g}}$ であるから

$$\text{結局 } |V| = \frac{\pi C_R^3}{3 \sin^3 \alpha_1} \left(\frac{T}{\rho g}\right)^{\frac{3}{2}} (2 - \cos \alpha_1 \cdot \sin^2 \alpha_1 - 2 \cos \alpha_1) \text{ ----- (17)}$$

を得る。(17)式から色々な α_1, α_{od} に対する残液容積を求めて表1表に示してある。円管端に生ずる残液容積は示していないが筆者の他の報告⁽¹¹⁾にはこれが実験結果と比較してあるから参照せられ度い。

6. 結 言 前節までの結果を要約すると、 α -に懸垂液滴の平衡形を二次元的に厳密に論じてその特性を明らかにしたことである。T. Lohnsteinが三次元的に論じた特性値と比較すると

$$\text{T. Lohnstein}^{(12)}: 0 \leq \text{液滴根本半径 } R \leq 3.83 \sqrt{\frac{T}{\rho g}}, \quad \text{無し}$$

$$\text{筆 者}: 0.65 \sqrt{\frac{T}{\rho g}} \leq \text{ " } R \leq 3.14 \sqrt{\frac{T}{\rho g}}, \quad 0 \leq \text{液滴高さ } H \leq 3.41 \sqrt{\frac{T}{\rho g}}$$

となる。第二には T. Lohnsteinの仮定とは全く別個な仮定を設けて落下容積と残液容積の割合を計算したことである。最大懸垂液滴容積について T. Lohnstein, 棚沢氏の結果と比較すれば

$$\text{T. Lohnstein}^{(13)}: 0 \leq \text{液滴全容積 } V \leq 18.84 \left(\frac{T}{\rho g}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{棚 沢 氏}^{(14)}: 0 \leq \text{ " } V \leq 9.02 \left(\frac{T}{\rho g}\right)^{\frac{3}{2}}$$

(これは棚沢氏が Lohnsteinの理論を修正して得られたものである)

$$\text{筆 者}: 0 \leq \text{ " } V \leq 5.64 \left(\frac{T}{\rho g}\right)^{\frac{3}{2}}$$

の如くなる。こゝに Lohnstein, 棚沢氏の結果は三次元解から求められたものであるが、二次元解との間に著しい相違が見られる。依って後日両者の相違を詳細に論ずる予定である。

さて以上の結論はすべて平板に懸垂された液滴の平衡方程式を数学的ならびに物理的條件を考慮して導いたものであるが、実際に復水器の内部では平板は完全に潤っており、又空気と違って周囲の蒸気が飽えず凝結してあるのであるから液滴の平衡と同時に熱伝導の影響を考慮せねばならず問題は複雑となり、その理論的取扱いは極めて困難である。筆者は熱伝導の影響を考慮して液滴の生成を考察しているが未だ発表するまでに至らない。單に平板が潤った場合のみについても液滴根本部分に如何なる條件を考慮すべきか今尚不明で今後の研究に俟たねばならない。

拙筆に当り論文中隨所に引用した諸論文に対して感謝すると共に、研究中終始御指導と御鞭撻を賜わる本学部井原教授に厚く御礼申上げる。尚本研究は文部省自然科学研究費補助によって行ったものである。(24.12.21)

文 献

- (1)~(4) 高橋安人訳： ボッシュ工業伝熱論 242~251頁
 (5) 全 上 241~242頁
 (6) L. Rayleigh: *Phil. Mag.* 5, 48 (1899) 321.
 (7) T. Lohnstein: *Ann. d. Phys.* 4, 20 (1905) 237, 4, 10 (1906) 606.
 T. Lohnstein: *Ann. d. Phys. u. Chem.* 4, 21 (1907) 1030.
 (8) 棚沢泰：「機械及電気」才7巻 11号 昭和17年, 才8巻 2号 昭和18年
 才8巻 3号 昭和18年.
 (9) 関根幸四郎： 盛岡工業専門学校十周年記念論文集, (昭和24年)
 (10) (7) に同じ
 (11) 筆者： 茨城大学工学部研究集報 才2巻 才2号に掲載の予定
 (12)~(13) (7) に同じ
 (14) (8) に同じ

第 1 表

α_1	180°	170°	160°	150°	140°	130°	120°	110°	100°	90°
α_{od}	125°	123°	120°	116°	112°	107°	103°	98°	93°	83°
C_V	5.64	5.50	5.10	4.56	4.00	3.40	2.80	2.30	1.88	1.42
C'_V	5.640	5.641	2.861	1.603	1.066	0.955	0.586	0.503	0.528	0.701
C''_V	0.000	1.859	2.238	2.957	2.933	2.444	2.213	1.796	1.351	0.718

α_1 : 接触角, α_{od} : 落下角度, C_V : 液滴全容積 $V = C_V \left(\frac{\Gamma}{\rho g}\right)^{\frac{3}{2}}$,
 C'_V : 落下滴容積 $V' = C'_V \left(\frac{\Gamma}{\rho g}\right)^{\frac{3}{2}}$, C''_V : 残液容積 $V'' = C''_V \left(\frac{\Gamma}{\rho g}\right)^{\frac{3}{2}}$.