作用素による近似について

中 本 律 男*

(昭和52年9月7日受理)

Approximation by Operators

RITSUO NAKAMOTO

Abstract:—In this paper, we shall study the approximating an arbitary operator on a separable infinite dimensional Hilbert space by a set of operators, especially, by normal operators.

1. Hを可分な無限次元ヒルベルト空間として，H上の(有界な線形)作用素の全体を$\boldsymbol{B}$で表わす。$\boldsymbol{S}$を$\boldsymbol{B}$の一つの部分集合とするとき，$T\in\boldsymbol{B}$に対して，

$$\mathrm{dist}(T,\boldsymbol{S})=\inf\{\|T-S\|\ ;\ S\in\boldsymbol{S}\}$$

を考える。特に，$\mathrm{dist}(T,\boldsymbol{S})=\|T-S_o\|$ なる$S_o\in\boldsymbol{S}$が存在するとき，S_oをTの$\boldsymbol{S}$－approximant と呼ばれ，すべての$T\in\boldsymbol{B}$に対して，approximant S_oが存在するとき，$\boldsymbol{S}$は$\boldsymbol{B}$で proximinal と呼ばれている。

$\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{N}$ をそれぞれ，コンパクト，正値，エルミット，正規作用素の全体で表わしておけば，$\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{H}$は$\boldsymbol{B}$で proximinal であることが知られている([11]; [8]; [7], [4])。

(最近，$\boldsymbol{N}$がnot-proximinalであることが[13]で証明された。) しかも，dist が具体的に，$T=B+iC$をTのデカルト分解とすれば，

$$\mathrm{dist}(T,\boldsymbol{P})=\inf\{r>\|C\|\ ;\ B+(r^2-C^2)^{1/2}\geqq 0\},$$

$$\mathrm{dist}(T,\boldsymbol{H})=\left\|\frac{T-T^*}{2}\right\|=\|C\|$$

で与えられ，best approximant として，例えば，$\boldsymbol{P}$のときは $P_o=B+(\delta(T)^2-C^2)^{1/2}$ ($\delta(T)=\mathrm{dist}(T,\boldsymbol{P})$ である。)，$\boldsymbol{H}$は$B=\mathrm{Re}\,T$又は$B\pm(\|C\|^2-C^2)^{1/2}$等で与えられる。$\boldsymbol{C}$のときは，後で一般化して扱うことにする。

ところで，$\boldsymbol{N}$の場合は，$\mathrm{dist}(T,\boldsymbol{N})$ を論ずるのは難しい。その一つの理由として，$\boldsymbol{N}$は$\boldsymbol{B}$でclosed, non-dense であるが，convexでないので，通常の近似論が使えない。又，任意の可分なバナッハ空間があるヒルベルト空間上の$\boldsymbol{N}$の中に等距離同型に埋めこめるので，この意味において$\boldsymbol{N}$が広すぎるのである。そこで，特殊な性質をもつ作用素について考えてみたい。

2. $\mathrm{dist}(T,\boldsymbol{S})=\|T\|$ なるとき，即ち，0をbest approximant としてもつ場合を考える。$\boldsymbol{S}$が$\boldsymbol{C}$のときは，Coburn [5]によって，Tは extremely non-compact (anti compact) と呼ばれ，Toeplitz 作用素がこれに当る。$\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{H}$のときはそれぞれ，[1]と[5]により，スペクトル$\sigma(T)$ を使って特性化されている。例えば，$\boldsymbol{H}$のときは，0をbest approximant としてもつ必要十分条件は $i\|T\|$，又は$-i\|T\|$が$\sigma(T)$ に入る，ということが分っている。

定 義 Tが$\mathrm{dist}(T,\boldsymbol{N})=\|T\|$ をみたすとき作用素Tを***anti-normal*** と呼ぶ。これは，$\|T-\alpha N\|\geqq\|T\|$ (α：スカラー，$N\in\boldsymbol{N}$)の意味で，$\boldsymbol{N}$に直交している作用素とみなされる。

まず，anti-normal 作用素がどの位の class になっているかをみる。$\ker T=\{x\ ;\ Tx=0,\ x\in H\}$として，$\dim\ker T$を$\ker T$ の次元とする。このとき，$\mathrm{ind}\,T$を

$$\mathrm{ind}\,T=\dim\ker T-\dim\ker T^*,$$

(ただし，$\dim\ker T=\dim\ker T^*=\infty$のときは0とみなす。)で定義すれば，

補題 1. Tが$\mathrm{ind}\,T=0$を満すとき，$T=U|T|$と分解できる。ここで，Uはユニタリー作用素で，$|T|=(T^*T)^{1/2}$である。

証 明 Tの極分解を$T=V|T|$とする。このときV

*茨城大学工学部応用数学科(日立市中成沢町)

は，T^* の値域 $R(T^*)$ の閉包 $\overline{R(T^*)}$ から $\overline{R(T)}$ への部分等距離作用素である。今，$\dim \ker T = \dim \ker T^*$ なので，$\ker T$ から $\ker T^*$ への部分等距離作用素を V_1 としておけば，$U = V + V_1$ が求めるユニタリー作用素であることは容易に分る。

定理 1. T が $\operatorname{ind} T = 0$ を満せば，$\operatorname{dist}(T, N) \leqq \frac{1}{2}\|T\|$ となり，その結果 T は not-anti normal である。

証明 補題を使えば，$T = U|T|$（U はユニタリー作用素）と分解される。従って，

$$\|T - \tfrac{1}{2}\|T\| U\| = \|U(|T| - \tfrac{1}{2}\|T\|)\|$$
$$= \| |T| - \tfrac{1}{2}\|T\| \| \leqq \tfrac{1}{2}\|T\|$$

で結論を得る。

この定理の系として，

系 1. T がコンパクト作用素であれば，$\operatorname{dist}(T, N) \leqq \frac{1}{2}\|T\|$ で not-anti normal である。

証明 定義より，任意の複素数 λ に対して，$\operatorname{dist}(T, N) = \operatorname{dist}(T+\lambda, N)$ は明らか。そこで，$\lambda \neq 0$ とすれば，〔6 ; Lemma 5.20〕より，$\operatorname{ind}(T+\lambda) = \operatorname{ind}\lambda = 0$ となる。従って定理 1 より，$\operatorname{dist}(T, N) \leqq \frac{1}{2}\|T+\lambda\|$ を得る。$|\lambda|$ を十分小さくとれば，$\operatorname{dist}(T, N) \leqq \frac{1}{2}\|T\|$ となる。

系 2. T を anti-normal な作用素とすれば $\sigma(T) = \{\lambda\ ;\ |\lambda| \leqq \|T\|\}$ となる。

証明 もし，$\lambda \notin \sigma(T)$ で，$|\lambda| < \|T\|$ とすれば，

$$\|T\| = \operatorname{dist}(T, N) = \operatorname{dist}(T-\lambda, N)$$
$$\leqq \tfrac{1}{2}\|T - \lambda\|$$

を満すので，$\|T\| \leqq |\lambda|$ となり仮定に矛盾する。

註 1. 有限なフォン・ノイマン代数（von Neumann algebra）では全ての作用素が anti-normal となる。これは有限なフォン・ノイマン代数において，可逆な元の全体が norm-dense である（[2]）ことから分る。

3. U をユニタリー作用素の全体とするとき，Holmes [10] は anti-normal である十分条件を与えた。

定理 2.（Holmes） もし，T が $\operatorname{dist}(T, U) = 1 + \|T\|$ を満足すれば $\operatorname{dist}(T, N) = \|T\|$ となる。

これらの条件を満す典型的な例として，weight 1 の unilateral shift が知られている。T がユニタリーでない等距離作用素でよいことも簡単に計算できる。一方，〔9〕で部分等距離作用素 T に対して，$0 \leqq \operatorname{dist}(T, N) \leqq \frac{1}{2}$ か，$\operatorname{dist}(T, N) = 1$ のどちらかであることが示されているので，Holmes は，次の予想と問題を与えた。

(I) 予　想：正規でない subnormal な部分等距離作用素 T は $\operatorname{dist}(T, U) = 1 + \|T\|$ を満し，その結果 T は anti-normal である。

(II) 問　題：ノルム 1 の anti-normal 作用素は部分等距離作用素か？

そこで，この予想と問題について考える。これに関連して，最近 Rogers [14] は $\operatorname{dist}(T, U)$ を完全に決定した。

定理 3.（Rogers）

(1) $\operatorname{ind} T = 0$ のときは，

$$\operatorname{dist}(T, U) = \max\{\|T\| - 1,\ 1 - m(T)\}$$

ただし，$m(T) = \inf\{\|Tx\|\ ;\ \|x\| = 1,\ x \in H\}$，

(2) $\operatorname{ind} T < 0$ のときは，

$$\operatorname{dist}(T, U) = \max\{\|T\| - 1,\ 1 + m_e(T)\}$$

ただし，$m_e(T) = \inf\{\lambda\ ;\ \lambda \in \sigma_e(|T|)\}$ で $\sigma_e(\cdot)$ は Calkin algebra B/C でのスペクトルを表わす。

$\operatorname{ind} T > 0$ のときは T^* で考える。

今，$\operatorname{dist}(T, U) = 1 + \|T\|$ とすれば，定理 3(2) より $\|T\| = m_e(T)$ となり，その結果 $\|T\| = \| |T| \| = m_e(T) \geqq \| |\hat{T}| \|$（$\hat{T}$ は Calkin image である）で $|\hat{T}| = m_e(T)$ が分る。

従って，問題については，$T = S \oplus \alpha$（$0 < \alpha < 1$）で，S を H 上の等距離作用素，α を有限次元で作用するようにとれば，$\|T\| = \|\hat{T}\| = 1 = m_e(T)$ となる。しかも，T は anti-normal であるが，部分等距離作用素でない。

予想に関しては，T が正規でない subnormal な部分等距離作用素とすれば，$T = V \oplus 0$（V はユニタリーでない等距離作用素である。）と直和に書けることが必要十分条件であることがよく知られている。そこで，$H \oplus H$ 上で，V を weights が全て 1 の unilateral shift とし，$T = V \oplus 0$ とすれば $\operatorname{ind} T = 0$ となる。そこで定理 1 より T は not-anti normal となる。以上により，予想，問題は否定的であることが分った。

4. ここでは，B の代りに Calkin algebra B/C で考える。$\tilde{N}$ を B/C の正規な元の全体で表わせば，

定理 4. T の $\operatorname{ind} T$ が有限であれば $\operatorname{dist}(\hat{T}, \tilde{N}) \leqq \frac{1}{2}\|\hat{T}\|$ を満足する。

証明 $T = W|T|$ を W が極大部分等距離作用素まで拡張した分解とする。このとき，$\operatorname{ind} T$ が有限で $\operatorname{ind} T$

$= \mathrm{ind}W$なのでWは$\boldsymbol{B}/\boldsymbol{C}$のユニタリーな元である。従って，$\| \hat{T} - \frac{1}{2}\hat{\dot{W}} \|\hat{T}\| \| \leqq \frac{1}{2} \|\hat{T}\|$を満す。

定理5. $T \in \boldsymbol{B}$で$\mathrm{dist}(\hat{T}, \widetilde{\boldsymbol{U}}) = 1 + \|\hat{T}\|$のとき$\mathrm{dist}(\hat{T}, \widetilde{\boldsymbol{N}}) = \|\hat{T}\|$が成立する。

証　明　もし，$\| \hat{T} - \widetilde{N} \| \lneqq \|\hat{T}\|$なる正規な元$\widetilde{N}$が存在すると仮定する。$\widetilde{N} = \frac{1}{2}\|\widetilde{N}\| (\widetilde{U} + \widetilde{V})$で$\widetilde{U}$と$\widetilde{V}$は可換なユニタリー元，と$\widetilde{N}$は書けるので，仮定より，

$$
\begin{aligned}
\| \hat{T} - \|\widetilde{N}\| \widetilde{U} \| &\leqq \| \hat{T} - \tfrac{1}{2}\|\widetilde{N}\| (\widetilde{U} + \widetilde{V}) \| \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\|\widetilde{N}\| \|\widetilde{V}\| + \tfrac{1}{2}\|\widetilde{N}\| \|\widetilde{U}\| \\
&\lneqq \|\hat{T}\| + \|\widetilde{N}\|
\end{aligned}
$$

となる。そこで$\|\widetilde{N}\| \leqq 1$のとき，

$$
\begin{aligned}
\| \hat{T} - \widetilde{U} \| &\leqq \| \hat{T} - \|\widetilde{N}\| \widetilde{U} \| + \| \|\widetilde{N}\| \widetilde{U} - \widetilde{U} \| \\
&< \|\hat{T}\| + \|\widetilde{N}\| + 1 - \|\widetilde{N}\| = 1 + \|T\|
\end{aligned}
$$

となり矛盾する。$\|\widetilde{N}\| \geqq 1$のとき，

$$
\begin{aligned}
\| \hat{T} - \widetilde{U} \| &\leqq \| \frac{\hat{T}}{\|\widetilde{N}\|} - \widetilde{U} \| + \| \hat{T} - \frac{\hat{T}}{\|\widetilde{N}\|} \| \\
&\lneqq \frac{\|\hat{T}\| + \|\widetilde{N}\|}{\|\widetilde{N}\|} + \frac{\|\hat{T}\| (\|\widetilde{N}\| - 1)}{\|\widetilde{N}\|} \\
&= 1 + \|T\|
\end{aligned}
$$

でやはり$\mathrm{dist}(\hat{T}, \widetilde{\boldsymbol{U}}) = 1 + \|\hat{T}\|$に矛盾する。

Calkin algebra $\boldsymbol{B}/\boldsymbol{C}$では$\widetilde{\boldsymbol{U}}$はproximinalであることがRogers [14]によって証明されているが$\widetilde{\boldsymbol{N}}$がproximinalかどうか未解決である。

5.　$\boldsymbol{C}$が$\boldsymbol{B}$でproximinalであることはフオン・ノイマン代数へ拡張される。

補題2.（Zsido）　$\boldsymbol{A}$をフオン・ノイマン代数とし，$\boldsymbol{I}$をnorm closedな両側イデアルとする。このとき任意のエルミット（正値）作用素$A \in \boldsymbol{A}$に対して，次の(i)，(ii)を満足する作用素$K \in \boldsymbol{I}$が存在する。

(i)　$A + K$はエルミット（正値）である。

(ii)　$\sigma(A + K) = \sigma(\pi(A))$，ただし，$\pi$は$\boldsymbol{A}$から$\boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}$への自然な準同型写像である。

定理6.　フオン・ノイマン代数$\boldsymbol{A}$において任意のnorm closedな両側イデアルはproximinalである。

証　明　$\boldsymbol{A}$の元Aを極分解して$A = U|A|$とする。そこで$|A|$に対して補題2のKをとる。このとき

$$
\begin{aligned}
\| U|A| + UK \| &\leqq \| |A| + K \| = \sup\{ |\lambda| ; \\
&\qquad\qquad \lambda \in \sigma(|A| + K) \} \\
&= \sup\{ |\lambda| ; \lambda \in \sigma(\pi(|A|)) \} \\
&= \| \pi(|A|) \| = \| \pi(A) \|
\end{aligned}
$$

となる。一般に$\|A\| \geqq \|\pi(A)\|$なので，$\|U|A| + UK\| = \|\pi(A)\|$を得る。即ち，$-UK$がbest approximantになっている。

尚，任意のエルミット$A \in \boldsymbol{A}$と多項式pに対して，$\| \mathrm{p}(A + K) \| = \| \pi(\mathrm{p}(A)) \|$なる$K \in \boldsymbol{I}$が存在することが分る。$\boldsymbol{B}$では，$\mathrm{p}(t) = t + \lambda$と任意の$T \in \boldsymbol{B}$に対して成立する。[3]

6.　最後に，近似を作用素ノルムで考えてきたが，他のノルムで近似することも興味ある。ここでは，$\boldsymbol{H}$の場合に数値域半径$w(T)$による近似を考える。即ち，$w(T) = \sup\{ |(Tx \cdot x)| ; \|x\| = 1,\ x \in \boldsymbol{H} \}$として，

$$
\mathrm{dist}(T, \boldsymbol{H}) = \inf\{ w(T - H) ; H \in \boldsymbol{H} \}
$$

を扱うことにする。

補題3.　$T = A + \mathrm{i}B$をTのデカルト分解とするとき，

$$
w(A^2 + B^2) \geqq w(A + \mathrm{i}B) \geqq w(A),\ w(B)
$$

が成立する。

証　明

$$
\begin{aligned}
|((A + \mathrm{i}B)x, x)|^2 &= (Ax \cdot x)^2 + (Bx \cdot x)^2 \\
&\geqq (Ax \cdot x)^2,\ (Bx \cdot x)^2
\end{aligned}
$$

より右辺が出てくる。左辺の不等式は，$(Ax \cdot x)^2 \leqq (A^2 x \cdot x)$が$\|x\| = 1$で$A$がエルミットであれば一般に成立するので，これより容易に分る。

定理7.　$T = A + \mathrm{i}B$をデカルト分解とすれば，$\mathrm{dist}(T, \boldsymbol{H}) = w(B)$（$= \|B\|$）となり，$A$が1つのbest approximantとなる。

証　明　補題より，$H \in \boldsymbol{H}$のとき，

$$
w(T - H) = w(A - H - \mathrm{i}B) \geqq w(B)
$$

を得る。一方，$H = A$とすれば，$w(T - A) = w(B)$なので，$\mathrm{dist}(T, \boldsymbol{H}) = w(B)$が分る。

定理8.　$T = A + \mathrm{i}B$をデカルト分解とすれば，$A \pm (\|B\|^2 - B^2)^{1/2}$もbest approximantになっている。

証　明　$w((A \pm (\|B\|^2 - B^2)^{1/2}) - (A + \mathrm{i}B)) = w(B)$を示す。

$$
\begin{aligned}
w(A \pm (\|B\|^2 - B^2)^{1/2} - (A + \mathrm{i}B))^2 \\
&= w(\pm(\|B\|^2 - B^2)^{1/2} - \mathrm{i}B)^2 \\
&= \| \pm (\|B\|^2 - B^2)^{1/2} - \mathrm{i}B \|^2 \\
&= \| \|B\|^2 - B^2 + B^2 \| \\
&= \|B\|^2 = w(B)^2
\end{aligned}
$$

が，$(\|B\|^2 - B^2)^{1/2} - \mathrm{i}B$が正規作用素であることより分る。

参　考　文　献

[1]　T. Ando, T. Sekiguchi and T. Suzuki, Approximation by positive operators, Math. Z., 131

(1973) 273-282.

[2] H. Choda, An extremal property of the polar decomposition in von Neumann algebras, Proc. Japan Acad., 46 (1970) 341-344.

[3] Q. K. Chui, P.W. Smith, R. R. Smith and J.D. Ward, L-ideals and numerical range preservation, Ill. J. Math., 83 (1977) 365-373.

[4] ——, ——, and J. D. Ward, Approximation with restricted spectra, Math. Z., 144 (1975) 289-297.

[5] L. Coburn, Weyl's theorem for non-normal operators, Mich. Math. J., 13 (1966) 285-288.

[6] R. G. Douglas, Banach Algebra Techniques in Operator Theory, Academic Press, New York, 1972.

[7] K. Fan and J. Hoffman, Some metric inequalities in the space of matrices, Proc. A.M. S., 6 (1955) 111-116.

[8] P. R. Halmos, Positive approximant of operators, Indiana Univ. Math. J., 21 (1972) 951-961.

[9] ———— and J. McLaughlin, Partial isometries, Pacific J. Math., 13 (1963) 585-596.

[10] R. B. Holmes, Best approximation by normal operators, J. of Approximation Theory, 12 (1974) 255-263.

[11] ———— and B. R. Kripke, Best approximation by compact operators, Indiana Univ. Math. J., 21 (1971) 255-263.

[12] C. L. Olsen and J. K. Plastiras, Quasialgebraic operators, compact perturbations and essential norm, Mich. Math. J., 21 (1974) 385-397.

[13] D. D. Rogers, On proximinal sets of normal operators, Proc. A.M.S., 61 (1976) 44-48.

[14] ————, Approximation by unitary and essentially unitary operators, to appear in Acta Sci. Math.

[15] L. Zsido, The Weyl-von Neumann theorem in Semifinite factors, J. of Functional Analysis, 18 (1975) 60-72.