複雑な磁気回路をもつコイルのインダクタンスの計算

綿引　猛*，岡崎英次**，本多誠一*

（昭和50年9月8日受理）

Calculated Coils Inductance Value contains complicated Magnetic Circuit

TAKESHI WATAHIKI, EIJI OKAZAKI and SEIICHI HONDA

Abstract: —In this paper, we tried to calculation coils inductance value by use of finite difference equation.

This coil contains complicated magnetic circuit and leakage flux.

Calculated results agree conparatively well with the experimental values.

1. まえがき

コイルのインダクタンスの値を計算するには，このコイルに単位電流を加えたときの鎖交磁束数を求めればよい。磁気回路が簡単で洩れ磁束がない場合は，平均磁路長の考え方から鎖交磁束数を求めることができる。しかし磁気回路が複雑で洩れ磁束のある場合はこの方法では求めることができない。最近は複雑な磁気回路解析に差分方程式がしばしば応用される。[1] 筆者らは Fig.1 に示す「内部ヨークにより励振する磁歪振動子[2]」について励振コイルに加えられた周波数50kHzの交番電流による振動子内の磁束分布を差分方程式を解くことによって求め，これよりコイルの端子からみたインダクタンスの大きさを計算したところ実験値に似た値が得られたので以下に報告する。

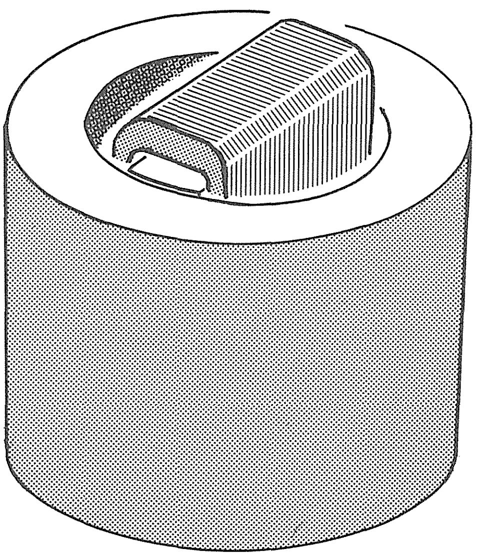


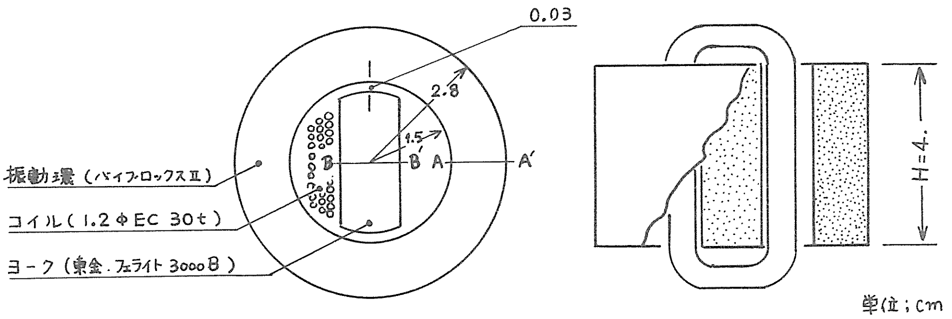
Fig. 1　Magnetostriction vibrator

2. 解析方法

Fig.1 に示す振動子は，あらかじめ環部に偏倚磁化を与えておき，励振コイル（巻数30回）に交番電流を加えて磁歪振動子を励振し，水中に超音波を放射するためのものである。同図に示すものは偏倚磁化を与えるために，励振コイルの交番電流に重ねて直流を加える。励振コイルに加えた交番電流による交番磁化の分布は変分導磁率により決定され，この変分導磁率は直流による磁化によってきまる。したがって加えた交番電流の周波数におけ

* 茨城大学工学部電子工学科（日立市中成沢町）

** 茨城大学工業短期大学部電子工学科（日立市中成沢町）



(A)　　　　　　　(B)

Fig. 2　Magnetostriction vibrator

る振動子の励振コイルの端子からみたインダクタンスを計算するには，直流による磁束分布を知る必要がある。本稿では環とヨークには夫々Fig. 2のＡＡ′またはＢＢ′の位置の磁束が一様に与えられているものと仮定する。

強磁性体は磁気履歴の現象があるため，同じ偏倚磁化の値でも磁性体の前歴により観測されるインダクタンスの値は一定にならない。本稿では偏倚磁化はすべて磁化曲線上にあるものとする。すなわち振動子を完全に消磁の状態とした後所定の直流を加えて偏倚磁化を与える。

これに重ねて加える交番磁化は偏倚磁化にくらべて十分小さく，交番電流に対する交番磁化が線形であると考えられる程度の大きさであるとする。

よく知られているように，考えている場のベクトルポテンシャルをＡ，電流密度をＪ，導磁率を μ とすれば方程式

$$\mathrm{rot}\ \frac{1}{\mu}\ \mathrm{rot}\ A = 4\pi J \tag{1}$$

が成り立つ。二次元解析であればＡおよびＪは軸方向成分のみであるので，これをＡ，Ｊで表わす。また導磁率 μ のかわりにレラクテビテー $\nu=\frac{1}{\mu}$ を用い円壔座標で(1)式を表わせば

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\nu r\frac{\partial A}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\nu}{r}\frac{\partial A}{\partial \theta}\right)=4\pi J \tag{2}$$

となる。

Ａの分布がわかれば磁束密度Ｂは

$$B = \mathrm{rot}\ A \tag{3}$$

より求めることができる。(2)(3)式を差分方程式に変換するにはいま考えている場を多数の放射線状の線と円で作られる格子点で分割する。

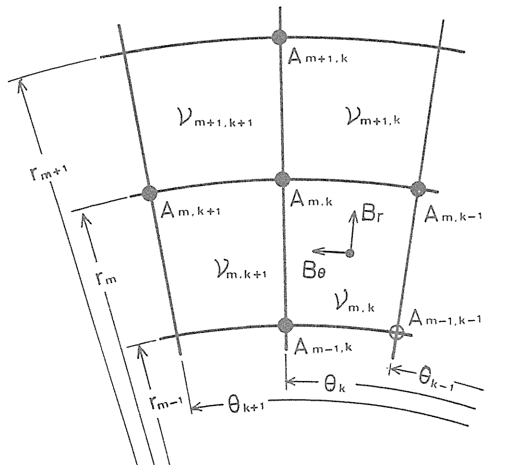


Fig. 3　Mesh point for calculation

この一部分を示すFig. 3においてm，k点のベクトルポテンシャルの値 A_{mk} を周囲のベクトルポテンシャルの値を用いて表わせば

$$A_{m,k}=\frac{4\pi j+\alpha_1 A_{m,k-1}+\alpha_2 A_{m+1,k}+\alpha_3 A_{m,k+1}+\alpha_4 A_{m-1,k}}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4} \tag{4}$$

となる。ただし前式で

$$\alpha_1=\frac{2\left\{(r_{m+1}-r_m)\nu_{m+1,k}+(r_m-r_{m-1})\nu_{m,k}\right.}{r_m{}^2(\theta_{k+1}-\theta_{k-1})(\theta_k-\theta_{k-1})(r_{m+1}-r_{m-1})}$$

$$\alpha_2=\frac{\left\{(\theta_{k+1}-\theta_k)\nu_{m+1,k+1}+(\theta_k-\theta_{k-1})\nu_{m+1,k}\right\}(r_{m+1}+r_m)}{r_m(r_{m+1}-r_{m-1})(r_{m+1}-r_m)(\theta_{k+1}-\theta_{k-1})}$$

$$\alpha_3=\frac{2\left\{(r_{m+1}-r_m)\nu_{m+1,k+1}+(r_m-r_{m-1})\nu_{m,k+1}\right\}}{r_m{}^2(\theta_{k+1}-\theta_{k-1})(\theta_{k+1}-\theta_k)(r_{m+1}-r_{m-1})}$$

$$\alpha_4=\frac{\left\{(\theta_{k+1}-\theta_k)\nu_{m,k+1}+(\theta_k-\theta_{k-1})\nu_{m,k}\right\}(r_m+r_{m-1})}{r_m(r_{m+1}-r_{m-1})(r_m-r_{m-1})(\theta_{k+1}-\theta_{k-1})}$$

である。全ての格子で同様の式が成り立つから(4)式は格子点の数だけ得られる。これらの式に境界条件を入れて解けば考えている場のベクトルポテンシャルの分布が求まる。

つぎに r 方向の磁束密度 B_r と θ 方向の磁束密度 B_θ は

$$B_r=\frac{A_{m,k}+A_{m-1,k}-A_{m,k-1}-A_{m-1,k-1}}{(r_m+r_{m-1})(\theta_k-\theta_{k-1})} \tag{5}$$

$$B_\theta=-\frac{A_{m,k}+A_{m,k-1}-A_{m-1,k}-A_{m-1,k-1}}{2(r_m-r_{m-1})} \tag{6}$$

となる。

計算を行なう際，Fig. 2の振動子を極座標で計算し易い形に近似し，またこれを分割して格子点をきめなければならない。

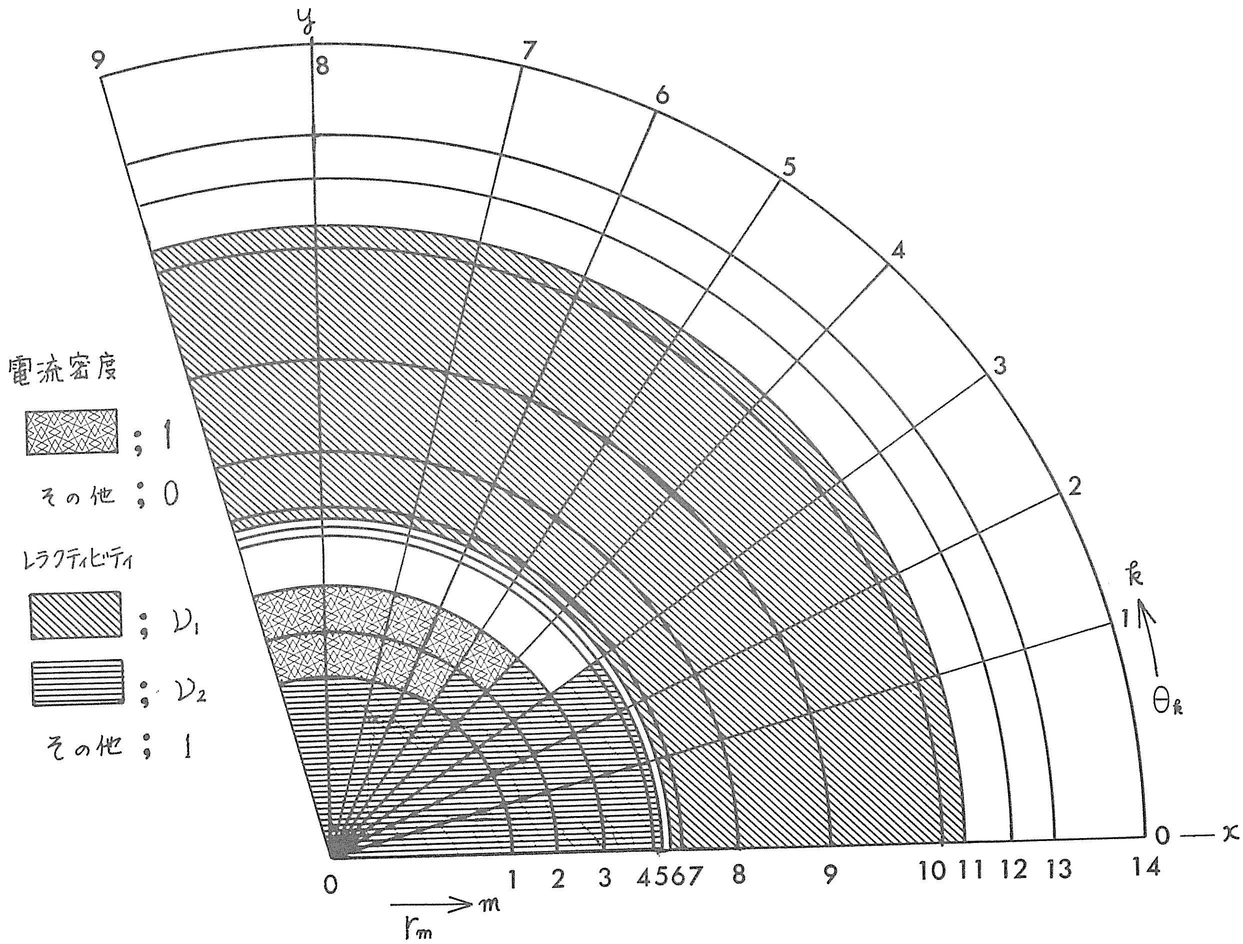
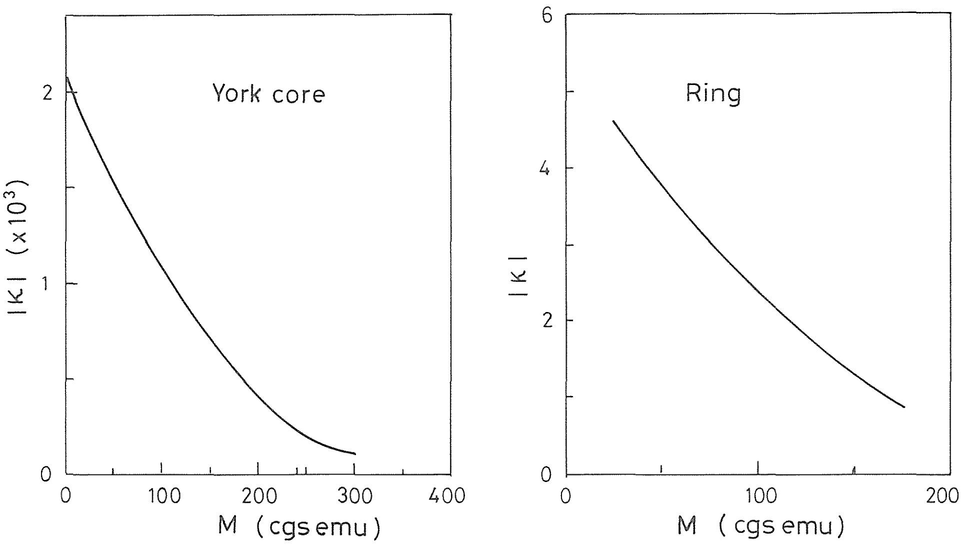


Fig. 4　Mesh point for caluculation



(A)　　(B)

Fig. 5　Magnetic susceptibility

Fig. 4 に形の近似と分割を示す。同図で r_1, r_2, r_3… r_{13}, r_{14}は夫々0.8, 1.0, 1.2, 1.42, 1.47, 1.50, 1.55, 1.80, 2.20, 2.70, 2.80, 2.90, 3.20, 3.60 *cm*, θ_1, θ_2, θ_3…… θ_9は夫々15°, 25°, 35°, 45°, 55°, 65°, 75°, 90°, 115° である。

環部の偏倚磁化M_Rに対する複素磁化率の大きさをκ_1とすれば，変分導磁率の大きさは$1+4\pi\kappa_1$となる。したがってレラクテビテー$\nu_1 = \dfrac{1}{1+4\pi\kappa_1}$ となる。同様にヨーク部の複素磁化率の大きさをκ_2とすれば ヨーク部のレラクテビテー $\nu_2 = \dfrac{1}{1+4\pi\kappa_2}$ となる。

計算例として環の偏倖磁化M_Rが 100cgs emuである場合を述べる。

環の磁性材料の偏倖磁化M_Rと，50kHzにおける複素磁化率の大きさκ_1との関係を示すFig. 5より$\kappa_1 = 2.5$となるので，レラクテビテー$\nu_1 = 0.03$となる。

ヨーク部の偏倚磁化M_rは，磁束漏洩が少ないとして

$$M_y \fallingdotseq \frac{2\,M_R \times \text{環の断面積}}{\text{ヨークの断面積}} = 220 \quad \text{cgs emu}$$

となる。ヨークの材料の磁化率の大きさは図5より$|\kappa_2| = 100$であるから，レラクテビリテー$\nu_2 \fallingdotseq 0.003$となる。

電流領域の電流密度は 1 として計算をおこなう。

境界条件としては, Fig. 4 の x 軸上および r_{14} 上の各点の各点のベクトルポテンシャルの大きさを零，また図形は y 軸を対称軸とする。

使用したプログラムのフローチャートをFig. 6 に示す。

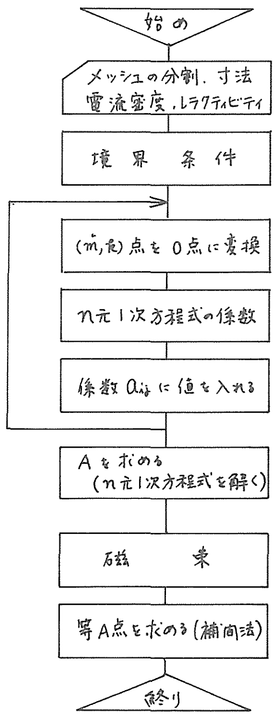


Fig. 6　Flow chart

3. 計算結果および実験値との比較

環の偏倚磁化M_Rが100cgs emuのときのベクトルポテンシャルの計算結果より，補間法を用いて等ベクトルポテンシャル線を画けば，Fig. 7のようになる。また環部の磁束密度分布を求めればFig. 8のようになる。使用した計算機はHITAC 8350である。

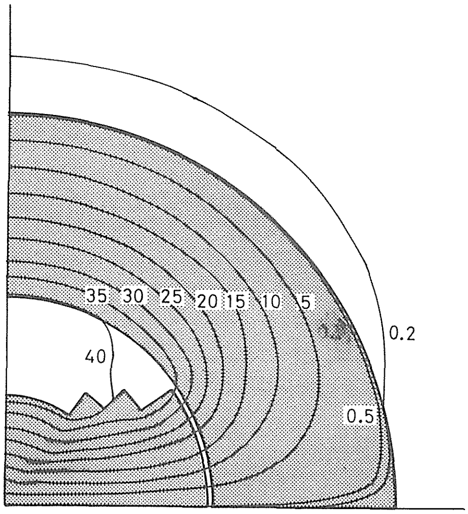


Fig. 7　Vector potential distribution

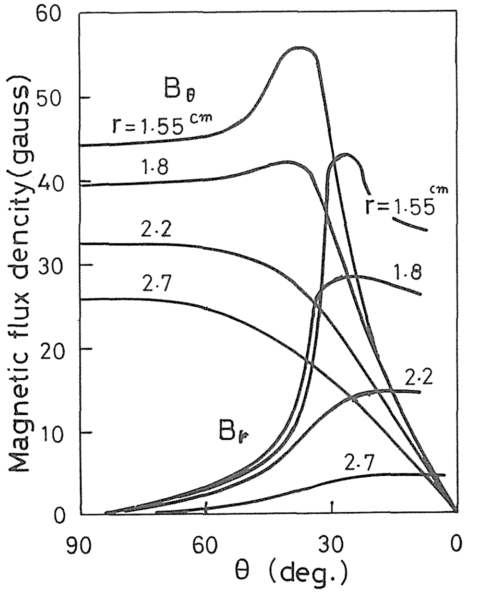


Fig. 8　Magnetic flux dencity (Iac = 175mA)

すでに述べたように，これらは電流領域の電流密度が単位の大きさである場合の計算値であるが，実際の振動子ではこの部分に紙面と垂直方向に15本の同一電流の線が分布しているので，この線の密度が電流領域内一定で，交番電流とベクトルポテンシャルの値が線形であるとすれば，Fig. 8の数値は励振コイルにI_{DC} = 175mA の電流を加えたときの値(cgs emu)となる。

つぎにFig. 4の電流領域の励振コイルの線密度をn_0とし，この巻線に加える交番電流を単位(I_{DC} = 1アブアンペア = 10A)としたときのベクトルポテンシャル分布を$A(r, \theta)$とすれば，(Fig. 7の数値を57倍すればよい)振動子の励振コイルよりみたインダクタンスは

$$L = 2n_0 H \int_{S_I} A(r, \theta)\, dS_I \tag{6}$$

より求めることができる。上式でS_Iは電流領域の面積，Hは振動子の厚さである。

環部の偏倚磁化M_Rの種々な値に対して求めたインダクタンスの値をFig. 9の計算値Ⅰに示す。なお積分は図式的に行なっている。

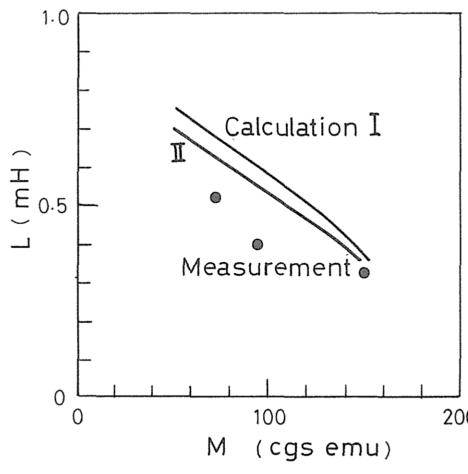


Fig. 9　Inductance (calculation and measurement)

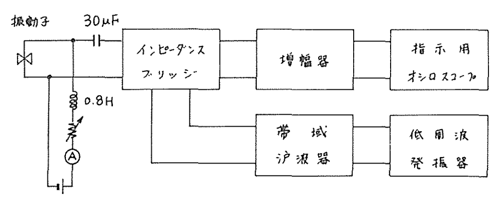


Fig. 10　Impedance measurement circuit

一方50kHzにおけるインピーダンスをFig.10の回路により測定し，これより求めたインダクタンスの大きさはFig.9のプロットのようになる。

4. 検 討

Fig.9をみれば計算値は実験値に似た値となっている。しかしどの偏倚磁化の場合も計算値の方が実験値より大きい。これは磁束分布が正しく計算できなかったためである。以下にその原因を検討してみる。

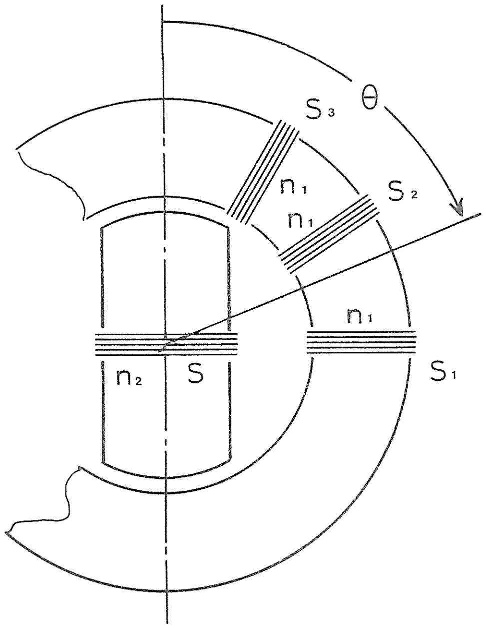


Fig. 11 Search coil

まず環部およびヨーク部は夫々一様の変分導磁率と仮定してあるが，実際は場所によって多少異なるはずである。変分導磁率大きさは直流による磁束分布できまる。そこでFig.11のように S, S_1, S_2, S_3 の位置にサーチコイルをほどこし (巻数 $n_1 = n_2 = 10$ 回) 励振コイルに加えた直流による起磁力アンペアターンとサーチコイルの位置の磁束の関係を磁束計を用いて測定してみた。結果をFig.12に示す。

この図をみれば，測定した範囲では環の大部分に平等な磁束があり，この二倍がヨークの中央にあることから，ヨークと環の接する部分付近を除いては環またはヨークに夫々ほぼ一様の磁束があると考えてよいであろう。したがって変分磁束率の値が仮定と異なるのは振動子のご

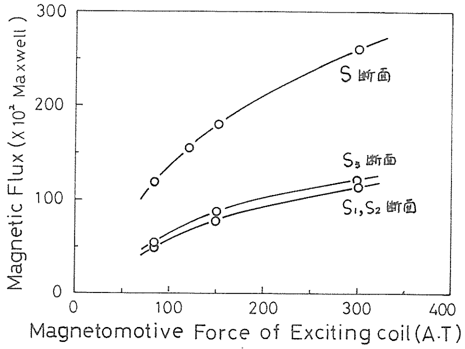


Fig. 12 Magnetic flux distribution

く僅かの部分であり，これがインダクタンス計算結果に大きい誤差とはならないものと考える。(直流による磁束は殆んど漏洩がないのに，交番電流による磁束に漏洩が多いのは，変分導磁率が普通導磁率に比べて小さいためである。)

つぎに環の偏倚磁化 $M_R = 100$ cgs emu の場合について環の交番磁束分布の計算値と実験値を比較してみる。

励振コイルに偏倚磁化のための直流として $I_{DC} = 4.9$ Aを加えれば 100 cgs emuの M_R が得られる。この電流に重ねて $f = 50$ kHz の微少電圧 e_0 を加える。サーチコイルの位置の磁束 φ はサーチコイルの誘起電圧 e，巻数を n とすれば

$$e = \frac{\varphi}{2\pi f n} \tag{7}$$

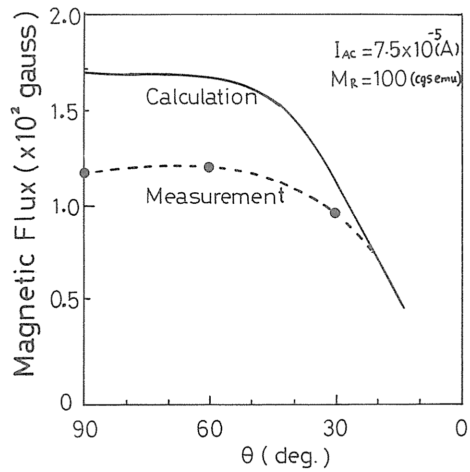


Fig. 13 Magnetic flux distribution

となるから，eを測定することよりφを求めることができる。

e＝10mv　n＝10回の実測結果をFig.13に示す。同図の横軸のθはFig.11に示すようにとってある。M_R＝100 cgs emuのときの50kHzにおけるインピーダンスの大きさの実測値は132Ωであるので，励振コイルには$I_{AC}=7.5\times10^{-5}$Aの交番電流を加えたことになる。

一方Fig.7より図式的に磁束分布を求めて，励振コイルに7.5×10^{-5}Aの交番電流を加えた場合に換算すればFig.13の実線のようになる。同図に示されてあるように，計算値は実験値より大きい。一方Fig.11のSの位置での交番電流による磁束の計算値と実験値を比較すれば，ほぼ同じ値が得られる。したがってこれらの検討から，計算で求めることのできない磁束の漏洩があることが考えられる。小さいサーチコイルを用いてその場所をさがした結果，Fig.14に示すような漏洩磁束を観測できた。したがってさらに厳密な計算結果が要求される場合は三次元解析をせねばならない。

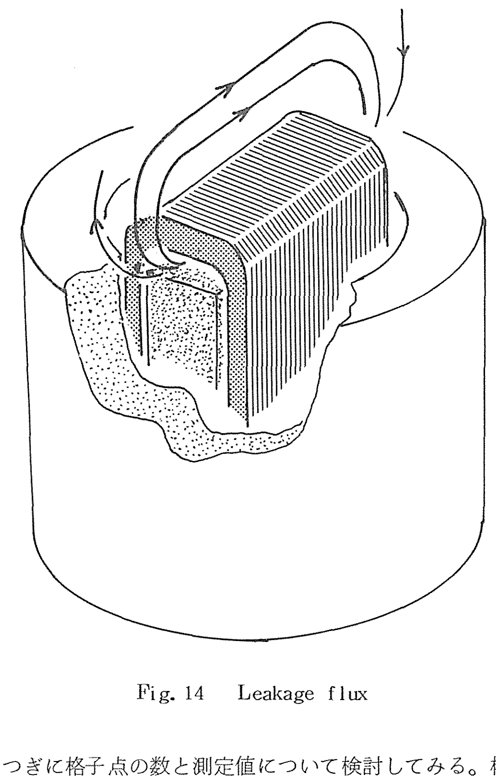


Fig. 14　Leakage flux

つぎに格子点の数と測定値について検討してみる。格子点の数を増せばより正しい分布が求まるわけであるが，使用した計算機の容量の関係で格子点を増すことは困難なこともあるためこゝでは格子点の数を減らして同じ計算をしてみた。

Fig.4で$r_1=0.8$，$r_2=1.0$，$r_3=1.2$，$r_4=1.45$　$r_5=1.50$，$r_9=2.20$，$r_{11}=2.80$，$r_{14}=3.40$ *cm*としてr_5，r_7，r_8，r_{10}，r_{11}を取り去り格子点の数を約1／2にしたものについてすでにのべた方法でインダクタンスを求めればFig.9の計算値Ⅱのようになる。この結果をみれば，格子点の数を約1／2にしても計算値に大きい変化がないばかりか，逆に測定値に近い結果となっている。これは誤差の相殺によるものと考えるが，格子点の数を約1／2にしても結果に大きい差が認められないことから，格子点がもとのまゝの数の場合はさらに複雑な形状でも計算できるものと考える。

5. あとがき

複雑な磁気回路をもつコイルのインダクタンスを，差分方程式を用いて求めてみた。

二次元近似のため，計算値は実験値より幾分大きくはなったが，ほゞ似た値が得られた。

格子点の数は，104個の場合と49個の場合で計算結果に大きいちがいが認められなかった。したがって格子点の数が104個の場合，本稿で計算した振動子よりもさらに複雑な磁気回路を有するコイルのインダクタンスを求めることができる期待を有する。

この研究の一部について47年度電子工学科卒業の井上静雄，50年同科卒業の熊野光弘両君の協力を得ているので，感謝の意を表する。

参　考　文　献

1）例えば奥田外　単相交流整電流子機の磁界解析　電気学会誌　Vol.91　No.8　1971年

2）菊地・岡崎，内部ヨークに依り励振する環状磁歪振動子　日本音響学会講演論文集　昭47年5月