種種の形の抵抗板上の電流線と等電位線

荒又光夫，寺門龍一，皆川信也*

Mapping of Current Lines and Equipotential Lines on Resistance Plates with Various Shapes

Mitsuo ARAMATA, Ryûiti TERAKADO
and Shinya MINAKAWA

Abstract:— A study is made on mapping of current lines and equipotential lines between two electrodes attached on the periphery of a resistance plate. These results are very useful to understand any other two-dimensional problems on static fields.

1. はじめに

等角写像の原理に基づき，円，長方形，半平面などの抵抗板のへりに，任意につけられた2電極間の抵抗の計算につき，この集報の前巻に報告した。(1) また，この巻の他のところで，その続きとして，円形の穴のある円抵抗板などにつけた2電極間の抵抗値の計算を述べている。ここでは，それらの場合の2電極間の電流線，等電位線を図式的に描くという問題をとりあげた。その有力な手段である図式変換法は，古くから研究活用されており，その原理も説明されている。(2)(3) この報告は，その原理に基づいて，領域の周辺に電極を置いた場合の代表的な例を，種種のくふうをこらして実際に描いたので，そのかなり系統的な描き方と，結果の図面を示している。

2. 原　　理

前述のように，図式変換法の原理については，文献に記述されているが，以下の説明の基本となるいささか独特な考え方もあるので，簡単に述べる。

Riemann の写像定理“任意の領域を単位円内に等角写像する関数は無限にある”ということを電気的類推であらわすと次のようである。任意の領域および単位円のそれぞれに面抵抗率一様な抵抗板を用い，その両方でそのへり全部とその領域内の任意の1点とを電極として，その間に等しい電流を流し，電流線と等電位線をつくる。これらの曲線群は，

* 水戸工業高校

領域内に曲線直角座標をもちこんだことになり（図1（a），（b）），2つの座標系は図のように対応させることができる。これで2つの領域は等角写像関数（その関数形は多くは容易にあらわせない）で結びつけられたことになる。領域内の1点のとり方は無限にあるから，これだけでも等角写像関数は無限にある。今は問題を解くのに好つごうなものを選ぶことになる。

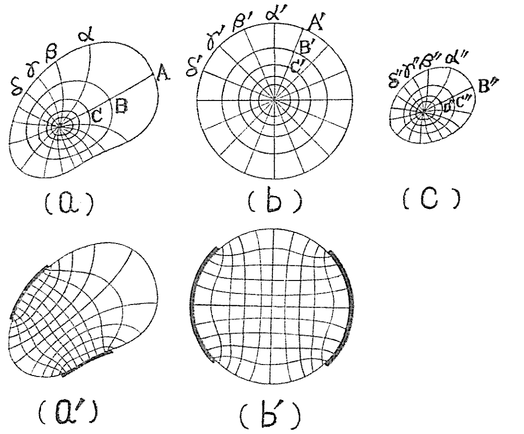


図　　1

今まで用いた電極は座標系を作るための手段にすぎない。そこで問題にもどり，与えられた領域に図（a′）のように2電極をつけたときの電流線，等電位線を描くことになる。まず電極を，さきに設定した座標系の対応をたどって，図（a′）から図（b′）へと写す。円にそのような電極のあるときの電流線，等電位線がわかっていれば，それを座標をたどって，逆に（a′）へ写せば，これが求めるものである。

なお，座標曲線は順にずらせて対応させてもいっこうさしつかえない。たとえば，図で α を γ'，β を δ' というように，あるいは，図（c）のように，図（a）のB曲線以内をとり出して，図（c）の B″, C″, D″ を図（a）の A, B, C, 図（b）の A′, B′, C′ に対応させてよいのである。

この方法は，座標系を前述のような電気的手法で作るなら，どのような場合にも用いられるが，この報告では，2つの領域間の相対応する座標系の図が与えられている基本写像図から出発している。そして得られたいろいろの配置の電極間の電流線，等電位線を，その領域の新しい別の座標系とみなし，その座標系と他の座標系との対応によって，さらに新しい座標系を得るというような方法で，かなり種種の場合の電流線，等電位線が描かれる。

3. 基　本　座　標

原理の項に示したように，領域内の座標が重要な役をするので，以下この研究で用いている基本の座標について述べる。

＜3.1＞　半平面と円とに設定する対応座標

写像関数

$$w=\frac{z-1}{z+1}$$

で2つの無限平面が結びつけられているとき，z 平面の縦横の直線群は，w 平面では，u 軸に中心をおく円群と，$u=1$ 上に中心をおく円群となる。y 軸は w 面では原点を中心とする半径1の円になり，この円の内と外とは z 面の y 軸の右半と左半とになる（図2

(a), (b))。

また，w 面の原点を中心とする同心円群と放射線群を同じ関数で z 面に写像すると，図 (b′) から (a′) への対応が示すように，半径1の円は y 軸に，そして，$x=\pm1$ に正負の電荷をおいたときの等電位線，電気力線と等しい座標が得られる。

以後の説明のため，図2の (b), (a′), (b′) をそれぞれ基本座標図 **A, B, C** と示すことにする。

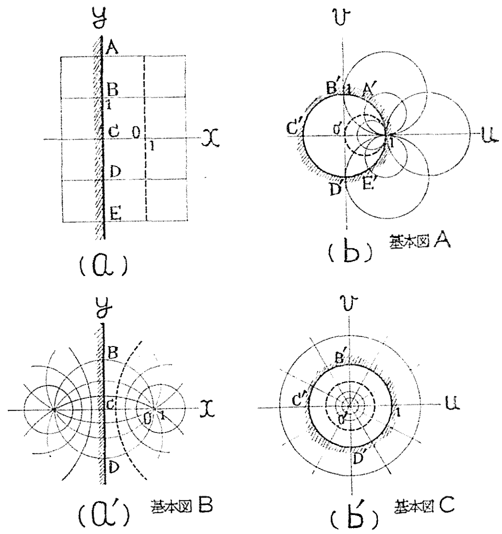


図 2

<3.2> 半平面と長方形とに設定する対応座標

この対応を与える写像関数の1つはよく研究されていて，第1種だ円積分に関するものである。図3 (a) の長方形の内部は (b) の上半面に，長方形の頂点はそれぞれ図のように写される。長方形が与えられると $2K/K'$ が定まり，この値に対して k^2 の値が第1種完全だ円積分表[4]から求まり，$1/k$ が知れて A′, B′, C′, D′ の位置が確定する。次に長方形内部の縦横直線群に対応する半平面の曲線群については，$2K/K'=1, 2, 4$ の場合は池田芳郎博士，宮本慶巳博士によつて計算されており，図(b) (b′) はそれぞれ $2K/K'=1, 2$ の場合を示す。その他の場合はだ円積分の数値計算を行なわねばならない。このとき，長方形の辺 AB, CD の中点を結ぶ線分に対応する半平面の曲線は，ちようど半円になることが証明されている。

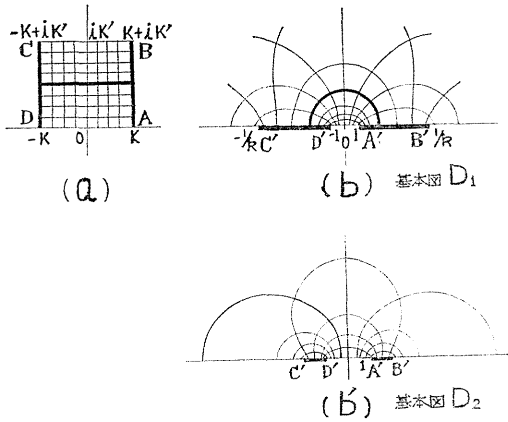


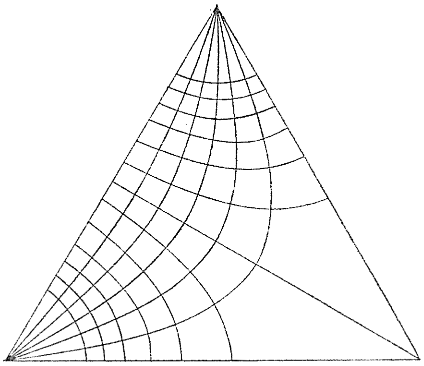
図 3

図3の (b)，(b′) を基本座標図 $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$ で，また図2 (a)，図3(a) のような直交直線群としてあらわされるものを総称して基本座標図 **E** で示す。

<3.3> 正3角形と半平面とに設定する対応座標

図4に示すような正3角形の2頂点間に電流を流すときの電流線，等電位線を座標曲線とするものを基本座標図 **F** とする。これは Schwarz-Christoffel 変換で，写像関数

$$w=\int_0^z \frac{dz}{\sqrt[3]{z^2(1-z^2)^2}}$$



基本図 F

図　　4

によって，正3角形を上半平面に写すとき，図2（b′）の上半分の座標曲線に対応するものである[5]。

4. 描く方法

前述の原理にしたがって，基本座標図から出発して各種の図式変換を行なって種種の場合の電流線，等電位線を描くのであるが，その変換の代表的な手法を中心に描き方を略述する。

＜4.1＞　基本座標図による一般的変換法

基本座標図相互間そのままの変換によって，特に技巧を用いることなく描き得るものも多くある。

円板の周辺に対向等長電極をつけたときの電流線，等電位線は，まずその電極を図2（b）から（a），あるいは（b′）から（a′）への対応によって，半平面のへりの等長2電極に写す。次にこれを図3（b）から（a）に写す方法にしたがって長方形に写すと，その縦横比は定まり，電極は縦の対辺につくことになる。長方形内では，横線が電流線，縦線が等電位線であるから，これを図3のように（a）から（b）へ写像できれば半平面の電流線，等電位線が得られ，これを図2（a）から（b）へ写せば目的が達せられる。このときの抵抗値は，長方形の電流線をそのまま写像してきたので長方形の抵抗値と等しく $2K/K'$ となる。この報告では，$2K/K'=1, 2$ の場合の基本図 $\mathbf{D}_1$，$\mathbf{D}_2$ から出発しているので，描かれた図面はすべて抵抗値1，2のいずれかである。その他の形の長方形内の直交直線に対応する半平面の曲線が電子計算機によってでも計算されれば，この報告で描いたような図面はすべて類似の方法で容易に描くことができる。

付図1は，基本図 $\mathbf{D}_1$ を図2（a）すなわち基本図 **E** に重ね，$\mathbf{D}_1$ の曲線を **E** の座標から図2（b）すなわち基本図 **A** の座標に写したもので，図7の記号 $\mathbf{D}_1$ と記号1を結ぶ矢印線に沿って，E→A とあるのは以上のような手続きを示す記号である。付図2も全く同様な手順で得られ，これで付図1は正方形の縦横直線座標と，付図2は横縦比2の長方形の座標と直接対応がつき，これらは基本座標図とともに重要な座標図となる。また付図36も類似の変換で得られる。

＜4.2＞　ずらして対応させる方法

原理に述べたように，座標曲線の対応を適当にずらすことはいっこうにさしつかえなく，この方法は多くの異なった図面を与える。

付図5，6は基本図 **C** に付図1を重ね，これを **B** 上に写す際に対応をずらしたもので，このほかにもずらした方を変えれば，さまざまな不等長電極配置の図が得られる。同心円の付図23から偏心円25，26，27，28を描くのにも全く同じ方法を用いている。

付図11，12も付図1と正方形との対応を適当にずらしたものである。

付図32は付図1を **A** に多少ずらして重ね，これを **E** に写したものである。

＜4.3＞ 座標線の密度を変える方法

付図３，４は図７によれば，それぞれ付図１，２と同じ変換 E→A によって描かれているが，この場合は **E** すなわち図２（a）の直交直線座標の密度を変えて **D** と重ね **A** 上に写したのである。付図３は付図２の電極のすぐ隣りに相当する位置にそれぞれ２電極がくるように，付図４は２電極がちょうど付図２の電極長だけの間隔をもつように **E** の座標線の密度を選んで変換を行なったものである。これは後述するように，付図23，24を描くために必要なことなのである。

円弧多角形付図16，17，19，20を描くにもこの方法が適用される。図５（a）すなわち基本図 **B** の直交円群座標は，図（c）のような無限円柱表面の直線群と円群とからなる座標に対応させ得ることが直観的にわかる。この円柱を見やすくするために展開したのが図（b）である。ここで図の上下端の線は実は同じものであることを留意しておかねばならない。さて図（a）で太い実線で示された原点を中心とする円は，図（b）では２本の太い実線ではさまれた無限帯状部分となる（この対応で付図21，22は描ける）。そしてその帯の幅は，図で正方形８個分である。次に図（a）の太い２点鎖線と太い実線で囲まれた３日月形の部分は，図（b）では，幅が正方形２個分の無限帯状となる。この３日月形の周辺に電極をつけるのであるから，この電極は帯状部分のへりに写される。そこで，この帯状部分を４倍に拡大すると，当然電極も拡大されるが，これは前に円を写した帯と合同な帯となり，円と３日月形との対応がつく。４倍に拡大することは，座標線の密度を４倍にすることと等価であり，実際には３日月形の内部の座標線の密度を４倍に描いて，直接円と対応させる。付図16，17，19はこのような方法によっている。図（a）の太い２点鎖

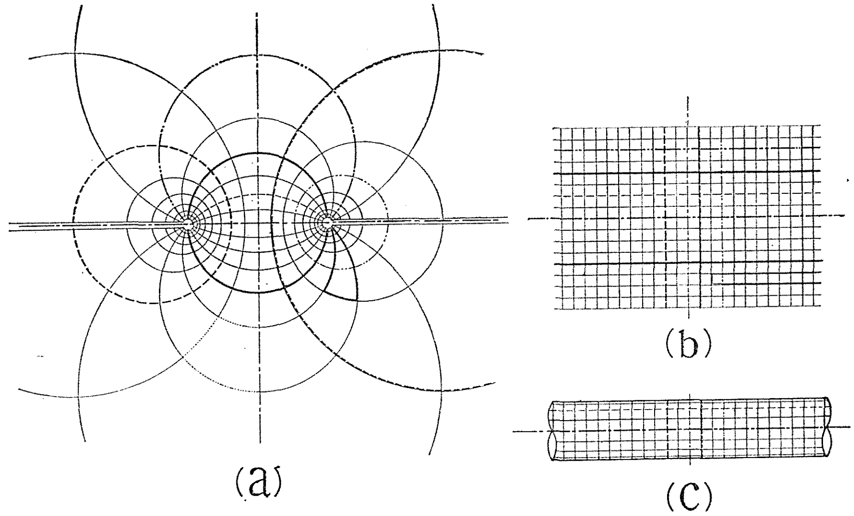


図　　5

線と太い実線の下半分とからなるような“だるま形”の図形の場合は逆に縮小すなわち座標線の密度を少なくすることによって円との対応がつく。

図（a）の右下部太い実線の円弧３角形は図（b）では半無限帯状となる。これは，太い実線円の右半分が幅の広い半無限帯状となるので，座標線の密度を変える方法で半円に対

応させて描くことができる。付図20はこの方法によっている。

また，密度を変える方法ではないが，図 (a) の円弧 4 角形，たとえば太い破線，細い破線，細い 2 点鎖線，太い実線で囲まれたような部分は，図 (b) では長方形となるので，その形が円と対応のついているものであれば，種種の電極配置について描くことができる。付図18は正方形に対応するものであり，付図29も極端な 1 例である。

＜4.4＞　切開いて対応させる方法

付図23，24のような穴のあるものは，これまでの領域と連結数が異なるので特別の配慮がいる。[6] 付図23を例にその描く過程を説明する。電極が対称配置であるので，これを基本図 **C** に重ねて，両電極の中心を結ぶ対称軸（そこを電流線が通る）で切り開いて 2 分割すると，そのおのおのは，**C** の座標線から考えて長方形に対応することがわかる。そして電極は長方形の 1 つの辺の両端に付図14のように写る。長方形のこのような電極配置のときの電流線，等電位線を求めるために付図 3 を描く。付図 3 は前述のように，これを付図 2 に重ねると，3 の電極の端と，2 の電極の端が接するようになっている。この付図 3 は密度を変える方法によって基本図の $\mathbf{D}_2$ から描くことができたのである。この 3 を 2 に重ね，2 から長方形に写して付図14を描き，14を **E** の座標から **C** の座標に写して付図23が得られるのである。付図24，34もこれと同様な技巧を用いて描いたものである。

＜4.5＞　合同な 2 つをつなぎ合わせる方法

この方法は切り開く方法の逆であるが，切り開く場合はふつう電流線に沿って切るのに対し，つなぎ合わせるときは一般に電極すなわち等電位線でつなぐので一項を設けた。

付図39，40のひし形は正 3 角形を 2 つあわせた形であるが，これを描くには付図38を利用する。付図38は 3 角形の 1 辺が 1 つの電極となるようくふうしたもので，これは，付図 6 のように，半円が電極となるような特殊な電極配置のものから得られるが，付図38と同じもの 2 つを，それが対称となるように，電極と電極とをつなぎ合わせると，ひし形の電流線，等電位線が得られる。このとき，つなぎ目の電極はとり除いても，形の対称性からつなぎ目は必ず等電位線となるのでさしつかえないのである。付図12は逆に等電位線に沿って分割した例である。

次に円板の周辺に電極が 2 対以上ある場合を述べる。図 6 (a)，(a′) のように電極が対称配置であるものを考える。この 2 つは電流線と等電位線が交換されたものに過ぎないから，一方を考えれば足りるが，[7] ここでは説明上両方を記す。これを図のように対称軸半径で切り開いて，座標線の密度を変える方法によって半円に写す。このとき (a) は電流線に沿って切り開かれるので半円 (b) はそのままでよいが，(a′) は等電位線に沿って切っているの

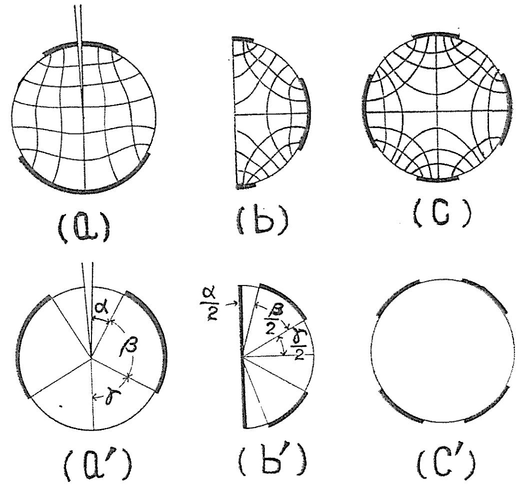


図　6

で半円（b′）では，直径の部分を導体にしておかねばならない。これらをそれぞれ2つつなぎあわせることによって，電極を2組持つ場合の図面（c），（c′）が得られる。この2つは電流線，等電位線を交換した全く同じものである。当然のことながら，（c），（c′）の抵抗値は（a），（a′）の½となる。付図8はこのようにして描かれ，9は8を正方形に写したものである。

＜4.6＞ その他の方法

以上おもな描き方を述べた。付図のうち説明のないものも，ほぼどれかと類似の方法によっているので，図7の記号によって変換座標を知れば想像がつくはずである。しかし，やや特殊なものもあるので補記する。

付図7は，円の内外の反転の関係を用いて，付図1を $r'=1/r$ で写しても得られるが，図式的には基本図 **C** に付図1を重ね，円の内側と外側とを対応させて求められる。

付図30，31，37のように円でない形のものの中央の穴は真の円ではなく，同心円の円形穴が座標の対応で写されたものであるが，ほとんど円とみなすことができる。このことは，付図1の中央付近がほぼ直交直線に近くなっていて，正方形，無限帯の場合はもちろん，付図36の中央付近も直交直線であることから理解できる。

5. むすび

種種の形の抵抗板の周辺に電極をつけた場合の電流線，等電位線の描き方と，実際に描いた多数の例を付図としてのせた。円形の穴のある円板なども，電極をふくめて対称軸のある場合，電流線がこの対称軸を通っていれば，この軸を境に2つに分けることにより電流線，等電位線が描ける。このような描き方はすべて，池田先生の直観的な等角写像の考え方を基にして考案したもので，いくつかの基本的な領域に描かれた曲線座標系の対応を極度に応用したもので，図面はいずれも原理的に正しい方法によっており，想像によって描いたものではないので，他の2次元界にもそのまま役立つものであろう。著者らは，引き続き，種種の形の曲面抵抗薄膜の電流線，等電位線について同様の研究を行なっており，次の集報に発表するつもりである。

著者の1人が35年ほど前に等角写像について興味深く手ほどきいただいた池田芳郎先生に厚くお礼申し上げます。またこの研究に卒業研究として協力された中島真人君，図面の作成に助力された小野訓，笠原英司，名野隆夫の諸君に深く感謝いたします。

（昭和41年9月10日投稿）

文献

(1) 荒又，寺門： 茨城大学工学部研究集報，第13巻（昭41）p. 79
(2) 池田： 等角写像とその方法，内田老鶴圃（昭10）
(3) 宮本： 2次元問題，修教社（昭13）p. 211
(4) 林 ： 高等函数表，岩波（昭16）p. 187
(5) 池田： 等角写像とその方法，内田老鶴圃（昭10）p. 104
(6) 荒又，寺門： 茨城大学工学部研究集報，第14巻，p. 11
(7) 荒又，寺門： 茨城大学工学部研究集報，第11巻（昭39）p. 31

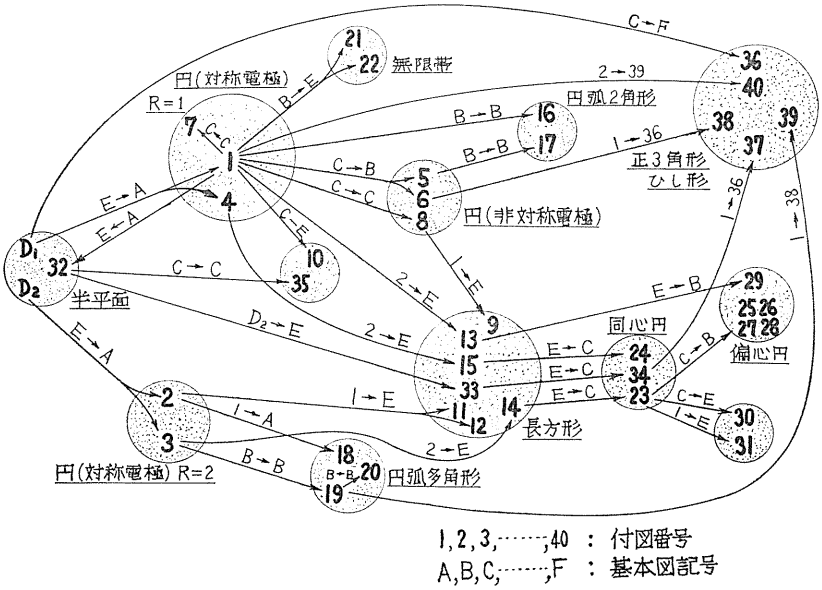
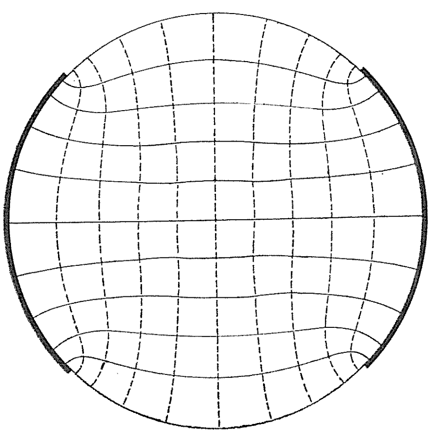
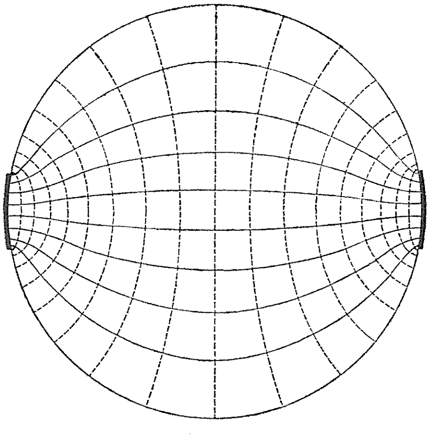


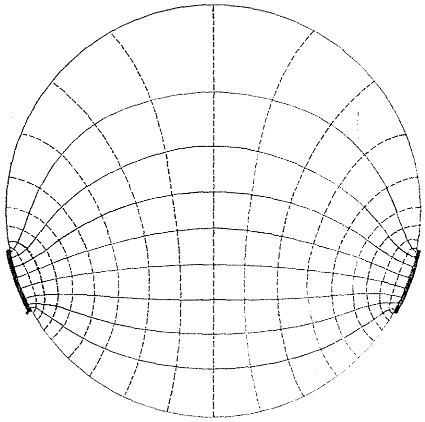
図　7　付図作成に用いた座標変換



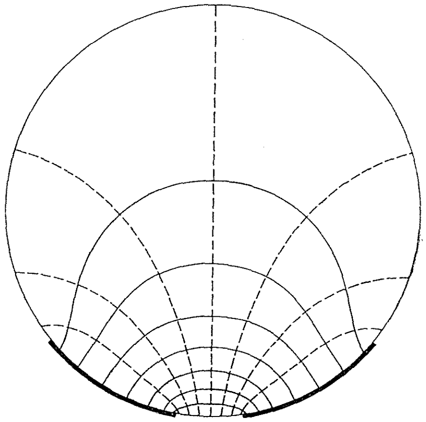
付　図　**1**



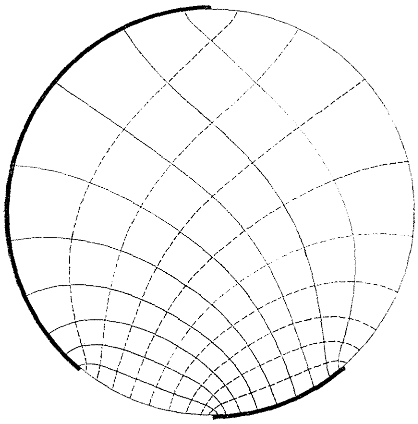
付　図　**2**



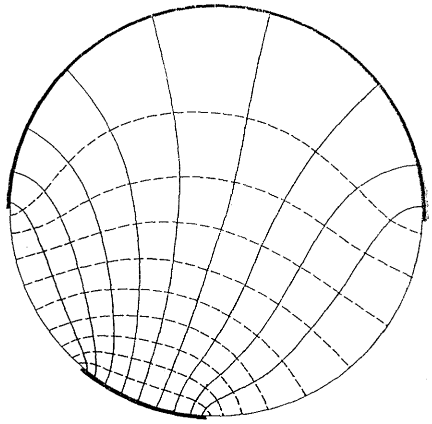
付　図 3



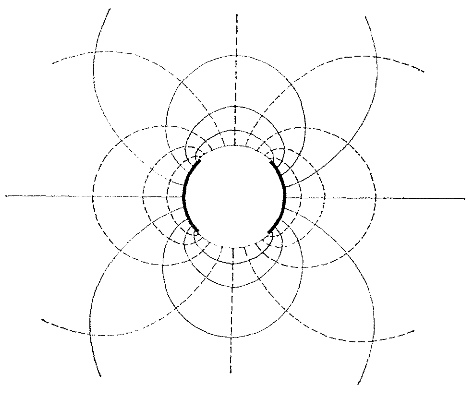
付　図 4



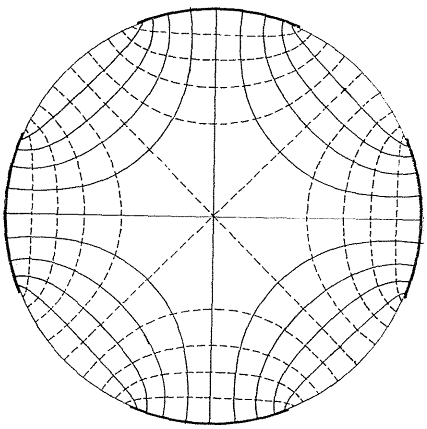
付　図 5



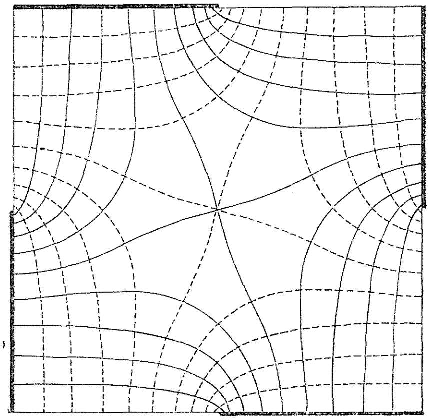
付　図 6



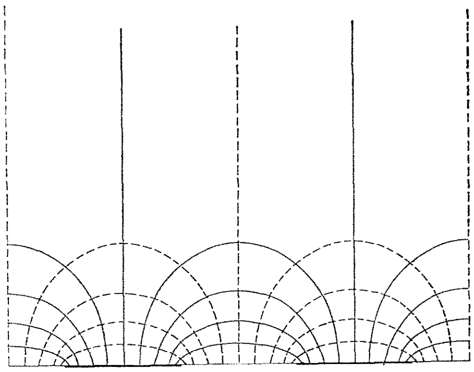
付　図 7



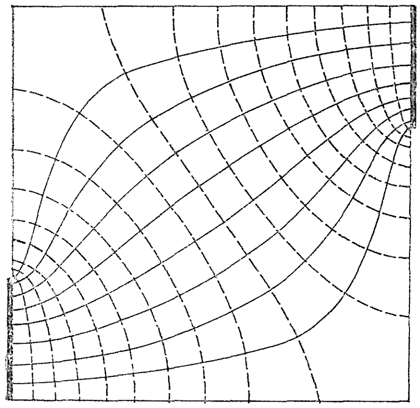
付　図 8



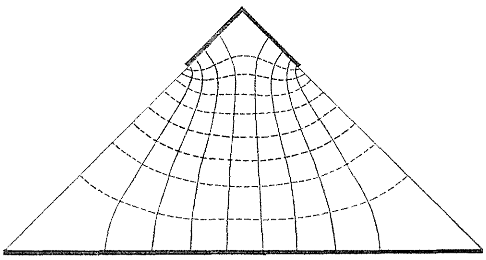
付 図 **9**



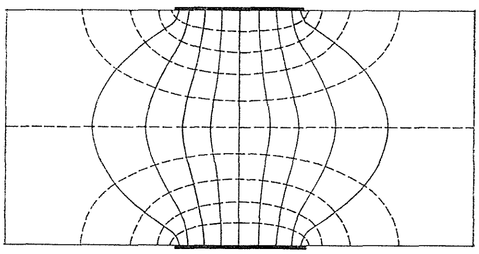
付 図 **10**



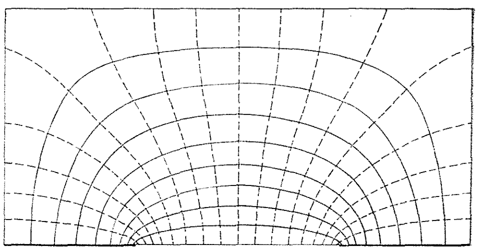
付 図 **11**



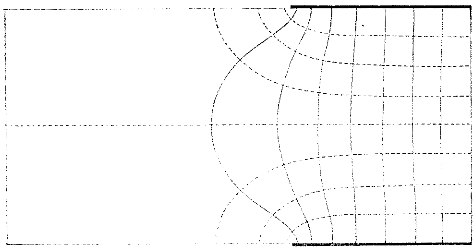
付 図 **12**



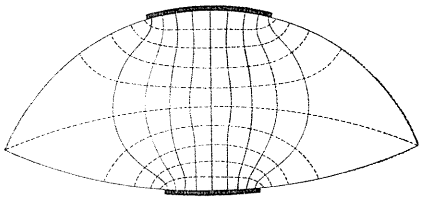
付 図 **13**



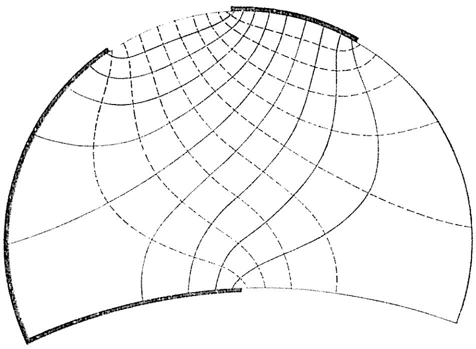
付 図 **14**



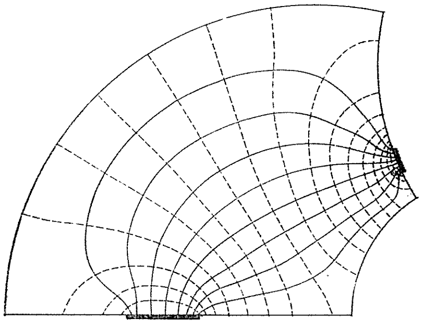
付　図 15



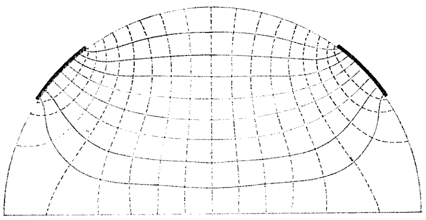
付　図 16



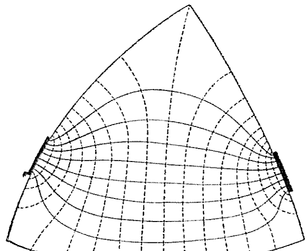
付　図 17



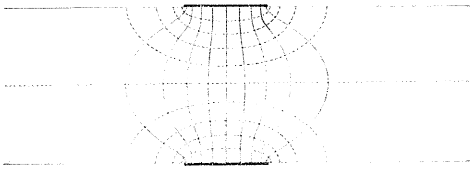
付　図 18



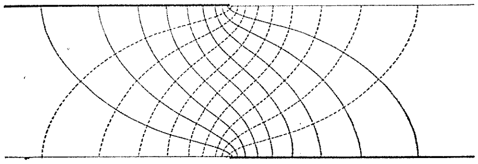
付　図 19



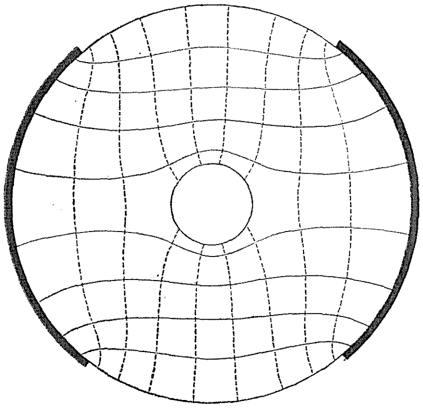
付　図 20



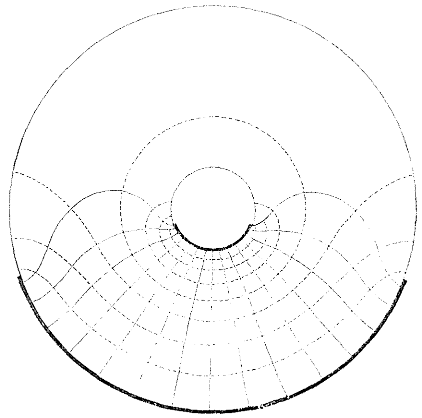
付　図 21



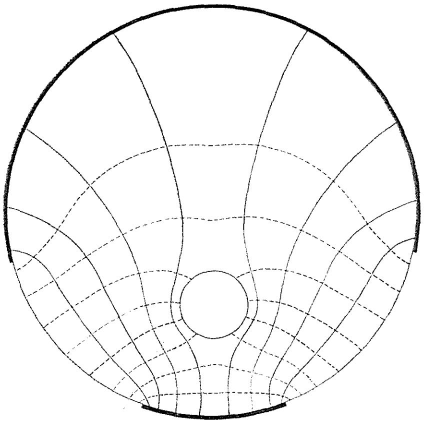
付　図 22



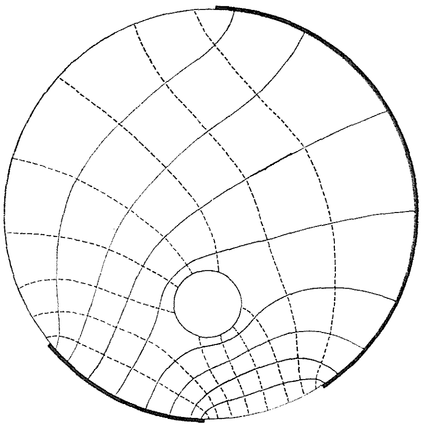
付 図 23



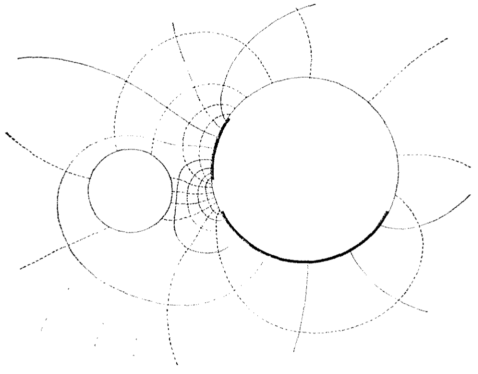
付 図 24



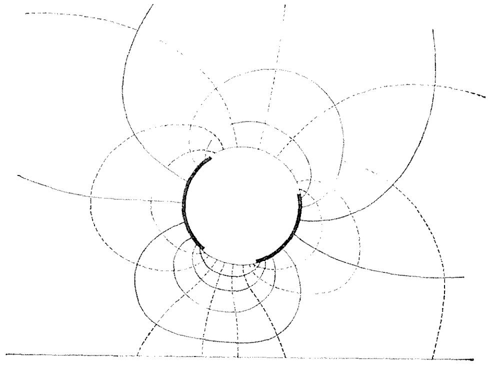
付 図 25



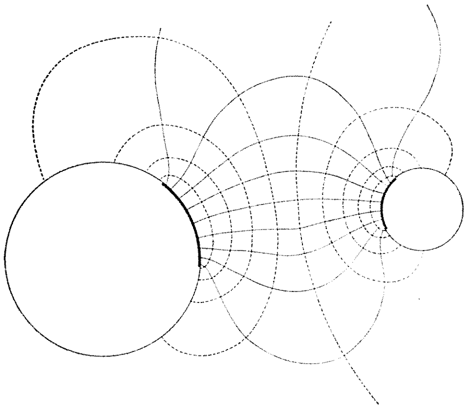
付 図 26

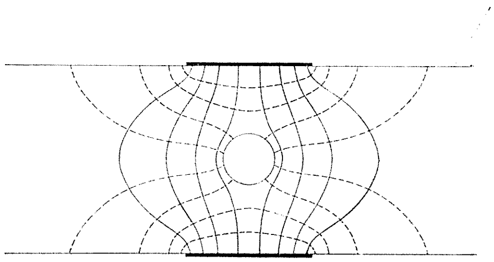


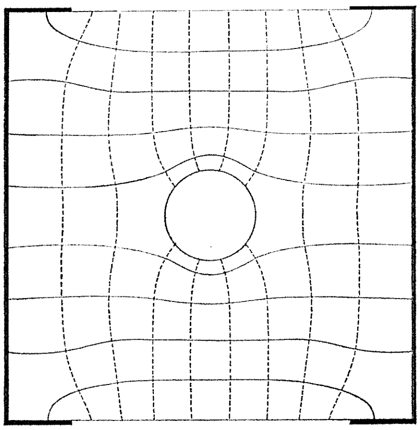
付 図 27

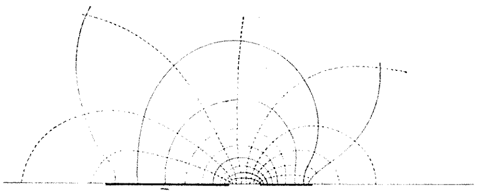


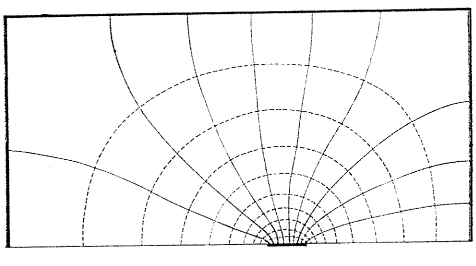
付 図 28

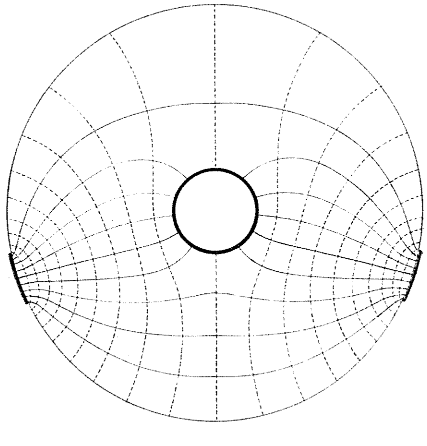

付　図 29

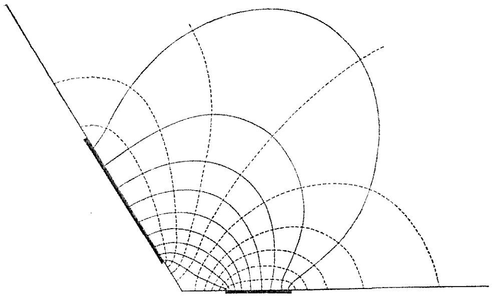

付　図 30


付　図 31

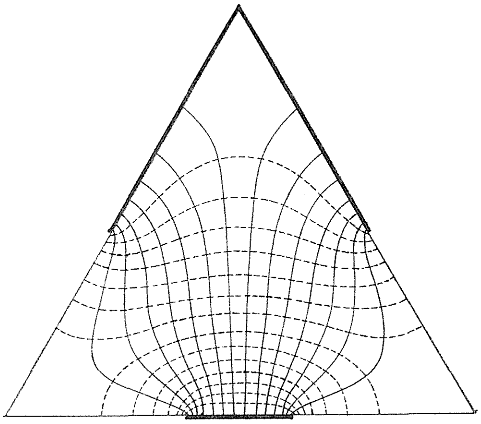

付　図 32


付　図 33

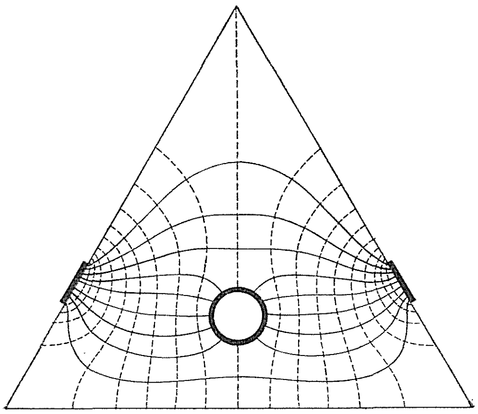

付　図 34



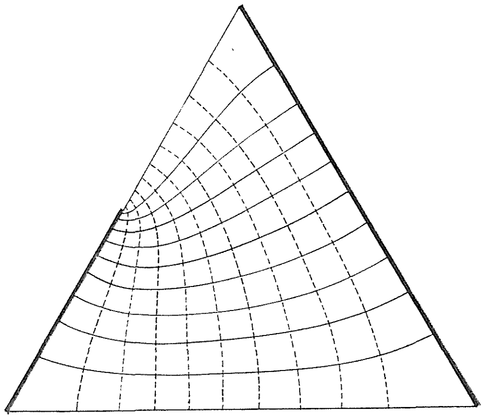
付 図 35



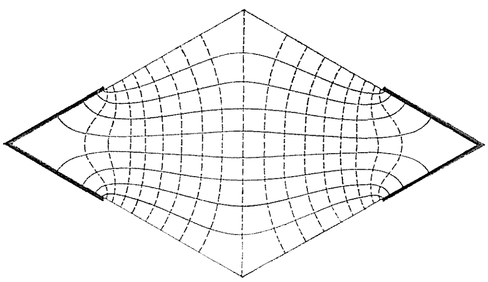
付 図 36



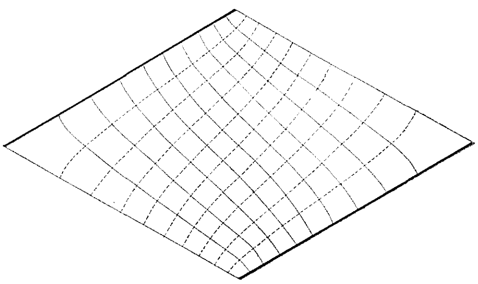
付 図 37



付 図 38



付 図 39



付 図 40