算数教育の問題点（Ⅱ）

数学研究室　佐　藤　瑛　一
〃　　宮　田　龍　雄

（昭和46年10月30日受理）

まえがき

先の「算数教育の問題点」（Ⅰ）（茨城大学教育学部教育研究所紀要第3号）に続いて，小学校第4，5，6学年における新指導要領による算数教育の指導内容のうちから数と計算，量と測定に関する問題点を考察してみたい。

1　数と計算

§1　記数法

自然数の記数法について第4学年で「まとめて理解させる」[1]ことは妥当であろう。この年令では自然数の個々の構造を経験的にも論理的にもある程度把握し，理解することができると考えられるからである。第2学年の各桁の数字の比較による自然数の大小の指導は，第4学年のこの段階に移行させた方が「10進数の理解に役立つ」ために望ましいのではあるまいか。10進法以外の，たとえば2進法などの記数法も導入して，10進記数法との比較を行なえば，自然数の構造の理解をさらに深めるばかりでなく，第5学年の *mod* 2，*mod* 3 などによる自然数の類別の必然性を理解させるためにも役立つであろう。しかし，このためには10進法の概念が定着したあとの段階が望ましい。

10進記数法の命数法については，いろいろ意見の相異もあるであろうが，現代社会に対応する意味ばかりでなく，科学計算の基礎づくりからも，また算数教育に現われる量のほとんどすべてがそうであるという教育上の意味からも，3桁毎の区切りによる適切な命数法に切り換えるべきであろう。4桁毎の区切りによるいわゆる検数法は歴史的であり，習慣的であるとしても計算機器のめざましい変革と共に現代社会においては，まったくその機能，意味を失っていると言っても過言ではない。児童にとっては習慣上の制約を余り考えなくてもよいのであり，したがって，教育上の問題は余り配慮しなくても済むと思われる。「4けたごとに特別な区切りや記号を用いることはさけるようにする」程度ではあまりにも消極的ではあるまいか。

自然数の構造の理解のための指導において10進記数法のみを強く表面化することは，自然数の *cardinal* としての構造の指導に片寄りすぎ，自然数のもつ *ordinal* としての構造の指導がやや疎外視されることになりはしないであろうか。自然数の整列性は公理論的立場からは基数としての自然数より，はるかに中心的役割りを果たすものであり，[2]四則との関連も深いので早い時期に十分に基礎的性質を児童に把握させておかなければならないので，記数法と数直線上への対応などを通して強く印象づけるように指導されなければなるまい。

多くの教科書または指導書には数の概念についても不明確な定義による用語，命題，が多いことは導入段階ではある程度避けられないことであろう。しかし，誤った用語，命題，設問などがあってはなるまい。たとえば“60億にいちばん近い数”ということは分数，小数をすでに把握している児童にとっては理解できないことがらであろう。また 800—900—$\square$—$\square$—1200 の空白を埋めさせる問題に対し，1000，1100を記入させることだけで済むことであろうか。もしそうであれば，これは真に「数学的にものを考える」という精神に反するといえるであろう。

なお，小数の記数法が第4，5学年で指導されるが「10進数としてその特徴をまとめて理解させ，そのことが計算などに能率よく用いられること」をねらいとして，10倍，100倍，……，$\frac{1}{10}$倍，$\frac{1}{100}$倍，……の大きさの数を，「10進数では小数点を，右左へそれぞれ1つ，2つと移動させて作ることができる」としているが，これは10進数のみの特徴ではないことに注意したい。さらに小数の表示は10進法以外にありえないと誤解されるような表現が教科書，指導書等にみられることも残念である。このような表現は，算数教育を小学校教育の枠内で行う限り問題はないとしても，かかる先入観の固定から起こりうる危険は避けられないので，将来の数学への発展的態度を目指す上に大きな障害となりうることに注目

せねばなるまい。[3)]

記数法に関連して 10，100，1000，……などを単位として17十億とか，203.3十km^2 のような表現を理解させる指導が行なわれているが，その目的がどこにあるのかを理解できないのは筆者のみではあるまい。これも新指導要領の具体的内容が，その理想としてかかげる“目標”を反映していない1つの例と考えてよいのではあるまいか。

§2 概 数

第4学年で「概数の意味を理解させ，数を手ぎわよくとらえたり処理したりするようにする」ために概数の指導があり，抽象的には「概数を用いる目的に応じて，どの位の概数でよいのかは主体的にきめるべきことであり，その判断について，具体的な場面に即して児童に考えさせる配慮が必要である」とされているが，現実の指導としては，これが何を意味するのかを判断することが困難であり，つまる所この年令の児童に対しては，形式的な数の処理方法のみしか指導されないであろう。たとえば，四捨五入の形式的な意味とその方法は児童に理解させることができるとしても，どんな場面に対応して四捨五入を用いる必然性があるのかを判断させることはほとんど不可能に近い。「どの位未満を四捨五入してどの位までの概数を必要とするかを表現することばづかいに，児童はかなりの抵抗を感ずることが多い。この点についても注意して指導しておくことが必要である」といわれても何の具体的指示も与えられていない結果，検定済の某教科書によれば“エベレストの高さは約8000mです”，“568円の買物をするには100円玉が何枚必要ですか”等という記載例がみられる。これなどはまったく非常識的であり，概数処理の方法のみにとらわれた例であるといわざるをえない。皮肉にも教科書のほとんどすべてでは，指導書の解説事項から外れて数の処理の判断の場合は避けている。したがって“小数第何位で切り上げなさい”式の受身の設問に終始せざるをえない。これは指導書の内容がいかに抽象的であり，具体性をもたないかという実状を如実に物語っている。

一般に概数処理は厳密には誤差論の範疇であり，また社会的慣習の問題とともに種々の規制と複雑に関連しているので，とても「児童が主体的に判断する」ことが可能とは思われない。算数教育における概数処理は統計などに関するグラフなどのごく狭い範囲に限定されるべきであり，それでまた十分であろう。したがって概数処理などの判断は省略して簡単に取り扱った方がより建設的であろう。

概数においても不正確な陳述が多くの教科書にみられる。たとえば，四捨五入の指導で“16万5千円は17万に近いとします”ということは規約であるのか，または導びかれる性質であるのか不明確であり，通常の能力をもつ児童にとっては，このような述べ方では便宜主義的な勝手な態度と映ずるであろう。また“ふつうは四捨五入します”という概数処理の仕方の説明も論理性がなく不適切であろう。

第5学年で概数の四則が指導されるが，その内容にも問題がある。たとえば，加法，減法では“同じ位をそろえて行なう”という表現が用いられているが，これも不正確で，有効数字の指導（中学校）との矛盾を内包することとなろう。また乗法，除法において万一不適当な概数に処理してしまえば，誤差の範囲の拡大を招き，まったく無意味な結果しか得られないことも起こりうる。第5学年の児童に概数の乗除まで主体的判断で行なわせることは不可能である。これらのことは算数教育の内容とほとんど無関係であるので削除する方がむしろ望ましいのではあるまいか。強いて指導すれば，まったく形式化された煩雑，無意味な記憶の強制という結果に終るであろう。

§3 整数の四則と計算法則

交換法則，結合法則，分配法則は「たんに計算について成り立つ性質であるという見方だけでなく，計算の方法を考えるとき，その基礎として用いられることがらであるという立場からも法則の役割りを次第に理解させるようにする。このようなことは児童の論理的な考え方を伸ばす機会としてもだいじなことである」というねらいのもとに

$$\begin{aligned}23\times6&=(20+3)\times6=(20\times6)+(3\times6)\\&=(10\times2\times6)+3\times6=10\times12+3\times6\\&=120+18\end{aligned}$$

という例が指導書に挙げられている。この学年（第4学年）段階では，このように考えることを要求することはできないとしつつも，個々の過程について逐次このような考察ができるようにしていくことが望ましいとしている。この主旨はある程度理解できないことはないとしても，第4学年の児童には極めて無理であることは実践例からも明らかなことであり，さらに上記の例に至っては筆者にとっても個々の過程に疑問を感ぜずにはいられない。ちなみに各教科書ではかかる指導がほとんどみられない事実は当然のことであろう。計算諸法則は，数少ない計算の具体例を通してかろうじて推定しえた段階（理解したとはいえない）の矢先に，これを基礎としてさら

に計算の原理を考えさせることは乱暴であり，さらに推定にすぎない事実を普遍化した形の「法則」まで権威化して一般の計算の基礎とすること自体「数学的な考え方」に矛盾するという見方も成り立つであろう。筆者の実践では中学校の生徒にとっても，明確に諸法則の上に立つ計算の原理を把握させることは困難であることから見ても，かかる指導上の方針が数学の研究者側からのみの考え方，見方で決定されては困るのである。かかる指導のねらいも小数，分数の計算指導の段階ではほとんど消滅してしまうという事実はやむをえないとしても，首尾一貫しないというそしりは免かれまい。第4学年の時点においては，多くの計算を通してえられる発見的な帰納としての法則性を認識させる程度にとどめてもよいのではあるまいか。

整数の乗除についても，乗法では極めて丁寧に計算原理の指導が行なわれるが，除法では乗法の逆算という理由から形式的計算技術に重点が移行してしまっているように思われる。このような態度は今回の指導要領の改訂の随所に見られる態度であり，無駄のない数学的姿勢であるとは言いえても，結局は，総合的には貧弱な指導しか行なえないという欠点をもつように思われてならない。それを補うためには除法の計算原理をも丁寧に繰り返し指導することによって，同時に乗法の計算原理が定着してゆくという見方に立った方がよいのではあるまいか。このようなことは計算の諸法則の取り扱についても言えることだと思うが誤りであろうか。

§4 小 数

小数の10進法による表現を通して「整数の場合と同じしくみである」ことを理解させるためには，たとえば

$$1.234=1+2\times0.1+3\times0.01+4\times0.001$$

のような分解を導入してから形式的計算の指導がなされれば児童の抵抗を減少できるであろう。

小学校における小数指導では有限小数のみを扱っているが，その枠内では「小数は整数とちがって，ある数の次の数や前の数がきまらない」，すなわち有理数の稠密性の認識に困難が伴なうであろうし，$1\div3$などの割り進みの指導にも支障をきたす。さらに，割り算としての分数の指導に際しても，無限小数の考えを入れない限り「分数を使えばわり算の値が正確に表わせる」等という奇妙な表現をせざるをえない。分数をわり算として見る限り，それは数値ではなく計算の過程の分数としての表示に過ぎないのでかかる指導は行き過ぎである。

わり進みに関連して，算とえば，$8m\div5m$ は「$5m$を基準として$8m$は$5m$の何倍にあたるか」を考え，その測定値を小数として表わすこととし，「第3学年の乗法の一般的な意味づけを用いることが理解される」ように注意するとしてあるが，測定数は測る側の数からみれば乗法を，測られる側からすれば除法を表わすという意味と受け取ることができるとしても，その際の乗除の間の転換が問題なのであって，このままではわり進むという指導はできない。この点についても具体的指示のない限り現場の教師の当惑はまぬかれまい。

小数の加法，減法は先に述べた小数の記数法が指導されていないので，多くの教科書では極めて形式的な取り扱いがなされている。このことは当を得ていると思われる。もし§3で述べた「諸法則の理解」の精神を生かすとすれば，小数，分数の段階でも諸法則による原理が指導されてもよいわけであるが，筆者自身は現行の教科書の多くに見られるような形式的な取り扱いだけで十分だと考えるからである。

小数の乗法の指導で，たとえば 2，3 の教科書では，

$$24\times1.5=24\times(15\div10)=24\times15\div10$$

$$85円\times2.4=8.5円\times24$$

$$0.68\times5.4=[(0.68\times100)\div100]\times[(5.4\times10)\div10]$$
$$=68\times54\div100\div10$$

$$4.56\times5.3=4.56\div10\times53$$

などの例があるが，これらは指導書の（基準とする大きさ）×（基準の大きさを単位として測った数）の考え方をもとにして，その考え方を小数の場合に適用したことになるのであろうか。無理な解釈を辞さなければ，ある程度このことも肯定できようが，上の諸例は小数の乗法の発見的工夫とも考えられ，一面では実際の指導においては指導書の方針に必ずしも従いえないことを物語るものではあるまいか。

乗数，除数と1との大小による積，商と被乗数，被除数の間の大小の強い指導も，負数を導入する段階では述べ直さなければならないので，このことに「着目させておくことがだいじである」とは考えられない。また「小数は10進数である」という表現は不適確である。これは小学校算数教育で取り扱う小数は10進記数法によるといい直すべきであろう。また単に10進記数法によるという理由だけで，「小数点の位置に注意すれば，整数の計算とほぼ同じ考えをもとにして，積や商を求めることができる」ということでは真の小数計算の原理が理解されるとは期待し難い。まして現実的には整数の四則の法則が，「小数の範囲においてもそのまま成り立つことになる」ことをよくおさえることや，「計算の手順を振り返り法則に照らして考えさせたりする」ことには相当の抵抗があるであろう。算数教育において整数の法則を小数

の範囲まで拡大する必要がもしあるとすれば，小数の記数法による整数と類似の方法の繰り返しをここでも重ねなければならないであろう。かかる繰り返しは数学的立場からは全く“無駄”なことと考えられるかもしれないが，算数の教育にとっては不可避であり，必要な“無駄”として容認しなければならないと考えるが，これは間違いだろうか。

§5 分 数

第4学年における分数の指導法については指導書ではまったく触れていないが，第4学年の内容は第5学年への発展の前段階として極めて基本的な位置を占めるものであるから，この意味での解説が必要であると思う。第3学年の分数の導入については前稿で[4)]述べたように種々の問題があるが，これとは別にとにかく単位分数の和としての分数が指導されてきているので，たとえば$\frac{3}{4}$において分母の4は1を4等分したことを表わし，分子の3は$\frac{1}{4}$を3つ集めたことと指導されるわけである。したがって，それに準拠する分数の大小の比較は数直線を媒介とせざるを得ない。このことは正の分数についてはあまり問題が起こらないとしても，負の分数の導入時においてはある程度困難が予想されるばかりでなく，第5学年における分数を「2つの整数の商を表わす立場からの理解」へと移行させることが潤滑でなくなる危険がある。

さらに分数の加法，減法は単位分数の概念に立脚し，一方乗法，除法では整数商としての分数概念を使用する必要があるため，急遽第5学年において分数の意味の変換が挿入されるが，このへんの指導書の解説は極めて形式的であって「そのもとになっていることがらについてもよく理解させることが必要である」というように具体的指示は何等示されてはいない。したがって現実の指導では形式的計算のみが児童に課せられ易くなるとしてもやむをえまい。

分母，分子の大小により，分数と1との大小を比較させることは厳密な意味では正確ではない。それは負の分数の場合には成り立たないからである。また伝統的な帯分数を詳細に指導することになっているが，帯分数の計算は結局仮分数に直して計算されるのが通常であり，分数計算における帯分数の意味は所謂計算のための計算以外に存在しない。強いて帯分数の分数における意味を求めれば，量的な表示ということになるであろうが，これは分数を小数化することで代行できるのであるから，帯分数を教材からはずしても差し支えないと考える。そのことによって失われる損失は，授業内容の幾らかでもの整理精選による利益から比べれば僅少であろう。

有理数の概念に関して，「任意の2つの整数の除法(除数≠0)がつねに可能となる（1つの分数で表わせる）ということを指導する」ことの内容は前にも触れたように理解し難い。分数は除法の行為そのものを表示するものであり，除法の可能性を意味するものではない。また有理数の稠密性を背景にした分数指導には多くの困難を伴う。これは同一の有理数を表現する分数の多様性に起因することが多いのであるが，約分，通分などの場合の必要性から分数の多様性をどうしても指導しなければならないことと考え合わせれば，むしろ有理数の稠密性は小数を基礎とした方が，算数教育では自然な形の指導が得られるのではないだろうか。

分数の表示の多様性を背景にした集合的見方に立って「分数についての大小，相等を考察することができるようにする」ことが望まれているが，第5学年の段階では，逆に約分，通分などの計算操作の積み重ねを通して集合的な1つの見方が理解されていくという考え方の方が実際的であろう。

なお，約分に関する指導で“かんたんな分数になおす”，“いちばんかんたんな分数”，“ふつうは分母がいちばん小さくなるまで約分する”等の述べ方がなされているが，客観性に乏しいばかりでなく，負の分数を考慮に入れれば誤りなので，たとえばテストなどで“$\frac{2}{4}$を$\frac{1}{2}$にしなければ不合格”などの処理を現場の教師が行なわないような指導法に改めてもらいたい。

第5学年の（分数）÷（整数）の指導で，たとえば，$2m\div3m$から$\frac{2}{3}$の概念をつくらせるのであるが，これを$2\div3=2\div6\times2$，または$2\div2\div3\times2$のようにして，2つの整数の除法に帰着させるが，このことと分数の表示の多様性との関連は余り合理的ではありえない。児童に$2m\div3m$と$4m\div6m$とが“同じ”と真に理解させる期待はとてもないであろうし，またさらに

$$\frac{3}{5}\div2=\frac{3\times2}{5\times2}\div2=\frac{3\times2\div2}{5\times2}=\frac{3}{5\times2}$$

のように指導すれば，数学的には興味があるとしても技巧すぎて教育的ではないように思われる。これは数直線の考え方とあわせて，

$$\frac{3}{5}\div2=\left(3\times\frac{1}{5}\right)\div2=3\times\frac{1}{10}$$

のような単位分数を用いる方法にした方がより自然であろう。

小数を有限小数に限った場合には「すべての小数を分数になおすことができる」けれども，これを強く児童に指導すれば，将来の数学の学習において問題を生ずる。また，循環小数は中学校以降の指導を待つとしても「分数の形であらわされている数はつねに小数で表わすこと

ができるとはかぎらない」という述べ方に問題がある。小学校では「小数として一応有限の位でとどまるものについて考えることとする」という理由が不明であるからである。もしこのようなことを強く前面に出せば，「分数の形で表わされる数（有理数）の集合は小数の集合を含む集合とみられる」と述べられているように，実際はこの逆である“小数の集合”が“分数の集合の部分集合”ということになり，年少時に得たこの誤った解釈が後の学習に大きな支障をもたらすであろう。

§ 6 数の集合と構造

第5学年における *mod* 等による類別の指導，公倍数，公約数の指導は明らかに集合の構成もしくはその集合のもつ構造を目指している。しかし，2 の倍数としての偶数の意味で，便宜上 0 をその範疇に入れたり，倍数のみの立場から 4 の倍数としては 0 をそれから除外したりするなどが行なわれているが，このことは「統一的にものを考える」ことに矛盾する。さらに偶，奇を代表する 0，1 の計算（集合の構造化）を通して「類別することの良さ」がわかるとしているが，これも安易な判断であろう。また（最小）公倍数，（最大）公約数を求める手段として「集合」の有効性を強調しているが，倍数なり，約数なりの集合を作る過程で（最小）公倍数，（最大）公約数は決定してしまうのであるから，これらを集合の考えの効果であるかのように言うのは誤りであろう。確かに（最小）公倍数，（最大）公約数の見つけ方の指導は集合の考えを育てる手だてを提供するものであろうから，ここでの学習は集合の考えを基にするのではなく，それらを通して集合の考えを育てることを目指すということに改めたい。

「分数の集合」の意味はいかなる集合を指しているのかは不明確である。分数の集合の元として，たとえば $\frac{2}{3}$ と $\frac{4}{6}$ とは区別されたもの，区別されないものの何れと考えても集合の概念に矛盾する。一般に児童にはこの 2 つの分数は区別されるものとして集合を構成してしまうおそれがある。分数の集合は第 1 次的な集合ではなく，同値の概念の上に立つ第 2 次的集合[5)]であるので，かなり高度の集合概念である。したがってこれを余り不用意に与えることは慎しまなければならない。さらに整数の集合が分数の集合の部分集合とみなされるためには類別と埋め込みの 2 つの高度な原理が必要なのであるから，図 1 のごとき表現は真の理解を妨げることになりかねない。数直線と数の対応づけをそのまま集合の考えに転移することは望ましくない。それは集合の元としての $\frac{2}{3}$，$\frac{4}{6}$ の差の有無は数直線上では消滅してしまうからである。

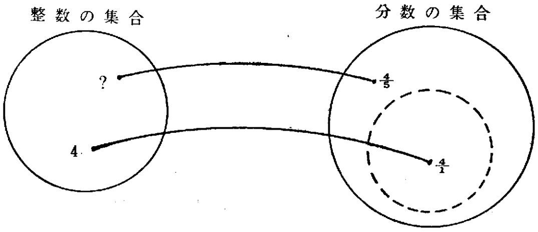


図 1

指導書に現われる「集合」という言葉はすべて“図をかく”ことでおきかえることできる程度のものであるから，特に「集合」という用語を算数教育に導入しなくても十分集合の考えは指導できるであろう。

四則演算の自閉性の指導のねらいは，数の拡張の基礎作りであるとも考えられるが，除法を乗法の逆算とする指導，すなわち逆数の指導を第 6 学年に課することには賛成できない。加法の逆算としての負数でさえ中学校で始めて指導されることになっているのであるから，それよりやや複雑な乗法の逆元である逆数は当然中学校において指導されるべきであり，またそのようにして差し支えないと思う。必要に応じて負の数を指導してもよい程度であるなら，分数の除法に関連した逆数は，その事実のみを小学校で指導すれば十分なのであって，逆元としての意味づけにまで拡げる必要はないと考える。特に演算の自閉性における負元の役割を除いてしまっているのであるから「数の拡張」を目指す意味はほとんど失われているであろう。またもし数の拡張を代数方程式の可解性を媒介にするとすれば当然 $ax=b$ の形の方程式より，$a+x=b$ の形の方程式が先行するであろう。さらに数の拡張を安易に指導することは非常に危険である。その理由は，数は形式不易の法則に沿ってその方向に拡張されるものであって，漠然と拡張した後の数体系に“諸法則の保存”が存在するのではないからである。

数の体系について代数構造の立場から行なわれる中学校の指導のための準備として，単なる代数構造の平易化，またはその特殊な部分に都合のよい制限をつけて指導するだけに終ってはならない。むしろ背景となる原理の経験を通しての確実な積み重ねこそ重要なのであるから，先入観となる誤った結論を導き易い指導はすべて断ち切らなければならない。さらに具体的にいえば，数学的に重要な原理そのものを先に与えてしまわないで，重要な原理を見い出すための事実の積み重ねを繰り返すことにより帰納的発見の芽を育てながら，それらの原理を正しく認識し，把握できる時期を待って，積極的に「数

学的にものを考える」指導が行なわれることが望ましいのではないだろうか。

2 量と測定

§1 面積・体積

第4学年以後において図形の求積が指導される。これ以前においても長さなどの概念を媒介として平面図形の面積および立体図形の体積についてある程度の原始的な概念の認識はもつようになっている。これらについても長さなどと同様2次元，3次元的広がりをもつものの量についても単位量を基にしてその測度として面積，体積が数量化できることを理解させることをねらっている。平面図形においても長さの測定と同様，測定の基準としての単位面積のとり方は，畳何畳分とか，およそグランド幾つ分とかの単位の選び方には自由性のあることを知らせ，面積測定の意味の理解の定着をねらいとしている。

単位面積を表わすものとしては，種々の形の図形を用いることが考えられる。さらに平面をすきまや重なりがないようにおおい尽くすという意味においては正方形が都合よいことをわからせることになっている。この意味においては単位面積をもつ図形として正3角形や正6角形を選んでもよいわけである。いろいろの計測を通し，また他との比較により，面積を計測するときは長さの計測との関連において，単位面積をもつ図形として正方形がとられる必然性を明白にする必要があろう。また面積についての概念構成の上から正方形以外の種々の図形を単位にとってみることは望ましいことかも知れないが，面積についての基本は長方形の面積の概念であると思われるので，長方形の面積を求めるためには正方形が便利であるという点からも正方形を単位にとることのよさをわからせることが大切であると思われる。

面積を計算によって求める以前の段階において，あるいは直接計測によって求められない図形（曲線で囲まれた図形など）の面積について，その図形の中にある方眼（単位面積をもっている）の数を数えることによっておよその面積を求める指導がされるが，このとき，いかにすればおよその面積が求められるは児童自身に考えさせることであって，“少しでも欠けている方眼の面積は，1つの方眼の$\frac{1}{2}$とみるとおよその面積が求められます。”というように上から与えてしまうのは疑問であろう。いつでもこのようにして計算させれば曲線が一般的な形の図形であるときなど誤差が大き過ぎる場合が起こるおそれもあろうし，長方形の辺の長さが小数であるときの面積を求めることなどへの障害とはならないだろうか。

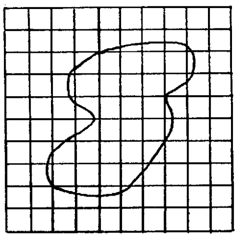


図 2

長方形や正方形の面積を求める公式（第4学年）を導き出すとき，面積を表わす数は，長方形のたて，よこに並ぶ単位面積をもつ正方形の個数の積として求められることから，面積の公式は“たて”，“よこ”の長さを表わす数と，“たて”，“よこ”に並ぶ正方形の個数を表わす数が等しくなることを形式化して作られる；

（単位面積）×（たての個数）×（よこの個数）

→（たて）×（よこ）。

ここで“たて”，“よこ”という用語が用いられるが，これらは相対的関係であって，図形の見方などとも関連して指導の際に注意されるべきだろう。また，このような見方は3角形や平行4辺形の面積の公式に用いられる“底辺”，“高さ”という見方へ統一されるべきだろう。また正方形の面積を求める式が公式としてほとんどの教科書で（一辺）×（一辺）という式で取り上げられているが特に公式として扱う必要もないように思われる。“一辺”という用語は図形の要素としての意味の方が強いので，指導のときは特に注意が必要であろう。このことは3角形などの面積を求めるときの“底辺”などについても言えることであろう。また正方形の求積公式を指導するとき“一辺”と“一辺”を“かける”ことの意味が，それらの辺のおかれている位置関係や長さという量と関係してくることをおさえておく必要もあろう。これに関連して，第6学年において指導される体積公式をも含めて，（長さ）×（長さ）→（面積），（面積）×（長さ）⟶（体積）とも受けとられるが，これらは示されている用語そのままの意味を表わしているのではないことへの注意も大切であろうし，「乗法の意味の統一的見方」という観点からも支障のないようにされなければならないと思われる。

乗法の用いられる場という観点から見るなら，第3学年で乗法を（基準の大きさ）×（基準の大きさを単位にして測った数）というように統一的に見させる指導がなされてきていることとも関連して，公式において用いられている乗法の意味や扱い方を特におさえておくことが大切になってくると思われる。したがって，名数を用いての乗法の式表示は避けるのが当然だろう。乗法を上のように統一的に見させることは計測的意味が基本となっていると思われるが，乗法の意味はそれだけではないこ

とへの注意も必要だろう。

上に述べてきたことは立方体や直方体などの立体図形においても当てはまることと思われる。柱体（直角柱，直円柱）の体積を求めようとするとき，教科書等で用いられる導入はほとんどの場合，底面が３角形や正方形，長方形の場合でこのときの柱体の体積を求める公式を導き出し，底面が台形や一般の多角形の場合を練習問題で扱っているものが多いようである。しかしこれは逆に指導した方が良いのではないかと思われる。測定における基準の大きさ（単位体積）をより鮮明に意識させるためにも，底面が一般の多角形，高さが単位の長さをもつ立体をもとにし，これによって求めようとしている立体の体積を計算させる指導を先にした方がよいと思われる。立体の測定においても基準となる量（単位体積）をおさえておくことが極めて重要と思われるからである。

§ 2　角の概念

図形の要素の１つとしての角についての認識やその大きさの比較については第３学年において指導されているが，第４学年では角の大きさを「半直線の回転の大きさを表わす量」としても理解させることになっている。このことを意識させるために，導入段階でひもやヒゴなど具体物を用いての指導がなされる。たとえば，“直線は２本の半直線（ひもなど）が重なっている位置（状態）から半回転してできたものと考え，このときできた角が２直角で，１回転して重なったときできた角が４直角である”というように，教科書等では指導している。ここで１回転したとき“できた角”についての認識に問題が残らないようにされなければならないし，0° と 360° を感覚的，視覚的に同じ量とみなしてしまうおそれがないように指導すべきであろう。角を回転の量を示すものとしてとらえさせることから「180度より大きい角も取り扱うことになるので」とされているが，他方では，図形のもつ１つの要素としての角の量としての性格も指導されている。算数教育においては後者のような扱いが多いと思われるし，またこのとき扱われている図形は凸形だけであることも考えると２直角（180度）より大きい角を指導する必要性はあまり考えられない。SMSG においても小学校段階では180度以下の大きさについて指導しているようである[6]。実際に180度より大きい角の量を必要とするのは中学校からの凹多角形や三角関数についての指導からであると思われる。

また，回転の量としての角の概念指導に関連して，180度より大きい角についても指導することになると，「二つの辺の開きのどの部分について考えようとしているのかはっきりさせることがたいせつである」と述べられているが，これはどんな回転によってできた角であるかを考えさせるというより，端点を共有する２本の半直線によってできる角には優角と劣角の２つがあることを意識させることであろうから，これらの概念についても指導されることになると思われるが，教科書では図3，4

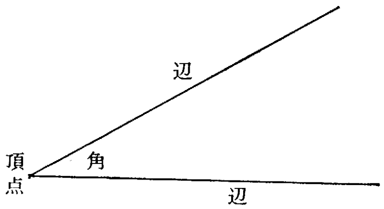
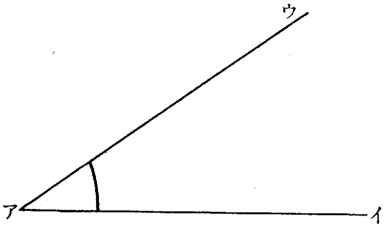


図　　3



直線アイと直線アウとのあいだの角を，角ウアイまたは角アといいます。

図　　4

のようになっているものが大部分で，これについては触れていないと思われる。

角の大きさを回転の大きさを示す量として理解させることについて「半直線がはしの点を中心にして半回転すると，もとの直線と１直線になるが，その場合に，角の大きさを180度と考えることや，１回転するともとの位置にもどり，そのときの角の大きさを360度とすることを知らせる」とあるが，“180度と考える”という表現は半回転の量を180度と定義することなのか，このときの量を他にいくらにすると考えてもよいことなのか（“360度とする”という表現についても同様のことが言えよう）という曖昧さが残るように思える。さらに「角の大きさは，その２辺の長さに関係しないことをはっきりさせることが重要である」とされているが，これも抽象的ではないだろうか。具体的にはどのようにはっきりさせるのかが問題であると思われるので，もっと適切な指示があって良いと思う。視覚的に辺をいくら延長しても角の大きさに変りないことを認めさせればいいのだろうか，教科書等での扱いは，児童に角の大きさを分度器で計らせるときなどのように，延長しても角の大きさには変わりないことをすでに前提にしているようにも受け取

れる。

角については，計量的な性質についての指導と共に，非計量的な性質にも着目した指導がなされなければならない。角の概念の構成上，頂点における2辺の相対的な位置関係の度合をどのようにとらえさせるかということが大切であると共に，量としてみた場合，角の辺の長さには依存していないという他の量とは異なった面をもつ量であることを理解させることに困難さがあることからも，どの学年で角のどのような面についての指導が適切であるかは1つの課題として残ろう。[7)]

§3 概 測

第5学年において測定に関連して概測の指導がなされる。これは指導書にも述べられているように「概測によって，およその大きさをとらえておくことは測定に対する見通しを立て，測定の結果に対する誤りを少くするうえにも，また測定をするものに対する計器の選択にも必要」なことであろうし，また量感を育てるためにも大切なことであろう。さらにこの学年においては，測定値における誤差に気づかせることも指導することになっているが，指導書に「測定値には誤差のあることも気づかせ，それを考慮に入れて，測定値を扱うようにすることが一つのねらいである」とし「その処理の方法としては，ふつう平均が用いられるが，それを形式的に計算させればよいというのではなく，その意味を理解させることが必要である」とあるが，測定値に誤差のあることは具体的操作などを通して意識させられるだろうが，“その処理の仕方（平均）の意味を理解させる”とあるだけでは抽象的すぎるためか，多くの教科書においてもこの点を特に注意して扱っているものは見受けられない。

測定値に対して“平均”を用いることが妥当であるか否か，処理の手段としての平均が使える測定と使えない測定があることを理解させることはかなり困難であるとも思われる。同じ方向性，偏性をもった測定における平均の使用に意味があるか否かということになってくるだろう。“平均”はどのような場面において用いられるのが適当であるかを，ここでも指導する上で極めて慎重を要することと思われる。中学生にも平均を用いることが適当である場合が理解されていないことをみうけることがある。たとえば，多角形の内角の和を学習するとき5角形について調べてみる。このとき生徒の中には，図5のように3角形に分けたとき，“①～⑤”の5つの角の“平均”が72° になるから，それぞれの3角形の残りの角の和は 108° となる。したがって5角形の内角の和はその5倍で540°と出したりする。他の生徒達もこの説明を聞いて，間違っているようでもあるが“わかった”と反応したりする。このような生徒が出てこないようにするためにも，測定の学習に限らず処理の方法の1つとしての“平均”が用いられる場を理解させることが必要だろう。

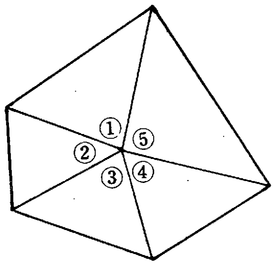


図 5

誤差については測定値の計算に関連して，「積や商を求める場合，答えのけた数をもとのけた数より多く出しても実際にはあまり意味のないことを知らせ……」とあるが，これもどの程度の理解をねらっているのかやはりあいまさが残ろう。有効数字についての指導は中学校になっているので，教科書等においては，たとえば長方形の面積を求めるとき，“（辺の長さ）は3けたの数だから，答えも3けたで表わすようにしましょう”式になっている。これでは処理の方法を指定されない限り処理することができない児童をつくることになってしまうことにはならないだろうかという懸念も出てくるし，また，「主体的，発見的」に考えさせる現代化の主旨にも反するようなことが出てはこないだろうか。概数についてはこのような処理の具体的方法にまで発展させないでとどめておくだけではまずいのだろうか。

§4 円の面積

第5学年において円周率，円の面積についての指導がなされる。面積については「（半径）×（半径）×3.14という公式によって求積できることを理解させる」ことになっている。しかしこれを公式として用いてしまうことは疑問であるし，測定の意味とかけはなれてしまうので面積の概念の混乱をひき起こすおそれがあろう。教科書では“くわしく調べると，円の面積は，その円の半径を一辺とする正方形の面積の約3.14倍になります”という扱い方や，図6のようにして，円周の長さを極限の考えを用いて，円を長方形に変形して“円周の半分は（半径）×（円周率）に等しいので，円の面積は……”という扱いをしている。（当然直円柱の体積を求める公式を導き出すときにおいても後者と同様な扱い方がされている。）

前者は直接測定によって円の面積と正方形の面積の比が円周率となることを確かめる形で，半径の長さが種々変っても上の式で円の面積が求められることを帰納していく形式はとっているが，これを数少ない例で公式として与えてしまっている。また後者は円周率を前提にして

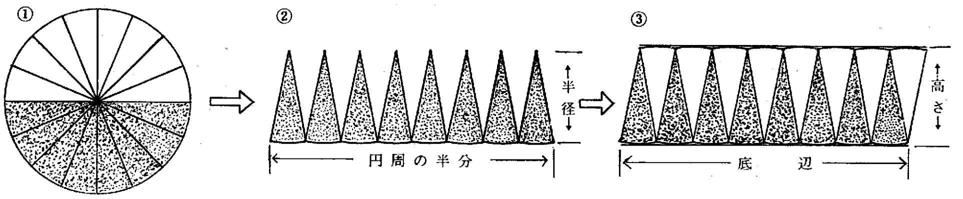


図　　6

円の面積を求める公式を出そうとしているが，このような扱い方は小学校においては無限や極限の極念についてほとんど指導していないのでより問題であろうと思われる。数学にとって重要である極限の概念の誤った固定概念を抱かすおそれがあるからである。

これについて指導書では「円については，その円の直径に対する割合（円周率）が一定であったように，面積では，半径を一辺とする正方形の面積に対する割合が一定（円周率）になっていることをよく理解させておくことがだいじである」と述べられているが，前出のいくつかの事実と同様に余りにも抽象的であり，現場の教師にとってはどの程度の理解をもって児童に“よく理解させ”たことになるのかわからないのではないだろうか。

小数の取り扱いにおいても，無限小数は取り扱わないとする方針をも考慮するとかなり困難であろうとも思われるし，またこのように論理的曖昧性の上に立ってそれ以後を論理的に進めることが，はたして数学的考えを伸すことになり得るかどうか疑問である。したがって，円の指導では広さや長さのあることは児童にも直観的に理解できると思えるので，曲線の長さの概念はかなり高度な概念であることからも，それらについては計測などを通し何らかの方法で曲線の直観的な長さを数値で表現させたり，その測定の基本的立場に還って円の面積については面積の存在を意識させ，その概略値を経験的に発見させる程度にとどめておいてはどうだろう。SMP では円の面積は中学校で指導するようになっている。[8)]

円の面積の計算式を公式化してしまったとき，実際には3.14よりくわしい数値を知らせることもあるので，もし×3.14で計算しないで，×3.1416で計算すれば結果に相異が出てきて，それを誤答とするような誤った算数教育が行なわれる心配もある。あるいは，大学入試その他で，

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{4}\pi a^2$$

と途中の計算を省略して，円の面積の$\frac{1}{4}$という見方だけから結果を出してしまうことも良く見受けることである。

円周の長さは直径の長さのおよそ2倍から4倍の間にあることを指導するとき，指導書においても「内接正方形，外接正方形を用いて予想させることを学習させるのもよい」としてあるが，2倍より大きいことは何とか理解できても，4倍より小さいことが理解できるだろうか。図7において，“アイウの長さ＞アエウの長さ”をどのようにして理解させるかに問題が残ろう。さらに，これより円周率を3.14として公式化してしまうと，“内接正方形の周の長さ＞円周の長さ”という矛盾が出てきてしまうだろう。たとえば半径1の円の内接正1000角形の周の長さは3,14158749程度であり，円周率を3.14とすれば円周より内接正多角形の周が長くなる。

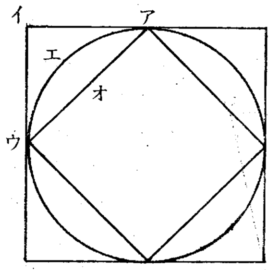


図　　7

速さの指導においては，“等速”であるということが明確に仮定されていなければならないだろう。この等速ということの理解ができてから平均の速さの概念を指導すべきだろう。等速ということが理解されていないと加速度の概念は生まれてこないだろうし，また真の意味の速さの概念から遠のいてしまうのではないだろうか。

また，長さや角度などは基準量を定めて，その何倍であるかを数値化することが可能であるが，速さの場合には，単位量の何倍になるかということで数値化はできようが，その基準となる単位の速さを決めること自体が困難である（時間や長さに関係なく）ことから，密度などのように，時間と長さという異種の量からの誘導単位が用いられている（日本ではメートル毎秒）ことなどを考慮すると，速さについての概念構成は極めて困難であろうことが考えられる。このことからも「速さの概念を構成するとき基礎にしていることがらをよく理解させることがだいじである」と言うだけでなく，もっと具体的指導方法等の明示が必要であろうと思われる。

§ 5 用語の定義

指導要領には各学年において新しく指導される用語が述べられているが，これらの定義については述べられていない。したがって指導書等においてそれらの定義，記号の説明をある程度明確に述べておく必要があると思われる。教科書に出てくる用語についての定義には，曖昧なもの，不正確なものが目立ち，しかも教科書によってその定義が異なることがしばしば見受けられる。たとえば，平面・立体形において用いられる“高さ”については，３角形のちょう点から，向あっている辺に垂直な“線の長さ”を……，平行４辺形では，平行な辺をそれぞれ底辺といい，そのあいだの“はば”を……，台形では，……を上底，下底といい，そのあだいの“きょり”を……，角すいのちょう点から底面に垂直にひいた“直線の長さ”を……，図８において“直線 EF の長さ”などと極めて不統一な形で述べられている。上の例からもわかるように，“直線”と“線分”も区別されないで用いられていることが多い。

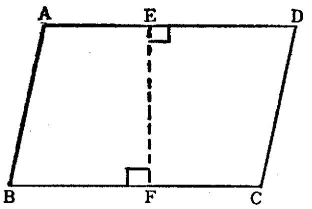


図 8

指導書の「平面の平行と垂直」（第４学年）の項に「イ 一つの直線に，垂直に交わっている二つの直線は互いに平行である」とあるが，教科書ではこれをそのまま平行線の定義として用いているが，この学年では３次元空間についても学習することを考慮すると，これは誤りであり，“1つの平面の上で”と付け加えることが必要だろう。

用語を書くとき，たとえば，“3角形”や“三角形”と書いたり，“4角形”や“4辺形”と書いたりすることがあるが，これらについても統一すべきではないだろうか。

あいまな定義，不統一な用語・記号を用いることは児童に算数の学習に対する嫌悪感をもたせる１つの原因ともなりはしないだろうか。

あとがき

以上小学校の中高学年の算数教育の新指導要領に基づく指導内容の中で数と計算，量と測定に関する部分の問題であると思われる幾つかの事実を述べてきた。なお，図形，数量関係については後の機会を待ちたい。一般的に今回の改訂では，その目標とする「統合性」，「発展性」が前面に出過ぎてしまっているのではあるまいか。そのため果たして児童にその内容が本当に理解され，消化することのできるものであるかどうかが懸念されるのである。

数学における基本的な概念や原理を，不明確な基礎の上に導入し，それからの概念・原理に普遍性を付与し，可能な限りそれらに立脚して指導が展開されている。このような方法でより進んだ「数学的な考え方」が育っていくものであろうか。概念や原理がたとえ明確な立場で導入されたとしても，それを基本として種々の事実を説明していく態度は公理主義に基づく“数学の研究”の一面を意味しよう。それは少なくとも小中学校段階の“数学の教育”とは異質のものと考えられるがどうであろうか。“数学の学習”とはいろいろな数学的事実を，いろいろの立場や角度で積み重ね，試行錯誤を繰り返えしていく過程の中から始めて数学的概念が生まれ，原理が発見され，理解されていくのではあるまいか。原理を上からの形で与え，諸事実をそれに結びつけさせて形式化することは少なくとも小学校の段階では無理なことであろう。もしそのような方法がとられるならば，児童の多くは算数から遠ざかってしまうのではないだろうか。確かに事実の積み重ねを通して数学的発見を期待するためには多くの時間が必要であり，必然的に指導内容の縮小，したがってその極度の精選を考慮せざるをえない。社会的対応を余りにも重視し，児童に過多の内容を与えることは内容の過少よりは有害であろう。

算数教育にとって本当に必要なものは何かという原点にもう一度立ち還って，必らずしも因習，伝統に拘束されない科学的立場から得られる指導内容を追求する必要があるのではあるまいか。なお筆者等も上で指摘した問題点を明確にするための実践的研究を近い将来行ないたいと思っている。

なお，本稿の一部は，昭和46年４月４日 数学教育学会（東京都立大学）において発表したものである。

文 献

1) 小学校指導書，算数編（昭和44年），文部省
（以下，「……」は指導書よりの引用）
2) 高木貞治，数の概念（昭和45年），岩波書店
松村英之，集合論入門（1971），朝倉書店
Landau. E., Grundlagen der Analysis, Akademische Verlagsgesellshaft (1930)
3) 一松 信，電子計算機と二進法（1971），日本評論社
4) 佐藤・宮田，算数教育の問題点（I），茨城大学教育学部教育研究所紀要第３号
5) 宮田竜雄，教育学部紀要第19号

6) SMSG, Mathematics for the Elementary school, Grade 5 (1962)
7) 全国数学教育学研究会編，算数教育の研究（昭和45年），学芸図書
8) The School Mathematics Project, Book 2

Problems in Arithmetic teaching in Elementary Education (II)

Eiichi Satō and Tatsuo Miyata

Abstract

"The Revised Course of Study" raised many questions in arithmetic teaching in elementary education. The purpose of this study is to survey and consider the contents of the teaching materials particularly in the middle and upper classes in elementary grade.